Per maria ac terras sublimaque coeli
Multa modis multis varia ratione moveri
Cernimus ante oculos.

Lucret. Lib. I.

Fr. Barbiez. del. G. sc.

Grundlehren aller mechanischen Wissenschaften

von

Abel Bürja.

Dritter Theil,

welcher

die Dynamik

enthält.

Berlin,
bei F. T. Lagarde
1791.

Grundlehren

der

Dynamik

oder

desjenigen Theiles

der Mechanik

welcher

von den festen Körpern im Zustande der Bewegung handelt.

von

Abel Bürja,

Prediger, Professor der Mathematik, und Mitglied der Königl. Akademie der Wissenschaften.

Berlin, bei F. T. Lagarde.

1791.

Nachricht.

Vor zwei Jahren gab der Verfasser seine Statik heraus, im verwichenen Jahre die Hydrostatik, und jetzt erscheinet die Dynamik. Zum künftigen Jahre nimmt er sich vor, ebenfalls die Hydrodynamik abzuhandeln, und damit den Inbegriff der ganzen Mechanik im weitläuftigsten Verstande zu schließen. Alle vier Werke zusammen werden alsdann ein vollständiges Ganzes ausmachen, und unter folgendem gemeinschaftlichen Titel vereiniget werden: Grundlehren aller mechanischen Wissenschaften, in 4 Theilen, von Abel Bürja, u. s. w. Jedoch werden sie auch, wie bisher, einzeln zu bekommen sein.

Vorrede.

Die Mathematik ist einem Reiche gleich, welches beständig Eroberungen machet, und an Umfange zunimmt. Vor alten Zeiten war ein Gelehrter schon ein großer Mathematikus, wenn er die Rechenkunst, die gemeine Geometrie, die Lehre von den Kegelschnitten, und etwas von der Theorie der Maschinen verstand. Wußte er noch dazu seine Erd- und Himmelskugel geschickt zu gebrauchen, so wurde er vollends als ein großer Hexenmeister betrachtet und bewundert. Heutiges Tages kostet es mehr Arbeit und Kopfbrechen, wenn man den Ruhm eines guten, nicht einmal eines großen, Mathematikers erlangen will. Die meisten Haupttheile der Mathematik sind so angewachsen, daß jeder derselben, wenn man ihn gründlich studiren will, fast eben so viel Zeit erfordert, als ehemals der ganze Inbegriff der mathematischen Wissenschaften.

Besonders hat die Mechanik in diesen beiden letzten Jahrhunderten gewaltige Fortschritte gemacht. Nicht nur sind die Theorien vom Gleichgewichte, sowohl fester als flüssiger Körper, sehr erweitert worden, so daß daraus zwei besondere Wissenschaften, die Statik und Hydrostatik, entstanden sind; sondern es sind noch zwei ganz neue Theile hinzugekommen, nämlich die Dynamik, worin die Körper nicht im Zustande des bloßen Gleichgewichts, sondern in ihren wirklichen Bewegungen, betrachtet werden; und die Hydrodynamik, worin ebenfalls die Bewegungen flüssiger Materien untersuchet werden.

Mit der Dynamik allein beschäftigen wir uns im gegenwärtigen Werke. Galilei, Descartes, Wallis, Newton, Huyghens, die Bernoulli, d'Alambert, Leonhard Euler, sind die unsterblichen Namen der Männer, welche die Lehre von

den

den Bewegungen der Körper nach und nach zu ihrer Reife gebracht haben, ohne die noch jetzt lebenden zu erwähnen, unter welchen verschiedene das von ihren Vorgängern Erfundene theils erweitert, theils in Verbindung gebracht haben. Beides hat unter andern in diesen letzten Jahren Herr de la Grange in seiner vortreflichen Mécanique analytique geleistet, wo er alle bisher gefundene Lehren der verschiedenen Theile der Mechanik auf die allgemeinsten Grundsätze zurück führet, und daraus solche analytische Formeln herleitet, die sich auf alle mögliche Fälle anwenden lassen.

Mein Zweck ist hier nicht, in dieses berühmten Mannes Fußstapfen zu treten, und für Gelehrte zu arbeiten, sondern denen, die sich über die bloßen ersten Anfangsgründe erheben wollen, eine Anleitung zu geben, wodurch sie hinlänglich befriediget und zu noch höheren Kenntnissen vorbereitet werden. Diese Dynamik ist demnach ein Mittelding zwischen solchen Werken, die nur die ersten Begriffe von einer Wissenschaft enthalten, und angehenden Schülern in die Hände gegeben werden, und solchen, die schon viele Kenntnisse voraussetzen, und nur von denen gelesen werden können, welche die Wissenschaft verstehen, und sich vorzüglich nach neuen Methoden erkundigen.

Was die Einrichtung meiner Arbeit betrifft, so wird man finden, daß ich von der gewöhnlichen Anordnung der abzuhandelnden Gegenstände etwas abgegangen bin. Ich habe es deswegen gethan, weil ich fand, daß die Lehren und Beweise, so wie sie hier auf einander folgen, sich am besten einander unterstützen, und daß auf diese Art der Grund des Folgenden am bequemsten im Vorhergehenden geleget werden konnte. Mehrmal habe ich in dieser Absicht ein ganzes Hauptstück umarbeiten, und an eine andere Stelle versetzen müssen. So, zum Beispiel, hatte ich die Theorie der scheinbaren Bewegung ganz zuletzt abgehandelt; da ich aber fand, daß sie viel Licht auf den Stoß der Körper verbreitet, so machte ich, nach den nöthigen Veränderungen, den Anfang des ganzen Werkes damit.

Viele Sätze habe ich, wie es nicht anders geschehen konnte, sammt den Beweisen, aus den Werken der oben benannten berühmten Männer, und aus anderen entlehnet; hingegen, viel Beweise und Wendungen habe ich nach meinen eigenen Einsichten angebracht. Auch einige neue Lehrsätze und Folgerungen wird der sachverständige Leser dann und wann antreffen. Was überhaupt die Art zu beweisen betrifft, so habe ich mich beflissen, den jedesmaligen Beweis nicht zu weit her zu holen, sondern, so viel als möglich war, ihn unmittelbar aus der Natur der Sache zu entwickeln. Sehr allgemeine Lehrsätze, woraus man alles als bloße Folgerungen herleitet, sind zwar schön, und dem Gelehrten sehr willkommen, scheinen aber nicht demjenigen Unterricht angemessen, welchen man weniger erfahrnen Lesern geben will. Der natürliche Gang des menschlichen Verstandes leitet nicht von ganz allgemeinen Dingen auf die besondern Fälle, sondern von vielen einzelnen Wahrheiten auf solche Sätze, die sie alle in sich begreifen.

Uebrigens wird in dieser ganzen Dynamik die Bewegung nur im leeren Raume betrachtet. Wenn sie durch einen widerstehenden Mittelraum gehet, so erfordert ihre Untersuchung schon manche Grundsätze aus der Hydrodynamik, zu welcher sie also mehr, als zur Dynamik, gehöret.

Aus diesen wenigen Erinnerungen wird der Leser schon hinlänglich ersehen haben, was er eigentlich von gegenwärtigem Buche zu erwarten hat, und in wiefern es ihm nutzen kann. Wenn es den Liebhabern der Mathematik einige Erleichterung zur Erlernung dieser eben so schweren als erhabnen Wissenschaft verschaffet, so ist mein Zweck erreichet und mein Wunsch erfüllet.

Inhalt.

Erstes Hauptstück.

Zweites Hauptstück.

Drittes Hauptstück.

Viertes Hauptstück.

Fünftes Hauptstück.

Sechs-

Erstes Hauptstück.

Von der relativen und scheinbaren Bewegung.

§. 1.

Die Dynamik ist die Lehre von den festen Körpern, in sofern sie sich im Zustande der Bewegung befinden. Dieser Theil der Mechanik hat seinen Namen vom Griechischen Worte Dynamis bekommen, welches eine Kraft bedeutet, indem alle Bewegungen durch gewisse Kräfte bewirket werden. Einige nennen ihn auch die Phoronomie, welches, ebenfalls aus dem Griechischen entlehnte Wort, so viel bedeutet, als die Lehre von den Bewegungs-Gesetzen.

§. 2.

In den Grundlehren der Statik sind zugleich die ersten Kenntnisse der Dynamik mit angeführt worden, indem alle mechanische Wissenschaften auf gemeinsamen Gründen beruhen. Dort ist im ersten Hauptstücke alles erläutert worden, was die Schwere, Masse und Dichtigkeit der Körper betrift. Im zweiten ist von der Bewegung und den damit verknüpften Begriffen geredet worden, bei welcher Gelegenheit die Regeln der einförmigen Bewegung, wie auch das Verhältniß der Kräfte, vorkommen. Im dritten Hauptstücke wurden die allgemeinen Gesetze der Bewegung, zugleich mit denen des Gleichgewichts betrachtet, und unter andern wurde die Zusammensetzung der Kräfte oder der Bewegungen erörtert.

§. 3.

Bei allen jenen Grundbegriffen wurde die Bewegung jedes Körpers für sich betrachtet. Jetzt wollen wir die Bewegung der Körper untersuchen, in sofern der eine, in Rücksicht auf die übrigen, seine Lage verändert. Dieses ist also zu verstehen. Wenn ein Körper sich beweget, so gehet er in einer gewissen Richtung und mit einer gewissen Geschwindigkeit, die er beide wirklich hat, und die seine absolute Bewegung ausmachen. Hingegen, wenn man zwei Körper zugleich betrachtet, die sich beide bewegen, oder wovon sich wenigstens einer beweget, so bemerket man oft, daß sie sich einander nähern, oder von einander entfernen, auch daß sie ihre Lage gegen einander verändern, so daß der eine, in Betrachtung des andern, nach der rechten oder linken Seite, vorwärts oder rückwärts, aufwärts oder niederwärts gehet. Diese Veränderung des Abstandes und der Lage des einen Körpers, in Betrachtung des andern, wird die relative Bewegung genannt.

Wenn man sich einen Beobachter vorstellet, der sich in unverrückter Lage auf dem einen Körper befindet; so kann dieser an dem andern Körper nur die relative Bewegung beobachten, nicht aber die absolute; denn er kann weiter nichts bemerken, als daß der andere Körper ihm näher kömmt, oder sich von ihm entfernet, wie auch, daß er in Betrachtung des Beobachters seine Richtung verändert. Die relative Bewegung, in sofern sie von einem Beobachter betrachtet wird, der sich auf dem einen Körper in unverrückter Lage befindet, wird die scheinbare Bewegung genannt. Im Grunde ist also die scheinbare Bewegung mit der relativen einerlei, nur daß bei jener ein Zuschauer hinzugedacht wird, welches meistens die Sache begreiflicher machet, und mehr versinnlichet.

Man darf sich auch nur vorstellen, beide Körper, deren Bewegungen man vergleichet, seien auf einer steifen geraden Linie ohne Schwere aufgespießet, worauf sie ungehindert gleiten können, und welche die absoluten Bewegungen gar nicht hindert, so hat man ein recht sinnliches Bild von der relativen Bewegung. Die Verkürzung oder Verlängerung desjenigen Theiles der gedachten Linie, welcher zwischen beiden Körpern befindlich ist, bestimmt die Geschwindigkeit, mit welcher beide Körper sich nähern oder entfernen; das Schwanken oder Drehen der nämlichen Linie giebt die Veränderung der Richtung.

§. 4.

Bei der relativen Bewegung finden alle die nämlichen Umstände Statt, wie bei der absoluten; hauptsächlich

1) ein **relativer Weg**, das heißt, die Zunahme oder Abnahme der Entfernung während einer gegebenen Zeit.

2) Eine **relative Geschwindigkeit**, das heißt, der relative Weg, welcher in der Einheit der Zeit zurückgeleget wird. Und je nachdem diese relative Geschwindigkeit unverändert bleibet, oder in den folgenden Zeittheilen größer oder kleiner wird, so kann die relative Bewegung entweder einförmig, oder beschleuniget, oder verspätet sein.

Anmerkung I. Wo bloß von Geschwindigkeit und Weg, ohne nähere Bestimmung, gesprochen wird, muß allemal vorausgesetzet werden, daß von der absoluten Bewegung die Rede ist.

Anmerkung II. Was hier von zwei Körpern gesaget worden, läßt sich auf mehrere anwenden, wenn man die Bewegung des einen mit den Bewegungen aller übrigen vergleichet. Man darf sich nur gerade Linien einbilden, die alle in dem einen anfangen, und durch die übrigen Körper gehen. Dann kann man die Veränderungen jeder Linie insbesondere betrachten. Indessen ist die Betrachtung zweier Körper für einen Anfänger hinlänglich.

§. 5.

So wie es eine relative Bewegung giebt, so hat man auch eine relative Ruhe. Diese muß allemal Statt finden, wenn die eingebildete Verbindungs-Linie (§. 3) weder länger noch kürzer wird, sich auch nicht drehet, sondern mit sich selbst parallel fortläuft.

§. 6.

Wenn von zwei Körpern, deren jeder sich einförmig beweget, einer den andern in einer und derselbigen geraden Linie verfolget, und sie also beide nach einer Gegend hingehen, so erhält man die relative Geschwindigkeit, mit welcher sie sich einander nähern oder von einander entfernen, wenn man die kleinere absolute Geschwindigkeit von der größeren subtrahiret. Ist die Geschwindigkeit des vorangehenden kleiner, so nähern sie sich; ist aber diese größer, so entfernen sie sich. Gesetzet, der vorangehende Körper mache 50 Fuß in jeder Sekunde; der verfolgende aber 60 Fuß. Da der verfolgende in jeder Sekunde 10 Fuß weiter vorwärts gehet, als der verfolgte, so ist klar, daß sie am Ende jeder Sekunde um 10 Fuß näher an einander sind, als im Anfange derselben, oder am Ende der vorhergehenden Sekunde. Die relative Geschwindigkeit, mit welcher sie sich nähern, ist demnach $60 - 50 = 10$ Fuß, und also die Differenz beider absoluten Geschwindigkeiten. Eben so urtheilet man in ähnlichen Fällen. Ginge aber der verfolgte Körper 60 Fuß weit in jeder Sekunde, und der verfolgende nur

50,

50, so würden sie in jeder Sekunde um 10 Fuß weiter aus einander kommen, und sich also mit einer relativen Geschwindigkeit von $60 - 50 = 10$ Fuß von einander entfernen.

Im Falle gleicher absoluten Geschwindigkeiten, z. E. 60 und 60, wird die relative Geschwindigkeit null, als $60 - 60 = 0$, das heißt, beide Körper nähern sich nicht, und entfernen sich auch nicht, sondern bleiben in einerlei Abstand, und sind also in einem Zustande der relativen Ruhe (§. 5).

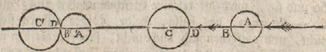
§. 7.

Wenn zwei Körper sich in entgegengesetzten Richtungen, jedoch in einer und derselben Linie, einförmig bewegen, so finden zwei Fälle Statt, entweder sie nähern sich einander, oder sie entfernen sich von einander. In beiden Fällen entstehet die relative Geschwindigkeit aus der Summe beider absoluten Geschwindigkeiten. Z. E. Wenn ein Körper jede Sekunde 50, der andere aber in entgegengesetzter Richtung 60 Fuß zurückleget, so sind sie nach Verfließung jeder Sekunde $60 + 50$ Fuß entweder näher an einander oder entfernter von einander, je nachdem sie gegen einander oder auseinander laufen. Also ist ihre relative Geschwindigkeit $60 + 50 = 110$ Fuß für jede Sekunde.

§. 8.

Aufgabe.

Eine Kugel gehet mit einer gewissen einförmigen Geschwindigkeit in einer gewissen geraden Linie. Nach einer bestimmten Zeit fängt eine andere Kugel an, die erste mit einer gegebenen einförmigen Geschwindigkeit auf demselbigen Wege zu verfolgen. Es wird gefraget, an welchem Orte und in welchem Zeitpunkte beide an einander stoßen werden.



Die vorangehende Kugel sei C, und ihr Halbmesser CD. Die verfolgende sei A, und ihr Halbmesser AB. Die verfolgte habe beim Anfange der Bewegung schon die Strecke AC voraus. Gesetzt ferner, beide Kugeln treffen bei B′ oder D′ zusammen, so hat die verfolgte den Weg CC′ und die verfolgende den Weg AA′ zurückgeleget.

Laßt uns jetzt folgende Benennungen annehmen.

Es sei AB (= A′B′)	$= b$
Es sei CD (= C′D′)	$= d$
Geschwindigkeit der Kugel A	$= a$
Geschwindigkeit der Kugel C	$= c$
Anfängliche Entfernung AC	$= e$
Zeit, um welche A später ausgehet als C	$= f$
Zeit, welche A bis zur Begegnung brauchet	$= x$
Weg AA′, welchen A bis zur Begegnung zurückleget	$= y$

Die Kugel A läuft demnach mit der Geschwindigkeit a, während der Zeit x, und durchläuft den Raum $AA' = y$. Folglich ist (Statik Hauptst. II. §. 24)

$$ax = y$$

Die

Die Kugel C läuft mit der Geschwindigkeit c, und da sie um f Zeit-Einheiten früher ausgegangen ist, so gehet sie während der Zeit $x+f$, durchläuft also einen Raum $c(x+f)$, und dieser ist CC'. Es war $AA' = y$ also $AC' = AA' + A'B' + D'C' = AA' + AB + CD$ $= y + b + d$, und $CC' = AC' - AC = y + b + d - e$.

Folglich ist $c(x+f) = y + b + d - e$

oder $cx + cf = y + b + d - e$

es war auch $ax = y$

Setzet man diesen letzten Werth von y in die vorletzte Gleichung, so kömmt

$$cx + cf = ax + b + d - e$$

oder $e + cf - b - d = ax - cx$

oder $e + cf - (b + d) = (a - c)\, x$

oder $\dfrac{e + cf - (b+d)}{a - c} = x$

Da nun x oder die Zeit gefunden ist, so kömmt y, wenn man x noch mit a multipliziret, indem $y = ax$,

also ist $a \times \dfrac{e + cf - (b + d)}{a - c} = y$

Folglich ist die Aufgabe aufgelöset. Nämlich, um die Zeit der Zusammenkunft zu finden, wird folgendes erfordert.

1) Zum anfänglichen Zwischenraume e addiret man das Produkt cf aus der Zwischenzeit f des Ausgehens und der Geschwindigkeit der verfolgten Kugel, das ist, denjenigen Weg, den die verfolgte Kugel in der Zwischenzeit zurückgeleget hat. Diese Summe giebt eigentlich den Ab-

stand beider Kugeln im Augenblicke, da die verfolgende ausgehet.

II) Von der gefundenen Summe subtrahiret man die Summe beider Halbmesser. Der Rest giebt den relativen Weg, den beide Kugeln bis zur Zusammenkunft zurück-zulegen haben, indem die Mittelpunkte nicht näher kommen können, als bis zur Summe beider Halbmesser.

III) Den gefundenen relativen Weg dividiret man durch den Unterschied beider Geschwindigkeiten, das ist, durch die relative Geschwindigkeit $(a - c)$ (§. 6). So bekömmt man die erforderliche Zeit, vom Ausgange der letzten Kugel an gerechnet. Dieses stimmet mit der allgemeinen Regel, daß der Quozient aus dem Wege und der Geschwindigkeit, der Zeit gleich ist (Stat. II. H. §. 26).

Anmerkung. Aus den Erläuterungen, die wir den drei Regeln beigefüget haben, siehet man, daß man die Auflösung auch durch bloßes Räsonnement ohne Algebra hätte finden können, und daß beide Methoden zu einem Zwecke führen. Das Räsonnement hat den Vorzug der größeren Evidenz; hingegen hat die algebraische Rechnung einen anderen Vorzug, der darin bestehet, daß sie auch dann Hülfe leistet, wenn man nicht sogleich auf die nöthigen Räsonnements verfällt.

Exempel. Eine Kugel, die 5 Linien im Halbmesser hat, gehet mit einer Geschwindigkeit von 60 Fuß für jede Sekunde. Nach einer Viertelstunde fängt eine andere Kugel an, die erstere zu verfolgen. Diese andere hat 1 Zoll im Halbmesser, durchläuft während jeder Sekunde 100 Fuß, und gehet von einem Orte aus, der 20 Fuß 7 Zoll weiter rückwärts lieget. Wann und wo wird diese die erste einholen und berühren? Man reduzire vor allen Dingen die gegebenen Größen in einerlei Zeitmaaß und einerlei Längenmaaß, z. E. in Sekunden und Fuße.

Hier

Hier ist demnach

$$
\begin{array}{l}
900 \text{ Sek.} = \tfrac{1}{4} \text{ Stunde} = f. \\
\times\ 60 \text{ Fuß} = c \\
\hline
54000 = cf \\
+\ 20\tfrac{7}{12} \text{ Fuß} = e \\
\hline
54020\tfrac{7}{12} = e + cf. \\
-\ \tfrac{17}{144} \text{ Fuß} = 1\tfrac{5}{12} \text{ Zoll} = (b + d) \\
\hline
54020\tfrac{67}{144} = e + cf - (b + d) \\
:\ 40 = 100 - 60 = a - c \\
\hline
1350\tfrac{2947}{5760} \text{ Sek.} = \dfrac{e + cf - (b + d)}{c - a} = x
\end{array}
$$

Diese Sekunden machen etwas mehr als $22\frac{1}{2}$ Minuten. In so viel Zeit also wird die verfolgende Kugel die verfolgte einholen; und wenn man die Zeit vom Ausgange der verfolgten Kugel rechnet, so wird diese schon etwas mehr als $22\frac{1}{2} + 15$ Minuten $= 37\frac{1}{2}$ Minuten, das ist, $\frac{1}{2}$ Stunde und $7\frac{1}{2}$ Minuten gegangen sein.

Was den Ort betrift, so ist

$$
\begin{array}{l}
1350\tfrac{2947}{5760} = x \\
\times\ 100 = a \\
\hline
135051 \text{ Fuß} = y \text{ ohngefähr.}
\end{array}
$$

So weit ist der Ort, wo beide Kugeln an einander stoßen, vom Ausgangs-Orte der verfolgenden entfernet. Also vom Ausgangs-Orte der verfolgten ohngefähr $135051 - 20\frac{7}{12} = 135030\frac{5}{12}$ Fuß.

Zusatz I. Wir haben in der Aufgabe angenommen, daß die verfolgende Kugel später ausgehet, als die verfolgte.

folgte. Wenn aber diese schon eine Strecke Weges voraus hat, so könnte auch die verfolgende früher ausgehen; alsdann müßte f oder die Zwischenzeit negativ angenommen werden, und es würde sein

$$\frac{e - cf - (b + d)}{a - c} = x$$

$$a \times \frac{e - cf - (b + d)}{a - c} = y$$

Die Zeit x und der Raum y beziehen sich immer auf den verfolgenden Körper.

Zusatz II. Wenn beide Gegenstände so beschaffen sind, daß einer den andern durchdringen kann, als z. E. wenn es nur Schatten sind, oder der eine ein Körper und der andere ein Schatten ist, so geschiehet die Berührung zwei mal, einmal beim Eintritte, das ist, wenn die Gegenstände am ersten zusammen kommen, das anderemal beim Austritte, wenn sie sich wiederum trennen.

In diesem letzten Falle wird die Summe beider Halbmesser positiv, weil zum relativen Wege beider Mittelpunkte noch eine Linie hinzukömmt, die gedachter Summe gleich ist. Man nehme folglich für beide Berührungen

$$\frac{e + cf \mp (b + d)}{a - c} = x$$

$$a \times \frac{e + cf \mp (b + d)}{a - c} = y$$

wo das Zeichen — für den Eintritt und + für den Austritt ist.

Diese beiden Berührungen finden z. E. bei Mondfinsternissen Statt, wenn der Schatten der Erde die Mondkugel bedecket. Auch bei Sonnenfinsternissen durchläuft, dem

dem Anscheine nach, der dunkele Mond die Sonnenkugel, oder einen Theil derselben.

Zusatz III. Wenn man im letzten Falle nur wissen will, wann beide Mittelpunkte zusammentreffen, so verschwinden in der Rechnung die Halbmesser, oder sie werden o, alsdann ist

$$\frac{e + cf}{a - c} = x$$

$$a \times \frac{e + cf}{a - c} = y$$

Diese letzten Formeln gelten in allen Fällen, wo auf den Zeitpunkt der Berührung nicht gesehen wird, oder auch, wo keine große Genauigkeit Statt finden kann, als z. E. wenn von Menschen die Rede ist, wovon einer den andern verfolget. Dahin gehören die Aufgaben folgender Art: Ein Bote machet täglich 7 Meilen. Nach 2 Tagen wird ihm, aus einem Orte, der 13 Meilen weiter rückwärts lieget, ein anderer nachgeschicket, der täglich 10 Meilen machet. Wann und wo wird dieser den ersten einholen? Hier ist $c = 7$, $a = 10$, $f = 2$, $e = 13$, und es wird

$$\frac{e + cf}{a - c} = \frac{13 + 14}{10 - 7} = \frac{27}{3} = 9$$

ferner $$a \times \frac{e + cf}{a - c} = 9 \times 10 = 90.$$

Also muß der verfolgende bis zur Einholung 9 Tage gehen, und 90 Meilen Weges zurücklegen.

Zusatz IV. Wenn beide Körper zugleich ausgehen, und der verfolgte bloß einen Theil des Weges voraus hat,

hat, so verschwindet die Zwischenzeit f, und man hat

$$\frac{e \mp (b + d)}{a - c} = x$$

$$a \times \frac{e \mp (b + d)}{a - c} = y$$

Und wenn die Halbmesser nicht in Anschlag kommen, so ist

$$\frac{e}{a - c} = x$$

$$\frac{ae}{a - c} = y$$

Gesetzt also, im Exempel des vorigen Zusatzes habe der erste Bote keine Zeit voraus, sondern nur die 13 Meilen, so wird

$$\frac{e}{a - c} = \frac{13}{10 - 7} = \frac{13}{3} = 4\tfrac{1}{3}$$

$$\frac{ae}{a - c} = 4\tfrac{1}{3} \times 10 = 43\tfrac{1}{3}$$

In diesem Falle gehet der verfolgende nur $4\frac{1}{3}$ Tage, in welchen er $43\frac{1}{3}$ Meilen machet.

Zusatz V. Wenn der verfolgte und der verfolgende aus einem Orte ausgehen, und der erstere nur eine gewisse Zeit voraus hat, so verschwindet e, und es wird

$$\frac{cf \mp (b + d)}{a - c} = x$$

$$a \times \frac{cf \mp (b + d)}{a - c} = y$$

oder

oder wenn die Durchmesser aus der Acht gelassen werden,

$$\frac{cf}{a - c} = x$$

$$\frac{acf}{a - c} = y$$

Wenn also im Exempel des dritten Zusatzes beide Boten aus einem Orte ausgehen, so verschwindet e, und es ist

$$\frac{cf}{a - c} = \frac{14}{10 - 7} = \frac{14}{3} = 4\tfrac{2}{3}$$

$$\frac{acf}{a - c} = 4\tfrac{2}{3} \times 10 = 46\tfrac{2}{3}$$

Hier also hat der verfolgende $4\tfrac{2}{3}$ Tage zu gehen, und $46\tfrac{2}{3}$ Meilen zurückzulegen.

§. 9.

Aufgabe.

Zwei Kugeln, von gegebenen Halbmessern, kommen einander in derselbigen geraden Linie, mit gewissen einförmigen Geschwindigkeiten, entgegen: es ist auch die Zeit des Ausganges einer jeden, nebst ihrer anfänglichen Entfernung, gegeben. Man soll den Zeitpunkt und die Stelle bestimmen, wo sie beide zusammentreffen.

Es seien A und C (folg. Fig.) die beiden Kugeln, deren Halbmesser AB und CD gegeben sind. Die Entfernung vor dem Anfange der Bewegung sei AC. Gesetzt, beide Kugeln treffen bei B' oder D' zusammen, so hat die Kugel C, von welcher wir annehmen, daß sie am ersten ausge-

ausgehet, den Weg CC′, die andere aber, welche später ausgehet, den Weg AA′ zurückgeleget.

Es sei AB (= A′B′) : :	$= b$
Es sei CD (= C′D′) : : :	$= d$
Geschwindigkeit der Kugel A :	$= a$
Geschwindigkeit der Kugel C : :	$= c$
Anfängliche Entfernung AC :	$= e$
Zeit, um welche A später ausgehet als C	$= f$
Zeit, welche A bis zur Bewegung brauchet	$= x$
Weg AA′, welchen A bis zur Begegnung zurückleget : : :	$= y$

Die Kugel A läuft demnach mit der Geschwindigkeit a, während der Zeit x, und durchläuft den Raum AA′ $= y$, folglich ist (Statik. Hauptst. II. §. 24)

$$ax = y.$$

Die Kugel C läuft während der Zeit $(x+f)$ mit der Geschwindigkeit c, und macht demnach den Weg $c(x+f)$ = CC′. Es ist aber CC′ = AC — AA′ — (A′B′ + C′D′) $= e - y - (b+d)$. Also ist

$$c(x+f) = e - y - (b+d)$$

oder $cx + cf = e - y - (b+d)$

Es war auch $ax = y$

also ist $cx + cf = e - ax - (b+d)$

$$cx + ax = e - cf - (b+d)$$

$$(c+a)x = e - cf - (b+d)$$

$$x = \frac{e - cf - (b+d)}{a+c}$$

folg-

folglich $y = ax = a \times \frac{e - cf - (b + d)}{a + c}$

Hieraus entstehen folgende Regeln, um die Zeit der Zusammenkunft zu finden.

I) Von der anfänglichen Entfernung e subtrahire man den Weg cf, welchen die früher ausgehende Kugel schon zurückgeleget hat, bis zur Zeit, da die spätere ihre Bewegung anfängt, so bekömmt man den Abstand in diesem letzten Zeitpunkte.

II) Von diesem Abstande subtrahire man noch die Summe der Halbmesser beider Kugeln, weil ihre Mittelpunkte nicht näher an einander kommen können, als bis zu einer Entfernung, die dieser Summe gleich ist. Der Rest giebt den relativen Weg, den beide Kugeln bis zur Begegnung zurückzulegen haben.

III) Diesen relativen Weg dividire man durch die relative Geschwindigkeit, welche in diesem Falle die Summe beider absoluten Geschwindigkeiten ist (§. 7), so kömmt die Zeit der Bewegung, vom Ausgange der spätern Kugel an gerechnet (Statik. II. Hauptst. §. 26).

Anmerkung. Die drei aus der algebraischen Formel gezogenen Regeln hätten auch, wie man siehet, durch bloßes Räsonnement gefunden werden können. Ferner hätte man sie auch aus dem Falle herleiten können, wo die Kugeln nach einerlei Gegend hingehen (§. 8). Denn dort war

$$x = \frac{e + cf - (b + d)}{a - c}$$

Da im gegenwärtigen Falle die Geschwindigkeit c in entgegengesetzter Richtung ist, so wird c negativ, und dann kömmt ebenfalls

$$x = \frac{e - cf - (a + b)}{a + c}$$

Man kann also, vermittelst des zweideutigen Zeichens, beide Formeln in eine zusammenziehen, nämlich

$$x = \frac{e \pm cf \mp (b + d)}{a \mp c}$$

wo allemal c die Geschwindigkeit des früheren Körpers, und d sein Durchmesser, a die Geschwindigkeit des spätteren, und b sein Durchmesser, f die anfängliche Zwischenzeit, und e der anfängliche Zwischenraum ist.

Exempel. Zwei Kugeln befinden sich in einem Abstande von 1000 Fuß, und fangen in verschiedenen Zeitpunkten an, einander entgegen zu gehen. Die früher ausgehende hat 6 Fuß im Halbmesser, und gehet 28 Fuß jede Sekunde. Drei Sekunden später gehet die andere aus, mit einer Geschwindigkeit von 50 Fuß für jede Sekunde, und diese hat 9 Fuß im Halbmesser.

$$1000 = e$$

$$-\ 84 = 28 \times 3 = cf$$

$$916 = e - cf$$

$$-\ 15 = 6 + 9 = b + d$$

$$901 = e - cf - (b + d)$$

$$:\ 78 = 50 + 28 = a + c$$

$$11\tfrac{43}{78}\ \text{Sek.} = \frac{e - cf - (b + d)}{a + c} = x$$

$$\times\ 50 = a$$

$$577\tfrac{22}{39}\ \text{Fuß} = ax = y$$

Also beweget sich die spätere Kugel während $11\frac{43}{78}$ Sekunden, und machet $577\frac{22}{39}$ Fuß, bevor sie die andere auf ihrem Wege antrift.

Zusatz I.

Zusatz I. Wenn der eine Gegenstand nur ein Schatten ist, so geschiehet die Berührung zweimal, nämlich beim Eintritte und beim Austritte. In diesem Falle wird die Summe beider Halbmesser positiv, und wenn man beide Berührungen in einer Formel haben will, so ist

$$x = \frac{e - cf \mp (b + d)}{a + c}$$

wo das Zeichen — für den Eintritt, und + für den Austritt ist.

Zusatz II. Wenn die Halbmesser aus der Acht gelassen, und die Gegenstände nur als Punkte betrachtet werden, so ist $b + d = 0$, und

$$x = \frac{e - cf}{a + c}$$

Gesetzt, es liegen zwei Oerter in einer Entfernung von 500 Meilen. Jemand reiset aus dem einen Orte nach dem anderen, und machet täglich 9 Meilen. 5 Tage später reiset ihm ein anderer aus dem anderen Orte entgegen, und machet täglich 7 Meilen. In welcher Zeit und Entfernung wird dieser jenem begegnen? Hier ist

$$x = \frac{500 - 45}{7 + 9} = \frac{455}{16} = 28\tfrac{7}{16}$$

$$y = ax = 28\tfrac{7}{16} \times 7 = 199\tfrac{1}{16}$$

Folglich geschiehet die Zusammenkunft $28\frac{7}{16}$ Tage nach dem Ausgange des späteren Reisenden, und nachdem dieser $199\frac{1}{16}$ Meilen gemacht hat. Der andere reiset demnach $28\frac{7}{16} + 5 = 33\frac{7}{16}$ Tage, und machet $33\frac{7}{16} \times 9 = 300\frac{15}{16}$ Meilen. Beide Wege zusammen machen 500 Meilen, welches zur Probe dienet.

Zusatz III. Wenn beide Körper zugleich ausgehen, und einander entgegen kommen, so wird die Zwischenzeit $f = 0$, und man hat

$$x = \frac{e \mp (b + d)}{a + c}$$

oder, wenn die Halbmesser aus der Acht gelassen werden,

$$x = \frac{e}{a + c}$$

Im vorigen Exempel laßt uns annehmen, daß beide Personen ihre Reise zugleich antreten, so ist

$$x = \frac{500}{7 + 9} = \frac{500}{16} = 31\tfrac{1}{4}$$

$$y = ax = 31\tfrac{1}{4} \times 7 = 218\tfrac{3}{4}$$

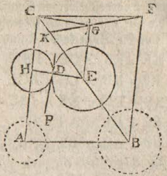
Also reiset in diesem Falle der eine $31\frac{1}{4}$ Tage, in welchem er $218\frac{3}{4}$ Meilen machet. Der andere reiset eben so lange, und machet $31\frac{1}{4} \times 9 = 281\frac{1}{4}$ Meilen. Beide Wege machen wiederum zusammen 500 Meilen.

§. 10.

Aufgabe.

Es sind gegeben die Richtungen, die Geschwindigkeiten, die Halbmesser, und die anfänglichen Lagen zweier Kugeln, deren Richtungs-Linien in einer Ebne liegen, und die zugleich anfangen, sich einförmig zu bewegen. Man soll den Punkt bestimmen, wo sie einander berühren werden, wie auch die Lage derjenigen Ebne, welche beide Kugeln in diesem Punkte berühret.

Es sei AC (folg. Fig.) die Richtungslinie der Kugel A, und ihre Geschwindigkeit sei a. Es sei BC die Richtungs-



tungslinie der Kugel B, und ihre Geschwindigkeit sei *b*. Man verlängere, wenn es nöthig ist, die Richtungs-Linien, bis daß sie einander in C begegnen. Nun sage man $a : b$ :: AC zu einer vierten Größe, mit welcher man BK gleich machet. Mit den Seiten AB und AC mache man das Parallelogramm AF. Man ziehe FK. Aus dem Mittelpunkte C, mit einem Halbmesser CG, welcher so groß ist, als die Summe der Halbmesser beider Kugeln, beschreibe man einen Zirkel oder nur einen Zirkelbogen. Wir nehmen an, daß dieser Bogen die FK oder deren Verlängerung irgendwo in G schneidet. Durch den Punkt G ziehe man eine Linie GE mit AC parallel, so wird sie die BC irgendwo in E schneiden. Durch den Punkt E ziehe man eine gerade Linie EH mit GC parallel, so wird EH die AC irgendwo in H schneiden. Die Punkte E und H werden diejenigen sein, wo sich die Mittelpunkte der Kugeln im Augenblicke der Berührung befinden. Und wenn man auf EH im Punkte D zwei Linien senkrecht stellet, deren eine DP sein mag, und deren andere man sich über der Ebne des Papiers hervorragend vorstellen kann, so bestimmen diese senkrechte Linien die Lage einer Ebne, worin beide liegen, und welche beide Kugeln in D berühret.

Der Beweis der vorgeschriebenen Konstrukzion ist sehr leicht. Denn da GE mit AC und folglich auch mit BF parallel ist, so sind die Dreiecke GKE und FKB ähnlich,

folglich ist	KE : KB :: GE : FB
oder	KE : KB :: CH : AC
also	(KB — KE) : KB :: (AC — CH) : AC
oder	BE : KB :: AH : AC
oder	BE : AH :: BK : AC
Es war aber	BK : AC :: b : a
folglich ist	BE : AH :: b : a

Da nun die Wege BE und AH sich wie die Geschwindigkeiten beider Kugeln verhalten, so folget, daß sich die Kugel B in E befinden muß, wenn sich die Kugel A in H befindet (Stat. H. II. §. 27). Da nun auch die Entfernung EH beider Mittelpunkte so groß ist, als CG oder als die Summe der beiden Halbmesser, so müssen sich zur selbigen Zeit die beiden Kugeln berühren. Ferner, wenn eine Ebne beide Kugeln zugleich berühren soll, so muß sie in D auf beide Halbmesser oder auf EH senkrecht sein. Dieses wird sie sein, so bald zwei verschiedene in ihr gezogene und durch D gehende Linien auf EH senkrecht sind.

Zusatz. Wenn es sich bei der Konstrukzion trift, daß der Bogen, welcher mit CG oder der Summe beider Halbmesser beschrieben ist, die FK oder ihre Verlängerung nicht erreichet, so wird die Aufgabe unmöglich, und beide Kugeln kommen nirgends zusammen. Wenn aber derselbige Bogen die EK oder ihre Verlängerung nur in einem Punkte erreichet, so berühren beide Kugeln einander nur einmal. Hingegen, wenn der Bogen die FK oder deren Verlängerung an zwei Orten schneidet, so hat die Aufgabe zwei Auflösungen, vorausgesetzet, daß der eine Gegenstand nur ein Schatten ist, der seinen Eintritt und Austritt an der Kugel oder Scheibe des anderen Gegenstandes hat. In diesem Falle müssen gedachter Bogen und FK genugsam verlängert werden, auf daß sie sich jenseit der BC noch einmal schneiden, und dann wird die Konstrukzion auf eine ähnliche Art nochmals verrichtet, um den anderen Berührungspunkt zu finden.

§. 11.

Wenn man bei der relativen Bewegung zweier Körper sich in dem einen einen Zuschauer gedenket, wie schon oben erinnert worden, so heißt sie die scheinbare Bewegung; und dann haben wir dabei noch folgendes zu betrachten. Die eingebildete Linie, welche beide Körper verbindet (§. 3), kann man so annehmen, als wenn sie aus dem Auge des Zuschauers mitten durch den anderen Gegenstand ginge. Da aber der Zuschauer an einem Endpunkte derselben ist, so kann er nicht geradezu ihre Länge beurtheilen, eben so wenig, als man die Länge eines Fadens oder Stabes beurtheilen kann, wenn das eine Ende ganz nahe vor dem Auge ist. Man kann also nicht geradezu wissen, ob diese Linie länger oder kürzer wird, und ob sich folglich der Gegenstand entfernet oder nähert. Indessen hat diese eingebildete Linie doch immer ihren Nutzen, und wir wollen sie die **Gesichts-Linie** nennen.

Man bemerket aber, daß jeder Gegenstand an Größe abzunehmen oder zuzunehmen scheinet, je nachdem er sich entfernet oder nähert. Um dieses scheinbare Abnehmen und Zunehmen zu bestimmen, ziehet man in Gedanken zwei gerade Linien aus dem Auge, nach zwei entgegengesetzten Stellen, im Rande oder Saume des Gegenstandes, und den Winkel, den sie beim Auge machen, nennet man den **Gesichts-Winkel**, oder die **Winkel-Größe**, oder die **scheinbare Größe**, oder den **scheinbaren Durchmesser** des Gegenstandes. Wenn dieser Winkel abnimmt oder zunimmt, so erkennet man, daß der Gegenstand sich entfernet oder nähert; bleibt er aber unverändert, so urtheilet man, daß der Gegenstand, in Betrachtung des Zuschauers, in relativer Ruhe ist. Dabei muß man aber annehmen, daß der Gegenstand selbst seine Größe nicht verändert, sich auch nicht so drehet, daß er in derselbigen Entfernung einen größeren oder kleineren Theil seiner Oberfläche dem Auge zukehre.

§. 12.

Was die Veränderung der Gesichts-Linie, in Betreff ihrer Lage, angehet, so wird diese durch den Winkel beurtheilet, den sie beschreibet, indem sie sich um dasjenige Ende herumdrehet, welches im Auge ist. Ein solcher Winkel wird, wie jeder andere, durch Grade, Minuten, u. s. f. gemessen. Die Anzahl von Graden, welche die Gesichts-Linie in der Einheit der Zeit, z. E. in einer Sekunde, durchläuft, kann man die **Winkel-Geschwindigkeit** nennen, oder auch die **scheinbare Geschwindigkeit**. Der ganze, in einer gegebenen Zeit beschriebene Winkel, wird alsdann der **Winkelweg** sein, und die Veränderung der Lage der Gesichts-Linie kann überhaupt die **Winkel-Bewegung** genannt werden. Diese ist einförmig, oder beschleuniget, oder verspätet, je nachdem die Winkel-Geschwindigkeit einerlei bleibet, oder zunimmt, oder abnimmt.

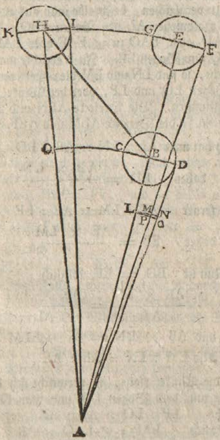
Anmerkung. Um alle diese Größen, welche bloß vom Scheine abhängen, von den wirklichen zu unterscheiden, so wollen wir, wo es nöthig sein wird, bei diesen das Wort wirklich oder wahr hinzusetzen, und z. E. sagen, der **wirkliche** oder **wahre Durchmesser**, die **wirkliche Geschwindigkeit**, u. s. f. Oder es sollen allemal die wirklichen Größen verstanden werden, wenn das Gegentheil nicht ausdrücklich angezeiget ist.

§. 13.

§. 13.

Lehrsatz.

Wenn eine Kugel, die sich weit vom Auge beweget, sich entfernet oder nähert, so nimmt der scheinbare Durchmesser derselben beinahe im umgekehrten Verhältnisse der Entfernungen zu oder ab.



Es sei die Kugel in B (vor. Fig.), und der Zuschauer in A, so siehet dieser den Halbmesser der Kugel unter dem Winkel BAD. Die Kugel gehe nun in derselbigen geraden Linie AB weiter nach E, so wird der Halbmesser unter dem Winkel EAF gesehen, und so vielmal dieser Winkel kleiner ist als der Winkel BAD, so vielmal scheinet die Kugel kleiner geworden zu sein. Um beide Winkel desto bequemer zu vergleichen, beschreibe man aus A mit einem beliebigen Halbmesser AL den Bogen LPO, so verhält sich $\angle$ BAD oder LAO zu $\angle$ EAF oder LAP wie der Bogen LO zum Bogen LP. In L errichte man LN auf AL senkrecht, so sind LN und LM die respektiven Tangenten der Bögen LO und LP, oder der Winkel, die diese Bögen bestimmen. Die Dreiecke ALN und ABD sind ähnlich, eben so die Dreiecke ALM und AEF.

Folglich hat man $AL : LN :: AB : BD$

daher $$BD = \frac{AB \times LN}{AL}$$

ferner $AL : LM :: AE : EF$

daher $$EF = \frac{AE \times LM}{AL}.$$

Nun ist $BD = EF$, folglich

$$\frac{AB \times LN}{AL} = \frac{AE \times LM}{AL}$$

und $AB \times LN = AE \times LM$

Also $LM : LN :: AB : AE$

Sind die Winkel klein, so vermischt sich die gerade LN beinahe mit dem Bogen LO und man kann sagen, daß beinahe $LP : LO :: AB : AE$

folglich $\angle LAP : \angle LAO :: AB : AE$

oder $\angle EAF : \angle BAD :: AB : AE$

das

das heißt, der Winkel, den die Kugel im Auge machet wenn sie entfernter ist, verhält sich zum Winkel, den sie machet, wenn sie näher ist, wie der nähere Abstand zum weiteren, oder die gedachten Winkel verhalten sich umgekehrt wie die Abstände. Diese Winkel aber machen die scheinbaren Halbmesser der Kugel. Also verhalten sich die scheinbaren Halbmesser umgekehrt wie die Entfernungen. Ist demnach die Kugel in einer gewissen Zeit von B bis E gegangen, so hat unterdessen der scheinbare Halbmesser eben so vielmal abgenommen als sie weiter gekommen ist. Das nämliche gilt von dem scheinbaren Durchmesser, welcher der doppelte Halbmesser ist.

Zusatz I. Wir haben im Beweise angenommen, daß die Kugel während ihrer Bewegung in derselbigen, der Lage nach unveränderten, Gesichtslinie bleibet. Das nämliche Verhältniß gilt aber nicht minder, wenn sich die Gesichtslinie zugleich beweget. Man nehme an, die Kugel habe die Linie BH durchgelaufen, so daß AH = AE. Da nun auch HI = FE, und da bei H und E rechte Winkel vorausgesetzt werden, so sind die Dreiecke AHI und AEF ähnlichgleich, und $\angle$ HAI = $\angle$ EAF.

Also ist auch

$\angle$ HAI : $\angle$ BAD :: AB : AH.

In diesem Falle, wenn man aus A durch B den Bogen BQ ziehet, hat sich der Körper um QH = BE vom Auge entfernet. Der Winkelweg oder der Winkel BAH kömmt hier nicht in Betrachtung.

Zusatz II. Wenn also der scheinbare Diameter oder Winkel-Diameter abnimmt oder zunimmt, so muß man schließen, daß sich der Gegenstand entfernt oder nähert. Nimmt der Winkel-Diameter einförmig oder immer in gleichen Zeiten um gleiche Theile ab oder zu, so geschiehet auch die Entfernung oder Annäherung auf eine einförmige Art. Ist gedachtes Ab- und Zunehmen nicht einförmig, so ist auch die wirkliche Bewegung nicht einförmig. Nimmt der scheinbare Durchmesser wechselsweise ab und zu, so muß man daraus schließen, daß sich der Gegenstand bald nähert, bald entfernet. Ist der Zuschauer bei A unbeweglich, und siehet er, daß die Gesichtslinie ihre Lage nicht verändert, unterdessen daß der scheinbare Diameter sich verändert, so muß er schließen, daß die Bewegung in der Gesichtslinie selbst geschiehet. Beweget sich dabei die Gesichtslinie, so beweget sich der Körper in einer Richtung, wie BH, die nicht in der ersten Gesichtslinie lieget. Bleibet die Gesichtslinie und auch der scheinbare Diameter unverändert, so ist der Körper in absoluter oder wenigstens relativer Ruhe. Bleibet die scheinbare Größe unverändert, unterdessen daß die Gesichtslinie einen Winkel beschreibet, so gehet der Körper in einem Zirkel um den Zuschauer herum, indem seine Entfernung sich nicht verändert.

Zusatz III. Wir haben stillschweigend vorausgesetzet, daß der Zuschauer in A ruhet. Es ist aber der Lehrsatz nicht minder anwendbar, wenn man annimmt, daß er sich auch beweget, oder gar, daß er sich allein beweget, und die Kugel ruhet. Alsdann ist unter BE die relative Veränderung der Entfernung zu verstehen, und unter BAH der Winkel, den die Gesichtslinie im bewegten Auge beschrieben hat.

Zusatz IV. Wir haben bloß von einer Kugel gesprochen; man kann aber an deren Stelle auch jeden andern Körper setzen, nur muß man alsdann annehmen, daß der Gegenstand dem Auge immer denselbigen Theil seiner Oberfläche zukehret.

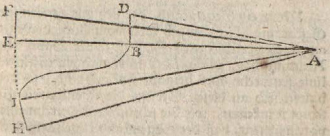
Zusatz V. Bei dem Beweise wurde angenommen, daß der Zuschauer immer die halbe Oberfläche der Kugel siehet. Dies ist aber nie vollkommen wahr. Je näher die Kugel dem Auge kömmt, desto weniger wird von ihrer Oberfläche gesehen; und so ist es auch mit anderen Körpern

pern beschaffen. Indessen kann man bei ziemlich großen Entfernungen das angenommene für beinahe wahr halten.

§. 14.

Lehrsatz.

Wenn die wirkliche Bahn eines Körpers, der sich mit einförmiger Geschwindigkeit ziemlich weit vom Auge beweget, an zwei verschiedenen Stellen auf der Gesichtslinie senkrecht oder beinahe senkrecht ist, so verhalten sich an diesen Stellen die Winkelgeschwindigkeiten ohngefähr umgekehret wie die Entfernungen.



Gesetzt, ein Gegenstand bewege sich mit ganz einförmiger Geschwindigkeit in der krummen Linie HIBD, und es treffe sich, daß sein Weg in DB und in IH auf der Gesichtslinie AB und AH senkrecht oder beinahe senkrecht sei. Er gehe in einer Sekunde von H nach I und einige Zeit nachher auch in einer Sekunde von B nach D, so ist wegen der einförmigen Geschwindigkeit HI = BD. Man verlängere AB und mache AE = AH, oder aus dem Mittelpunkte A, mit dem Halbmesser AH beschreibe man einen Bogen HE, so wird ebenfalls AE = AH. Man stelle

stelle in E auf AE eine senkrechte Linie und nehme darauf FF = HI = DB. Man ziehe AF, so sind die Dreiecke HAI, EAF ähnlichgleich. Nun beweiset man ganz genau, wie vorher bei den Halbmessern der Kugeln (§. 13) daß beinahe

$$\angle \text{EAF} : \angle \text{BAD} :: \text{AB} : \text{AE}$$

Folglich ist beinahe

$$\angle \text{HAI} : \angle \text{BAD} :: \text{AB} ; \text{AH}$$

das heißt, die scheinbaren Geschwindigkeiten oder Winkelgeschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Abstände des Körpers vom Zuschauer.

§. 15.

Lehrsatz.

Wenn ein Gegenstand, der sich mit einförmiger Geschwindigkeit ziemlich weit vom Auge beweget, an zwei verschiedenen Stellen seiner Bahn eine Richtung hat, die auf der jedesmaligen Gesichtslinie senkrecht oder beinahe senkrecht ist, so verhalten sich an diesen Stellen die scheinbaren Geschwindigkeiten, wie die scheinbaren Durchmesser, vorausgesezt, daß der Gegenstand kugelförmig ist, oder daß er dem Auge immer den nämlichen Theil seiner Oberfläche zukehret.

Denn in diesem Falle verhalten sich die scheinbaren Geschwindigkeiten umgekehret, wie die Entfernungen (§. 14). Eben so verhalten sich auch die scheinbaren Durchmesser (§. 13). Also verhalten sich die scheinbaren Geschwindigkeiten wie die scheinbaren Durchmesser.

§. 16.

Was von einem und demselben Gegenstande gesagt worden, der sich in verschiedenen Zeiten an verschiedenen

Stellen

Stellen befindet, gilt auch von gleichen Körpern, die sich zur nämlichen Zeit, oder in verschiedenen Zeiten in verschiedenen Stellen befinden. Also

I) Wenn zwei gleiche Gegenstände sich in verschiedenen Entfernungen vom Zuschauer befinden, so verhalten sich ihre scheinbaren Durchmesser umgekehret wie ihre Entfernungen vom Zuschauer, vorausgesezt, daß die Entfernungen beträchtlich sind, und daß die Gegenstände entweder kugelförmig, oder gegen dem Zuschauer auf eine ähnliche Art gestellet sind.

II) Wenn sich zwei gleiche Gegenstände mit gleicher Geschwindigkeit in solchen Richtungen bewegen, die gegen die Gesichtslinie senkrecht sind, so verhalten sich die scheinbaren Geschwindigkeiten auch umgekehret wie die Entfernungen.

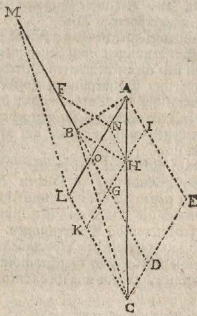
III). Bei den nämlichen Voraussezungen verhalten sich die scheinbaren Geschwindigkeiten beider Gegenstände, gerade wie ihre Entfernungen.

§. 17.

Aufgabe.

Ein Gegenstand A gehet mit einförmiger Geschwindigkeit von A nach L, und zugleich gehet der Zuschauer B auch mit einförmiger Geschwindigkeit in derselbigen Ebne von B nach M. Man soll die scheinbare Bewegung des Gegenstandes A in Rücksicht auf den Zuschauer B bestimmen. (folg. Fig.)

Der Gegenstand A gehet in der Richtung und mit der Geschwindigkeit AL, hingegen der Zuschauer B in der Richtung und mit der Geschwindigkeit BM. Gesezt, der Zuschauer sei in B und der Gegenstand in A, so siehet jener diesen in der Richtung und in der Entfernung AB.



Der Zuschauer sei bis in F gekommen. Man sage BM : AL :: BF : AN, so bekömmt man den Ort N, wo jetzt der Gegenstand ist. Aus F wird also A in der Richtung und in der Entfernung FN gesehen. Der Zuschauer sei schon in M, so siehet er den Gegenstand in L in der Richtung und Entfernung ML. Und so läßt sich die scheinbare Lage und Entfernung des Gegenstandes für jeden Standpunkt des Zuschauers in seinem Wege angeben. Die Entfernungen AB, FN, ML, u. s. f. kann der Zuschauer nicht anders als durch den scheinbaren Durchmesser des Gegenstandes beurtheilen. Nun stelle man sich vor, der Zuschauer wäre ruhig in B geblieben, die Linie AL aber, in welcher der Gegenstand gehet, hätte sich, mit sich selbst parallel, in der Richtung OD, OD, welche der Richtung des Zuschauers gerade entgegengesetzt ist, und mit einer Geschwindigkeit OD = BM einförmig beweget, so behaupte ich, die Erscheinungen würden genau die nämlichen gewesen sein, wie im gegebenen Falle.

Denn wenn man den neuen Fall annimmt, so ist der Körper im nämlichen Zustande, als wenn er durch zwei Kräfte in den Richtungen und mit den einförmigen Geschwindigkeiten AL und AE (= LC = OD) zugleich getrieben würde: folglich beschreibet er mit einförmiger Geschwindigkeit die Diagonal linie AC des Parallelogramms EL (Statik. Hauptst. III, §. 9). Z. B. wenn die Linie AL in die Lage IK gekommen ist und den Raum OC durchlaufen hat, so befindet sich der Gegenstand im Punkte H, wo IK von der Diagonal-Linie AC geschnitten wird.

Der Zuschauer ruhe also in B, und der Gegenstand sei noch in A, so wird dieser, wie im ersten Falle, ebenfalls in der Richtung und Entfernung BA gesehen. Der Zuschauer ruhe noch in B und der Gegenstand sei in H, indem die Linie AL um OG = BF zurückgegangen ist, so siehet der Zuschauer den Gegenstand in der Richtung und Entfernung BH. Nun ist AN mit IH gleich und parallel, indem beide den Weg vorstellen, welchen der Gegenstand A in der Linie AL oder IK gemacht hat, unterdessen daß diese Linie *selbst* aus der Lage AL in die Lage IK gekommen ist. Folglich sind auch die Linien NH und AI gleich und parallel, indem sie die Enden der beiden vorigen verbinden. Folglich ist HN auch mit GO gleich und parallel, folglich auch mit BF, weil BF = OG. Da nun HN und BF gleich und parallel sind, so sind auch FN und BH gleich und parallel, weil diese die Enden der beiden vorigen verbinden. Daher siehet der ruhende Zuschauer aus B den Gegenstand in H in derselbigen Entfernung und Richtung, als der bewegte Zuschauer in F den Gegenstand in N siehet.

Es

Es sei endlich, immer in der neuen Voraussetzung, der Gegenstand bis in C gekommen, und der Zuschauer sei immer in B, so siehet dieser jenen in der Richtung und Entfernung BC. Nun ist LC mit DM parallel, und mit BM gleich, also ist LC mit BM gleich und parallel. Folglich ist auch BC mit ML gleich und parallel, weil diese Linie die Enden jener verbinden. Also siehet der ruhende Zuschauer aus B den Gegenstand in C, in derselbigen Entfernung und Richtung, als der bewegte Zuschauer in M den Gegenstand in L siehet.

Da nun derselbige Beweis auf alle Augenblicke der Bewegung anwendbar ist, so folget diese allgemeine Regel: **Wenn der Gegenstand und der Zuschauer sich beide einförmig in geraden Linien und in einer Ebne bewegen, so sind die Erscheinungen völlig die nämlichen als wenn der Zuschauer ruhete, und wenn zugleich die Bahn des Gegenstandes sich, mit sich selbst parallel bewegte, in einer Richtung die der wirklichen Richtung des Zuschauers entgegengesetzt wäre, und mit der wirklichen Geschwindigkeit des Zuschauers.** Da nun der Fall, wo der Zuschauer ruhet, am leichtesten zu begreifen und zu konstruiren ist, so ist es allemal bequemer, jenen Fall in diesen zu verwandeln.

Anmerkung. Die Bahn des Körpers, so wie sie sein würde, wenn der Zuschauer ruhete, wollen wir die scheinbare Bahn nennen.

Zusatz I. Es ist demnach dem Zuschauer unmöglich, aus den bloßen Erscheinungen des Gegenstandes zu urtheilen, ob er selbst die BM und der Gegenstand die AL durchläuft, oder ob er selbst ruhet, und der Gegenstand die AC durchläuft. Also, wenn der Zuschauer z. E. von B nach M schiffet, ein anderes Schiff aber zugleich von A nach L gehet, so kann er nicht wissen, ob er selbst nicht vielleicht in B ruhet, und das andere Schiff von A nach C

gehet.

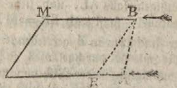
gehet. Diese Ungewißheit kann nicht anders als durch die Betrachtung anderer Umstände gehoben werden.

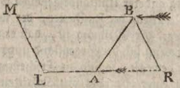
Zusatz II. Wenn der Zuschauer, der sich einförmig in BM beweget, der Meinung ist, daß er sich noch in B befinde, und wenn sich der Gegenstand unterdessen in AL auch einförmig beweget, so sind die Erscheinungen allemal so wie sie aus einer ebenfalls einförmigen Bewegung längs AC entstehen würden. Denn die Bewegung längs AC ist einförmig, weil sie aus zwei einförmigen zusammengesetzt ist.

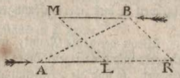
Zusatz III. Wenn der ganze Raum, worin sich die Bahn des Zuschauers und des Gegenstandes befindet, auch seinen Ort verändert, so sind die Erscheinungen doch immer die nämlichen. Zum Exempel, wenn wir uns wiederum einen Zuschauer gedenken, der von B nach M seegelt, und ein anderes Schiff, welches von A nach L gehet, so bleiben die Erscheinungen einerlei, es mag sich die Erdkugel drehen, oder sie mag ruhen. Denn nichts hindert die Linien, die wir zum Beweise gezogen haben, sowohl auf einer ruhenden als auf einer bewegten Ebne zu ziehen.

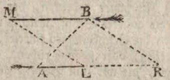
Zusatz IV. Wenn beide Bahnen parallel sind, so ist die Konstrukzion weit einfacher.

Es sei allemal BM die Bahn und Geschwindigkeit des Zuschauers, AL aber des Gegenstandes. In der ersten Figur gehen beide nach einerlei Gegend, und der Gegenstand geschwinder als der Zuschauer. In der zweiten Fi-









gur auch nach einerlei Gegend, aber der Gegenstand langsamer. In der dritten nach entgegengesetzten Gegenden, und der Gegenstand geschwinder. In der vierten nach entgegengesetzten Gegenden, und der Gegenstand langsamer.

In allen vier Fällen siehet der Zuschauer anfänglich den Gegenstand in der Richtung und Entfernung BA, zuletzt aber in der Richtung und Entfernung ML. Man verlängere nöthigen Falls AL, und ziehe bis an dieselbe BR mit ML parallel, so ist auch BR = ML.

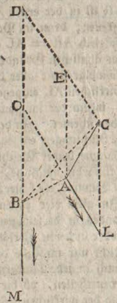
Wäre der Zuschauer in B geblieben, und hätte der Gegenstand die Linie AR durchgelaufen, so hätte jener diesen ebenfalls anfänglich in der Richtung und Entfernung BA, zuletzt aber in der Richtung und Entfernung BR, welche mit der Richtung und Entfernung ML einerlei ist, gesehen.

gesehen. Folglich sind die Erscheinungen in beiden Fällen die nämlichen. AR ist in der ersten Figur die Differenz beider Geschwindigkeiten; denn im Parallelogramm MR ist RL = MB, folglich AR = AL — BM. In der zweiten Figur ist aus ähnlichen Gründen AR auch die Differenz beider Geschwindigkeiten: aber die scheinbare Richtung AR ist der wirklichen AL entgegengesetzet, welches auch natürlich ist, indem der langsamer gehende Gegenstand zurück zu bleiben scheinet. In der dritten und vierten Figur, wo die Richtungen entgegengesetzet sind, ist AR allemal die Summe beider Geschwindigkeiten, und die scheinbare Richtung die nämliche, als die wirkliche. Es ist deswegen die Summe, weil hier AR = AL + LR = AL + BM. In allen vier Fällen ist der scheinbare Weg des Gegenstandes in derselbigen geraden Linie AL als der wirkliche, oder in deren Verlängerung.

Zusatz V. Nicht nur im Falle der parallelen Richtungen, sondern auch in jedem andern ist aus der Konstrukzion leicht zu beurtheilen, ob die scheinbare Bewegung in der Richtung der wirklichen geschiehet, oder umgekehret. Es kömmt darauf an, nach welcher Seite sich die Gesichtslinie hinwendet. Um dieses zu beurtheilen, ist es am besten, daß man den gegebenen Fall auf dem reduzire, wo der Zuschauer ruhet. Z. E. in der Figur beim Anfange dieses Paragraphs (pag. 30) drehet sich die Gesichtslinie allmählig von BA nach BC, und durchschneidet nach und nach die wirkliche Bahn AL in der Richtung AO, welche mit der Richtung des Gegenstandes einerlei ist.

Hingegen in dieser neuen Figur wird angenommen, der Zuschauer durchlaufe BM (folgende Figur) und der Gegenstand AL. Man setze den Fall, daß der Zuschauer in B bleibe, und daß AL sich nach EC hinbewege, so daß CL = AE = OD = BM; so ist AC die scheinbare Bahn des Gegenstandes. Die Gesichtslinie drehet sich

 also



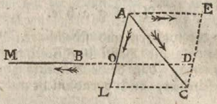
also von BA nach BC, und durchschneidet die verlängerte AL in der verkehrten Richtung AO. Also ist hier die scheinbare Richtung der wahren entgegengesetzt.

§. 18.

Aufgabe.

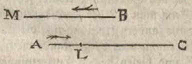
Aus der bekannten wahren Bahn des Zuschauers und der bekannten scheinbaren Bahn des Gegenstandes, die wahre Bahn des letzteren finden: vorausgesetzt daß beide Bewegungen in einer Ebne geschehen, auch einförmig und geradlinicht sind.

Es



Es sei BM die wirkliche Bahn des Zuschauers, und AC die scheinbare des Gegenstandes. Durch das Ende C derselben ziehe man CL mit BM parallel, und mache CL = BM. Man ziehe nun AL, so ist diese AL die wirkliche Bahn des Gegenstandes. Denn man nehme an, der Zuschauer bleibe in B, die Linie AL aber gehe längs OD = BM, mit sich selbst parallel zurück, so beschreibet sie das Parallelogramm EL, dessen Diagonallinie AC in der That die scheinbare Bahn ist, wie oben (§. 17) bewiesen worden.

Zusatz. Sind beide Bahnen parallel, so fallen die Linien AC und CL aufeinander.



Zum Exempel die Bahn des Zuschauers sei BM, und die scheinbare des Gegenstandes sei AC, mit BM parallel, so nehme man CL = BM, in der Richtung der BM. Dann ist AL die wirkliche Bahn des Gegenstandes. Dieses erhellet aus dem 4ten Zusatze des 17ten Paragraphs.

§. 19.

Aufgabe.

Aus der wahren und scheinbaren Bahne des Gegenstandes die Bahn des Zuschauers finden; angenommen, daß beide Bewegungen in einer Ebne geschehen, auch geradlinicht und einförmig sind.

Es sei in der vorletzten Figur gegeben, die wahre Bahn AL und die scheinbare AC. Man verbinde C und L. Man wähle nach Belieben einen Punkt B, und ziehe durch denselben eine Linie mit CL parallel, man nehme auf dieser in der Richtung von C nach L die BM = CL, so ist BM allemal die Bahn eines Zuschauers, der, wenn er sich in B unbeweglich glaubet, den Gegenstand der die AL durchläuft, so siehet, als wenn dieser sich längs der AC bewegte. Dieses wird wie bei voriger Aufgabe bewiesen.

Zusatz I. Da der Punkt B willkührlich ist, so sind unendlich viel Bahnen möglich, aus welchen der Zuschauer den bewegten Gegenstand auf einerlei Art siehet; nur muß man annehmen, daß jede solche Bahn mit CL parallel und gleich ist.

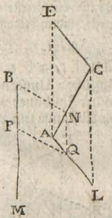
Zusatz II. Jedoch ist klar (§. 13), daß der entferntere Zuschauer den Gegenstand kleiner sehen wird, als der nähere. Wenn man aus der scheinbaren Größe des Körpers, oder aus andern Umständen, die anfängliche und endliche Entfernung vom Gegenstande weiß, so darf man nur mit AC und diesen beiden Entfernungen ein Dreieck machen, dessen Spitze in B fallen, und sowohl den Punkt B als auch die ganze Bahn BM bestimmen wird.

Anmerkung. Die drei folgenden Aufgaben beziehen sich auf eine verlangte Lage oder Entfernung des Gegenstandes oder des Zuschauers. Sie können aber auch bei der bloßen relativen Bewegung gebrauchet werden, ohne daß man sich einen Zuschauer dabei denke, als welcher nur um der Deutlichkeit willen angenommen wird. Alsdann lassen sie sich folgender Weise ausdrücken. Die Stellen finden, 1) wo die beiden bewegten Körper am nächsten sind, 2) wo sie in einem gegebenen Abstande sind, 3) wo die gerade Linie, welche sie verbindet, auf eine der beiden Bahnen senkrecht ist.

§. 20.

Aufgabe.

Es soll die Stelle gefunden werden, wo der Zuschauer dem Gegenstande am nächsten ist, vorausgesetzt, daß beide Bewegungen einförmig und geradlinicht sind und in derselben Ebne geschehen.



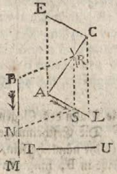
Es sei AL die Bahn des Gegenstandes A, und BM des Zuschauers. Die Erscheinungen und Umstände der Bewegung werden die nämliche sein, wenn man annimmt, der Zuschauer bleibe in B, hingegen die Linie AL gehe bis in in EC zurück, so daß AE mit BM gleich und parallel sei (§. 17), in welchem Falle der Gegenstand A die Diagonal-Linie AC durchlaufen würde. In diesem Falle erhält man den Punkt N, wo der Gegenstand dem Zuschauer B am nächsten ist, indem man BN auf AC senkrecht fället. Man ziehe NQ mit BM, ferner QP mit NB parallel, so hat man den Punkt Q, wo der Gegenstand wirklich war, da er in N zu sein schien, und den Punkt P, wo der Zuschauer zu gleicher Zeit war.

Denn wenn der Zuschauer in P, der Gegenstand aber in Q ist, so darf man sich nur vorstellen, der Zuschauer bleibe in B, die Linie AQ aber gehe um QN = PB zurück, so scheinet Q in N zu sein, wenn sich der Zuschauer in B unbeweglich glaubet. Folglich auch umgekehret, wenn der Zuschauer aus B den Gegenstand in N zu sehen glaubet, so ist jener in P und dieser in Q, und da die scheinbare Entfernung BN die kürzeste ist, so ist auch die wirkliche PQ die kürzeste, indem beide allemal gleich sind.

§. 21.

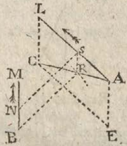
Aufgabe.

Unter den nämlichen Umständen als vorher, wird gefraget, wo der Zuschauer vom Gegenstande in einem gegebenen Abstande sein wird?



Es sei verlanget der Abstand TU, und das übrige wie vorher. Aus B mit einem Halbmesser BR = TU beschreibe einen Zirkel, der die Linie AC der scheinbaren Bewegung irgendwo in R schneiden mag. Ziehe RS mit BM, und NS mit BR parallel, so findet die verlangte Entfernung statt, wenn der Zuschauer in N und der Gegenstand in S ist. Und dieses aus den nämlichen Gründen, wie bei der vorhergehenden Aufgabe.

Zusatz. Da man sich anstatt des Zuschauers und des Gegenstandes zwei beliebige Körper gedenken kann (§. 19 Anmerk.), so können es auch zwei Kugeln sein, und also haben wir ein neues Mittel (§. 10) um zu bestimmen, ob und wo zwei Kugeln, die in einer Ebne laufen, einander begegnen werden.



Es mögen die Kugeln gehen mit den Richtungen und Geschwindigkeiten BM und AL. Man nehme an, es bleibe die eine in B, hingegen bewege sich AL rückwärts bis EC, so ist die relative Bewegung in Betracht des Punktes B die nämliche, als wenn die Kugel A längs AC liefe. Nun nimm einen Halbmesser BR, der Summe beider Halbmesser der Kugeln gleich, und beschreibe einen

 Zirkel.

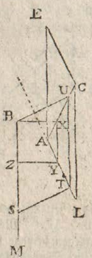
Zirkel. Gesetzt dieser schneide die AC oder deren Verlängerung in R, so mache man, wie bei der Aufgabe das Parallelogramm BRSN. Dann sind S und N die Stellen, wo sich die Mittelpunkte der Kugeln im Augenblicke der Berührung befinden.

Hieraus lassen sich wiederum die nämlichen Folgerungen ziehen, wie bei §. 10, daß nämlich die Berührung zweimal geschehen kann, oder einmal, oder gar nicht.

§. 22.

Aufgabe.

Unter den nämlichen Umständen wie vorher, will man wissen, wo die gerade Linie, die den Zuschauer mit dem Gegenstande verbindet, auf eine der Bahnen senkrecht wird.



Soll die Gesichtslinie auf der Bahn des Zuschauers senkrecht sein, so errichte BX, senkrecht auf BM. Ziehe XY

XY mit BM, und YZ mit BX parallel. Dann sind Z und Y die verlangten Stellen. Soll die Gesichtslinie auf der Bahn des Gegenstandes senkrecht sein, so ziehe man BU auf AL oder deren Verlängerung senkrecht, hernach UT mit BM und TS mit BU parallel, so sind T und S die verlangten Stellen.

Die Auflösung beruhet immer auf den nämlichen Gründen.

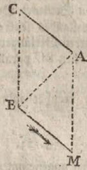
§. 23.

Wir haben bisher angenommen, daß beide Bewegungen einförmig sind; die Auflösungen sind aber die nämlichen, wenn beide Bewegungen einförmig beschleuniget, oder überhaupt auf die nämliche Art veränderlich sind. Denn alles beruhet hier auf die Zusammensetzung zweier Bewegungen. Aus solcher Zusammensetzung entstehet aber allemal eine dritte, die durch die Diagonal-Linie vorgestellet wird, wenn nur die Geschwindigkeiten beiderseits nach einerlei Verhältniß ab- oder zunehmen. (Statik, H. III. §. 9, Zusatz II).

§. 24.

Wir haben nun die Fälle betrachtet, wo sowohl der Gegenstand als auch der Zuschauer in Bewegung sind. Nun bleibet noch derjenige, wo der Gegenstand ruhet, der Zuschauer aber allein in Bewegung ist. Ueberhaupt darf man sich in diesem Falle nur vorstellen, der Zuschauer bleibe in Ruhe, der Gegenstand aber bewege sich in entgegengesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit des Zuschauers, und mit der Bahn des Zuschauers parallel, so hat man den scheinbaren Weg des Gegenstandes.

Der Zuschauer gehe von B nach M, der Gegenstand aber ruhe in A, so siehet man ihn anfänglich in der Richtung und Entfernung BA, zuletzt aber in der Richtung und



und Entfernung MA. Glaubet aber der Zuschauer in B geblieben zu sein, so glaubet er zuletzt den Gegenstand am Ende der Linie BC zu sehen, welche mit MA gleich und parallel ist. Also muß er sich vorstellen, der Gegenstand habe die Linie AC durchlaufen, welche mit BM gleich und parallel ist.

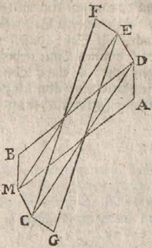
§. 25.

Lehrsatz.

Wenn der Zuschauer in einer Ebne eine gebrochene Linie oder den Umfang eines Vielecks beschreibet, und der Gegenstand in derselbigen Ebne ruhet, so scheinet dieser die nämliche gebrochene Linie oder das nämliche Vieleck in derselbigen Ebne, aber in entgegengesetzter Richtung zu beschreiben.

Gesetzt, der Zuschauer durchlaufe die gebrochene Linie BMCG, der Gegenstand aber ruhe in A. Während daß der Zuschauer die BM durchlaufet, scheinet der Gegenstand, vermöge des vorigen Paragraphs, die AD mit BM gleich und parallel zu durchlaufen. Eben so wird DE mit MC, ferner EF mit CG, u. s. w. gleich und parallel.

Nun

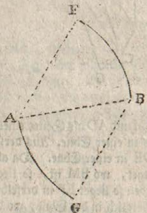


Nun liegen BM und AD als Seiten eines und desselbigen Parallelogramms in einer Ebne. Aus derselbigen Ursache liegen MC und DE in einer Ebne. Da aber MC in derselbigen Ebne lieget, wo BM ist, so lieget auch DE in dieser Ebne. Eben so lieget EF in derselbigen Ebne, wo CG lieget, und folglich in der Ebne, wo die ganze Bahn BMCG ist. In der nämlichen Ebne lieget denmach auch die scheinbare Bahn ADEF.

Ferner ist BM = AD, MC = DE, CG = EF (§. 24). Wenn zwei Parallel-Linien wie BM und AD von zwei andern MC und DE geschnitten werden, so ist leicht zu beweisen, daß BM mit MC und AD mit DE gleiche Winkel machen. Eben so sind auch die Winkel MCG und DEF gleich. Da also die Theile der gebrochenen Linien BMCG und ADEF und auch die Winkel, jeder mit jedem gleich sind, so sind beide Linien ähnlichgleich.

Zusatz.

Zusatz. Und da eine jede krumme Linie als eine gebrochene Linie von unendlich viel Seiten betrachtet werden kann, so gilt auch dieser Satz: daß, wenn der Zuschauer in einer krummen Linie gehet, die mit dem ruhenden Gegenstande in einer Ebne lieget, alsdann der Gegenstand eine ähnlichgleiche krumme Linie in entgegengesetzter Richtung zu beschreiben scheinet.



Wenn also der Zuschauer den Zirkelbogen BG um den Mittelpunkt A durchläufet, und wenn er glaubet, er sei immer noch in B, so kömmt ihm vor, als wenn ein Gegenstand in A den gleichen Bogen AF um ihn herum beschriebe. Ich sage um ihn herum. Denn da er in seiner wirklichen Bahn BG allemal in gleicher Entfernung BA = GA vom Mittelpunkte ist, so muß auch bei der scheinbaren Bewegung der gleiche Abstand BA = BF statt finden. Also dünkt sich der Zuschauer im Mittelpunkte des scheinbaren Bogens. Und

Und beschreibet der Zuschauer einen ganzen Zirkel, so muß der Gegenstand um ihn herum einen ganzen Zirkel zu beschreiben scheinen.

Dieses ist der Fall mit der Erde, welche jährlich in der Ekliptik um die Sonne herum beinahe einen Kreis der Ordnung der Zeichen zuwider beschreibet. Von der Erde gesehen scheinet also die Sonne jährlich in der Ekliptik einen Kreis nach der wahren Ordnung der Zeichen zu beschreiben.

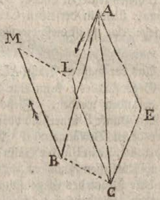
§. 26.

Bisher haben wir angenommen, daß die Bahnen des Zuschauers und des betrachteten Gegenstandes in einer Ebne liegen. Laßt uns noch die Fälle betrachten, wo gedachte Bahren in verschiedenen Ebnen liegen.

§. 27.

Aufgabe.

Ein Gegenstand und ein Zuschauer bewegen sich einförmig in geraden Linien, die nicht in einer Ebne liegen. Es soll die scheinbare Bahn des Gegenstandes bestimmet werden.



Es gehe der Zuschauer von B nach M, der Gegenstand aber zu gleicher Zeit von A nach L, jedoch so, daß BM und AL nicht in einer Ebne liegen.

Man verändere den Fall, wie schon oft vorgeschrieben worden. Nämlich man stelle sich vor, es bleibe der Zuschauer in B unbeweglich, die Linie AL aber bewege sich mit sich selbst und mit BM parallel, mit der Geschwindigkeit BM=LC=AE, aber in entgegengesetzter Richtung, so beschreibet sie das Parallelogramm EL, und der Gegenstand die Diagonal-Linie AC; diese ist nun der scheinbare Weg des Gegenstandes. Denn in beiden Fällen, es bewege sich der Zuschauer vorwärts, oder die Linie AL rückwärts, wird der Gegenstand anfänglich in der Richtung und Entfernung BA gesehen, zuletzt aber in den Richtungen und Entfernungen ML, BC, welche gleich und parallel sind. Denn obgleich AL mit BM nicht in einer Ebne lieget, so läßt sich doch eine Ebne durch BM und den Punkt L legen, und auf dieser muß das Ende L der AL, die mit BM parallele und gleiche LC beschreiben.

Zusatz I. Aus der Bahn BM des Zuschauers und der scheinbaren Bahn AC des Gegenstandes läßt sich die wahre Bahn AL dieses letzteren finden. Durch BM und C lege eine Ebne, ziehe in derselben CL mit BM gleich und parallel, ziehe AL, so ist diese die wahre Bahn des Gegenstandes.

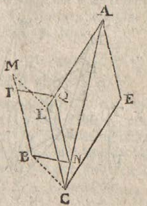
Zusatz II. Aus der wahren Bahn AL und der scheinbaren AC des Gegenstandes, kann eine Bahn BM für den Zuschauer gefunden werden. Ziehe LC. Nimm nach Belieben den Punkt B innerhalb oder außerhalb der Ebne ALC oder deren Verlängerung. Mache BM mit LC gleich und parallel, so ist BM die Bahn des Zuschauers. Die Lage des willkürlichen Punktes B könnte allenfalls durch die scheinbare Größe des Gegenstandes in A und in C bestimmet werden, wie bei §. 19.

§. 28.

§. 28.

Aufgabe.

Ein Gegenstand und ein Zuschauer bewegen sich einförmig in geraden Linien, aber nicht in einer Ebne. Es soll ihr kleinster Abstand von einander bestimmet werden.



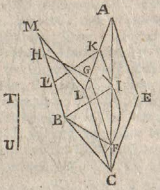
Es werde die Figur nach Anleitung des vorigen Paragraphs beschrieben. Bliebe der Zuschauer in B, und bewegte sich der Gegenstand wirklich in AC, so erhielte man die kürzeste Entfernung BN, wenn man aus B auf AC die BN senkrecht fällete. Machet man nun, wie bei §. 20, das Parallelogramm NQPBN, so sind, wie dort, und aus den nämlichen Gründen, die verlangten Stellen in P und Q.

Anmerkung. Alles wird hier erkläret, wie in dem Falle, wo die Richtungen in einer Ebne liegen. Nur muß man sich hier drei Ebnen gedenken, die eine ALCEA, die andere CLMBC, und die dritte BNQPB.

§. 29.

Aufgabe.

Unter den Umständen der vorhergehenden Aufgabe sollen die Stellen gefunden werden, wo der Gegenstand und der Zuschauer in einer gegebenen Entfernung von einander sind.



Der gegebene Abstand sei TU. Lege eine Ebne durch B und AC. In derselben beschreibe einen Zirkel mit einem Halbmesser = TU. Gesetzt, er schneide die AC in F und I, so mache, wie in den übrigen Fällen, die Parallelogramme FGHBF und IKLBI. Alsdann sind der Gegenstand und der Zuschauer in der verlangten Entfernung, sowohl in K und L als auch in G und H.

Wenn der Kreis die AC nur berühret, so hat die Aufgabe nur eine Auflösung. Wenn aber der Kreis die AC nicht erreichet, so ist die Auflösung unmöglich.

Anmerkung. Man hat hier fünf Ebnen zu betrachten. 1) ALCEA, 2) ACB, 3) CBMLC, 4) BFGHB, 5) BIKLB.

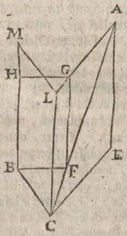
Zusatz.

Zusatz. Wenn man anstatt eines Gegenstandes und eines Zuschauers zwei Kugeln annimmt, deren Halbmesser zusammengenommen so groß sind, als TU, so stoßen sie an einander, so bald die eine in K und die andere in L gekommen ist. Dann verändern sich ihre Richtungen, wie wir im folgenden Hauptstücke sehen werden. Nimmt man anstatt der einen Kugel nur einen zirkelrunden Schatten an, so geschiehet der Austritt, wenn die Mittelpunkte in G und H sind. (Siehe §. 10).

§. 30.

Aufgabe.

Wenn ein Gegenstand und ein Zuschauer sich einförmig und in geraden Linien, aber nicht in einer Ebne bewegen, so sollen die Stellen gefunden werden, wo die gerade Linie, welche beide verbindet, auf der einen oder der anderen Bahn senkrecht ist.



Soll die Linie auf der Bahn BM des Zuschauers senkrecht sein, so lege durch B eine Ebne, worauf BM senkrecht stehe. Gesetzt, diese Ebne durchschneide die Linie AC in F, so ziehe BF. Dann ist BF auf BM senkrecht. Nun ziehe FG in der Ebne LE, und dann GH mit BF parallel, oder mache BH = FG, so ist GH senkrecht auf BM, wenn der Zuschauer in H und der Gegenstand in G ist.

Soll die gedachte Linie auf der Bahn des Gegenstandes senkrecht sein, so verwechsele die Aufgabe. Nimm an, der Gegenstand sei ein Zuschauer, und der Zuschauer sei der betrachtete Gegenstand, und verrichte dann die Auflösung nach der nämlichen Anleitung.

§. 31.

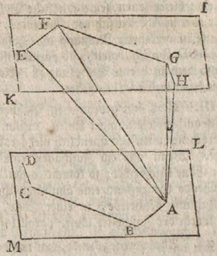
Lehrsatz.

Wenn der Zuschauer in einer Ebne ein Vieleck oder eine gebrochene Linie beschreibet, und wenn der Gegenstand außerhalb der gedachten Ebne ruhet, so sind die Erscheinungen die nämlichen, als wenn der Gegenstand in einer Ebne, die mit der gegebenen parallel ist, und in welcher er sich wirklich befindet, dasselbige Vieleck oder dieselbige gebrochene Linie wirklich beschriebe.

Gesetzt, es beschreibe der Zuschauer die gebrochene Linie ABCD, und der Gegenstand ruhe in E. Unterdessen, daß der Zuschauer von A bis B gehet, scheinet der Gegenstand E die Linie EF zu durchlaufen, welche mit AB gleich und parallel ist (§. 24). Ferner, unterdessen, daß der Zuschauer die BC durchläuft, scheinet der Gegenstand die FG zu durchlaufen, welche ebenfalls mit BC gleich und parallel ist. Da nun AB mit EF und BC mit FG parallel sind, so liegen EF und FG in einer Ebne IK, welche mit der Ebne LM, worin sich der Zuschauer beweget, parallel ist. (Selbstlernende Geom. Hauptst. VII §. 25). Da die

Ebnen

Ebnen IK und LM parallel sind, wie auch EF mit AB und FG mit BC, so sind die Winkel EFG und ABC gleich. (Ebendas. §. 19).



Weiter, unterdessen, daß der Zuschauer die CD durchläuft, scheinet der Gegenstand die GH zu durchlaufen, welche mit CD gleich und parallel ist. Da nun auch BC und GF gleich und parallel waren, so liegen FG und GH in einer Ebne, die mit der LM parallel ist, und da diese Ebne durch GF gehet, so ist es die nämliche IK, worin EF und FG lagen. Auch ist der Winkel FGH dem Winkel BCD gleich.

Also ist die ganze scheinbare Bahn EFGH des Gegenstandes mit der wirklichen ABCD des Zuschauers ähnlich und gleich. Der nämliche Beweis könnte auf mehrere Seiten der gebrochenen Bahn angewandt werden.

Zusatz I. Wenn also der Zuschauer glaubet in A zu ruhen, so wird es ihm vorkommen, als sähe er nach und nach den Gegenstand in den Richtungen AE, AF, AG, AH.

Zusatz II. Man gedenke sich zwei Zuschauer, deren einer die Bahn ABCD durchläuft, der andere aber in E ruhet, so siehet dieser jenen seine wirkliche Bahn durchlaufen, jener aber in A stellet sich vor, derjenige, der in E ist, durchlaufe in verkehrter Richtung die Bahn EFGH, welche mit ABCD ähnlich, gleich und parallel ist; der in A rechnet also dem in E eine Bewegung zu, die er selbst hat, und die jener in E wirklich siehet.

Zusatz III. Was von gebrochenen Bahnen gesaget worden, gilt auch von krummen Linien, wenn man sich diese als gebrochene Linien von unendlich viel geraden Theilen vorstellet. Wenn also ein Zuschauer eine krumme Linie in einer Ebne beschreibet, so kömmt es ihm vor, als wenn der ruhende Gegenstand eine ähnlichgleiche Linie in verkehrter Richtung beschriebe, in einer Ebne, die mit derjenigen, worin der Zuschauer läuft, parallel ist.

Anmerkung I. Alles vorhergehende, was von der scheinbaren Bahn gesaget worden, setzet voraus, daß der Zuschauer im Stande sei, die Veränderung der Richtung der Gesichtslinie zu beurtheilen. Dieses kann, vermöge der Lage gewisser unbeweglicher Gegenstände, geschehen. So werden zum Exempel die scheinbaren Bewegungen der Sonne und der Planeten, vermöge der Fixsterne, beurtheilet, welche ihre Lage gar nicht, oder doch nicht merklich verändern. Richtet sich aber der Zuschauer in seinem Urtheile über die Bewegung des Gegenstandes, nach Dingen, die selbst beweglich sind, so entstehen ganz andere Erscheinungen. Zum Exempel, wenn wir die Lage der Sonne und Sterne mit dem irdischen Horizont vergleichen, der sich selbst mit uns beweget, so scheinen uns alle Gestirne über die-

sem

sem Horizont solche Zirkelbögen zu beschreiben, die weit größer sind, als der, den wir selbst beschreiben. Diese Art der scheinbaren Bewegung ist von jener, wo sich das Urtheil nach unbewegten Punkten richtet, ganz verschieden. Da sie aber selten anderswo, als in der Astronomie vorkömmt, so kann die Erörterung derselben auch bis dahin aufgeschoben werden, so wie auch alle übrigen Umstände der scheinbaren Bewegung, die nicht anders als am Himmel wahrgenommen werden.

Anmerkung II. Noch ist von der scheinbaren Bewegung überhaupt zu bemerken, daß sie nicht anders eine Täuschung verursachen kann, als wenn keine Umstände vorhanden sind, die uns an die wirkliche Beschaffenheit der Dinge erinnern. Bei nahen und bekannten Dingen, und wenn wir uns unserer eigenen Bewegung bewußt sind, findet keine Täuschung Statt. Zum Exempel, wenn auch ein Mensch sich von uns entfernet, so glauben wir nicht, daß er kleiner wird, obgleich seine scheinbare Größe abnimmt. Wenn ich um einen Thurm herum gehe, so glaube ich nicht, daß ich ruhe und er sich drehe. Hingegen, wenn man auf einem Schiffe oder in einem Wagen fährt, so kann es einem wohl manchmal vorkommen, als wenn die umliegenden Gegenstände rückwärts gingen, hauptsächlich, wenn man das Fahren nicht gewohnt ist, weil man alsdann nicht so dringend an sein eignes Fortrücken erinnert wird. Desgleichen, wenn eine Feuerkugel in der Luft höher steiget, so kann man in Zweifel sein, ob sie sich entfernet, oder in der That kleiner wird, weil die Beschaffenheit eines solchen Gegenstandes nicht sehr bekannt ist.

§. 32.

Wir wollen jetzt, zum Besten der Anfänger, die in diesem ersten Hauptstücke vorgetragenen Lehren, oder wenigstens das merkwürdige davon, kürzlich wiederholen.

Wenn zwei Körper, in einer geraden Linie laufen, so bestehet ihre relative Geschwindigkeit in der Differenz, oder der Summe der beiden absoluten Geschwindigkeiten, je nachdem die Richtungen einerlei oder entgegengesetzt sind. Und dieses hat in allen Fällen seine Richtigkeit, es mögen sich die Körper einander nähern, oder von einander entfernen.

In den Fällen, wo sich beide Körper einander nähern, giebt es einen Ort und einen Zeitpunkt, wo sie aneinander stoßen; ferner, wenn anstatt des einen oder beider bloße Schatten vorhanden sind, so treffen hernach (wenn sie rund sind) die Mittelpunkte zusammen. Zuletzt trennen sich beide Gegenstände wieder. Die Zeiten und Orte, wo alles dieses geschiehet, zu bestimmen, ist an der gehörigen Stelle gelehret worden.

Auch haben wir gesehen, wie der Ort der Berührung (falls sie möglich ist) gefunden werden kann, wenn auch beide Körper (eigentlich Kugeln) nicht in derselbigen geraden Linie gehen, sondern in solchen geraden Bahnen, die einen Winkel mit einander machen.

Wenn ein Zuschauer denselbigen Gegenstand oder ähnlichgleiche Gegenstände in verschiedenen Entfernungen betrachtet, so verhalten sich die scheinbaren Durchmesser beinahe umgekehret, wie die Entfernungen; und daraus läßt sich die Annäherung oder das Weggehen eines Gegenstandes erkennen.

Bewegt sich der Gegenstand dabei einförmig um den Zuschauer herum, so verhalten sich auch die scheinbaren Geschwindigkeiten beinahe umgekehret, wie die Entfernungen. Woraus dann folget, daß die scheinbaren Geschwindigkeiten ohngefähr im nämlichen Verhältnisse ab- oder zunehmen, wie die scheinbaren Durchmesser. Hierbei wird aber vorausgesetzet, daß die Bahn an den beobachteten Stellen mit der Gesichtslinie einen beinahe rechten Winkel mache.

Wenn

Wenn ein Zuschauer und ein Gegenstand sich einförmig in geraden Linien bewegen, so sind die Erscheinungen genau die nämlichen, als wenn der Zuschauer ruhete, die Bewegung des Gegenstandes aber zusammengesetzt wäre aus derjenigen die er wirklich hat, und derjenigen die der Zuschauer hat, wobei jedoch diese letztere in entgegengesetzter Richtung genommen werden muß. Vermöge dieses Lehrsatzes läßt sich die wahre Bahn des Gegenstandes, aus die scheinbaren und aus der Bewegung des Zuschauers bestimmen; wie auch diese letztere aus der wahren und scheinbaren Bahn des Zuschauers.

Wenn sich ein Zuschauer und ein Gegenstand, oder überhaupt zwei Körper in geraden Linien und einförmig bewegen, so kann allemal angegeben werden, wo sie am nächsten beisammen, oder auch in einer gegebenen Entfernung sind, und wo die gerade Linie, die man in Gedanken von einem zum andern ziehet, auf die Bahn des einen oder des andern senkrecht ist.

Wenn der betrachtete Gegenstand ruhet, und der Zuschauer sich beweget, so entstehen die nämlichen Erscheinungen, als wenn der Zuschauer in Ruhe wäre, der Gegenstand aber die Bewegung des Zuschauers in entgegengesetzter Richtung hätte, und dieses in allen Fällen, sowohl wenn der Zuschauer in gerader Linie gehet, als wenn er ein Vieleck oder eine krumme Linie beschreibet. Lieget der Gegenstand mit der Bahn des Zuschauers in einer Ebne, so ist die scheinbare Bahn des Gegenstandes in derselbigen Ebne. Lieget der Gegenstand außerhalb der Ebne, worin die Bahn des Zuschauers ist, so ist die scheinbare Bahn des Gegenstandes in einer Ebne, die mit der Ebne parallel ist, worin sich die Bahn des Zuschauers befindet.

Dieses waren die Haupt-Umstände, welche wir bei der relativen und scheinbaren Bewegung zu betrachten hatten. Wir wollen nun untersuchen, was erfolgen muß, wenn zwei Körper aneinander stoßen.

Zweites Hauptstück.

Vom Stoße der Körper an einander.

§. 1.

Im vorigen Hauptstücke haben wir gesehen, wie sich zwei Körper, vermöge ihrer relativen Bewegung, einander nähern, oder von einander entfernen. Im Falle wo sie sich nähern, können sie auch ganz zusammen kommen, so daß einer den andern berühre. Dann wirket einer auf den andern, und sie stören sich wechselsweise, theils in ihren Richtungen, theils in ihren Geschwindigkeiten. Diese Wirkung und Gegenwirkung zweier (oder auch mehrerer) Körper, die sich begegnen, wird der Stoß derselben genannt. Ein solcher Stoß ist entweder gerade oder schief.

§. 2.

Gerade ist der Stoß, wenn die Richtungen in welchen sich die Schwerpunkte beider Körper bewegen, in einer und derselben geraden Linie liegen, und wenn dabei die an einander stoßenden Flächen auf dieser Linie senkrecht sind. Schief wird der Stoß genannt, wenn eine dieser Bedingungen oder beide nicht statt finden.

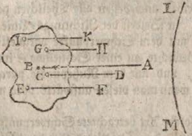
§. 3.

Auch ist bei zusammen stoßenden Körpern zu beobachten, ob sie beide vor dem Stoße nach einerlei Gegend hinzieleten, oder ob sie sich in entgegengesetzten Richtungen bewegten.

bewegten; ferner, ob die Körper elastisch oder unelastisch, hart oder weich sind.

§. 4.

Es ist kurz vorher (§. 2) des Schwerpunktes Erwähnung geschehen, weil er zur Unterscheidung des geraden und schiefen Stoßes mitgehöret. Dabei ist aber zu bemerken, daß er hier unter einem andern Gesichtspunkte betrachtet wird, als in der Statik. (Stat. Hauptst. V. §. 2 und 3). Dort wurde er als ein solcher Punkt betrachtet, um welchen herum alle Theile eines Körpers als Gewichte angesehen, in jeder Lage desselben, einander das Gleichgewicht halten. Hier ist aber von der Schwere nicht die Rede, sondern von der Bewegung. Es ist bekannt, daß alle Theile eines Körpers der Veränderung ihres jetzigen Zustandes der Ruhe, oder der Bewegung widerstehen, und daß dieser Widerstand die Trägheit oder Inerzie der Materie genannt wird (Statik. Hauptst. III. §. 4). Bekömmt nun ein Körper, er mag ruhend oder schon in Bewegung sein, einen Stoß, so widersetzen sich alle seine Theilchen dem Stoße in einer entgegengesetzten Richtung, indem die Gegenwirkung allemal der Wirkung gerade entgegengesetzt ist (Statik. Hauptst. III. §. 10)



Gesetzt

Gesetzt also, der Körper bekomme einen Stoß in der Richtung AB, gerade auf den Schwerpunkt B. Wir stellen uns jetzt eine solche Kraft vor, die durch die Masse ungehindert dringet und nur auf den Schwerpunkt wirket, oder auch solchen Körper, zu dessen Schwerpunkt ein offener Zugang verstattet wird. In dem Augenblicke da der Stoß auf den Schwerpunkt B geschiehet, widersetzen sich alle Theilchen, wie C, E, G, I, dem erhaltenen Eindrucke in den Richtungen CD, EF, GH, IK die mit AB parallel sind, aber nach der entgegengesetzten Gegend hinzielen.

Der Körper ist also in dem nämlichen Falle, als wenn alle seine Theilchen in parallelen Richtungen sich nach einerlei Gegend bestrebten hinzugehen, der Schwerpunkt aber unterstützet wäre; folglich im nämlichen Falle, als wenn die Kraft der Schwere auf die Theilchen wirkte, um sie nach der Erde LM hinzutreiben, zugleich aber eine hinlängliche Kraft AB den Schwerpunkt zurückhielte. In diesem Falle würden alle Theilchen, wie C, E, G, I einander das Gleichgewicht halten, so daß keines das andere überwältigen, und den Körper zu einer drehenden Bewegung zwingen könnte; folglich wird auch in jenem Falle, wo die Kräftchen nichts anders als die Gegenwirkungen der Trägheit sind, alles um den Schwerpunkt B herum im Gleichgewicht bleiben.

Wenn also die Kraft AB den Schwerpunkt B forttreibet, so bleiben unterdessen alle Theilchen des Körpers in ihrer Lage, in Betreff der Richtungs-Linie AB, und sie gehen alle mit dem Schwerpunkte parallel. Eben so würden die Gewichte an einer Schnellwage im Gleichgewicht bleiben, und mit dem Ruhepunkte parallel steigen oder sinken, wenn man diesen aufwärts oder niederwärts bewegte.

Der auf solche Art betrachtete Schwerpunkt kann auch der **Mittelpunkt der Trägheit** oder der **Mittelpunkt** der

der Masse genannt werden. Er ist hier nichts anders als derjenige Punkt in einem Körper, um welchen herum alle Theilchen, vermittelst ihrer Trägheit oder ihres Widerstandes, einander das Gleichgewicht halten, wenn dieser Punkt gestoßen oder fortgetrieben wird; oder es ist derjenige Punkt, in welchem sich die Trägheit oder der Widerstand der ganzen Masse gleichsam vereinigt.

§. 5.

Uebrigens kömmt bei den allgemeinen Betrachtungen über den Zusammenstoß der Körper, deren Schwere nicht mit in Anschlag. Man darf sich nur solche Körper auf einer vollkommen glatten und horizontalen Ebne vorstellen, wodurch die Wirkung der Schwere gänzlich vernichtet wird. Die Ebne muß man sich so glatt gedenken, daß keine Reibung statt findet. Auch muß man sich vorstellen, daß die Bewegung im leeren Raume geschiehet. Obgleich die in diesen Voraussetzungen herausgebrachten Regeln des Stoßes immer mehr oder weniger von der Erfahrung abweichen müssen, so haben sie doch ihren Nutzen, eben so gut als die geometrischen Betrachtungen über vollkommen reguläre Figuren, die nirgends in der Natur anzutreffen sind.

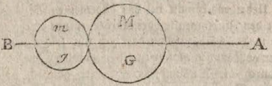
Um die Untersuchung über den Zusammenstoß zweier Körper zu erleichtern, wollen wir nur bloß zwei Kugeln betrachten, weil dieses hinlänglich sein wird, um die allgemeinen Gesetze des Stoßes herauszubringen. Anstatt der Kugeln kann man sich auch bloße materielle Punkte vorstellen, die einander begegnen.

§. 6.

Lehrsatz.

Wenn ein unelastischer Körper einen andern ebenfalls unelastischen, der in derselbigen Richtung lang-

langsamer gehet, einholet, und ein gerader Stoß geschiehet, so bleiben beide hernach zusammen, und laufen in der nämlichen Richtung mit einer Geschwindigkeit, welche gefunden wird, wenn man die Summe der Bewegungen vor dem Stoße durch die Summe der Massen theilet.



Gesetzt beide Körper M und m, die in der Richtung AB laufen, M geschwinder und m langsamer, begegnen einander, und es geschehe ein gerader Stoß, so mache man folgende Betrachtungen.

1) Der Körper M stößt den Körper m vor sich weg, und beschleuniget dessen Bewegung, bis daß sie beide mit gleicher Geschwindigkeit fortgehen; dann höret alle Wirkung des M gegen m auf; und beide Körper laufen in Gesellschaft, als wenn sie nur eine Masse ausmachten. Denn es ist hier keine Elastizität vorhanden, welche beide auseinander treiben könnte.

2) So viel Bewegung der Körper m von M erhält, so viel verlieret dieser, indem die Gegenwirkung allemal der Wirkung gleich ist (Statik. Hauptst. III. §. 10). Es sei demnach G die Geschwindigkeit des M vor dem Stoße, g die Geschwindigkeit des m ebenfalls vor dem Stoße, und x die gemeinsame Geschwindigkeit beider Körper nach dem Stoße. Die Quantität der Bewegung wird allemal erhalten, wenn man die Masse mit der Geschwindigkeit

multipli-

multipliziret (Statik. Hauptst. II. §. 31). Also war vor dem Stoße die Bewegung des $m = mg$, und nach dem Stoße wird sie $= mx$. Der Unterschied ist $mx - mg$ oder $m(x - g)$, und um soviel hat die Bewegung des m durch den Stoß zugenommen, oder so viel Bewegung hat m von M erhalten. M selbst hatte vor dem Stoße die Bewegung MG, hat aber nach dem Stoße nur die Bewegung Mx, der Unterschied ist $MG - mx$, oder $M(G - x)$, und so viel hat M an Bewegung verloren. Da aber dieser Verlust jenen Gewinn gleich sein muß, so ist

$$M(G - x) = m(x - g)$$

oder $MG - Mx = mx - mg$

daher $MG + mg = mx + Mx$

und $\frac{MG + mg}{M + m} = x$

welche letztere Gleichung die im Lehrsatze enthaltene Regel giebt.

§. 7.

Lehrsatz.

Wenn zwei unelastische Körper einander entgegen kommen, und ein gerader Stoß geschiehet, so bleiben sie hernach zusammen, und laufen in der Richtung desjenigen, der die stärkste Bewegung hatte, mit einer Geschwindigkeit, welche gefunden wird, wenn man den Unterschied beider Bewegungen durch die Summe der Massen dividiret.

Gesetzt, in voriger Figur laufe M von A nach B, und m ihm entgegen von B nach A, und sie stoßen gerade auf einander, so mache man folgende Betrachtungen.

1) Der Körper, der am meisten Bewegung (nicht allemal am meisten Geschwindigkeit) hat, muß nothwendig den anderen, der weniger Bewegung hat, zurücktreiben, und der stärkere wirket so lange auf den schwächeren,

bis

bis daß beide einerlei Geschwindigkeit haben, und sie also in Gesellschaft, wie eine einzige Masse, fortlaufen. (Siehe den vorigen Lehrsatz).

2) Es sei G die Geschwindigkeit der Masse M, g die Geschwindigkeit der Masse m, so sind vor dem Stoße die Quantitäten der Bewegung MG und mg. Wir wollen annehmen, das Produkt MG betrage mehr als mg, so müssen beide Körper nach dem Stoße in der Richtung AB der Masse M gehen, und dieses mit einer gewissen gemeinschaftlichen Geschwindigkeit, die wir x nennen wollen. Also sind nach dem Stoße die Bewegungen Mx und mx.

Da die Masse M vor dem Stoße die Bewegung MG hatte, nach dem Stoße aber nur noch die Bewegung Mx hat, so ist der Unterschied oder der Verlust MG — Mx, oder M(G — x). Was die Masse m betrift, so hatte sie vor dem Stoße die Bewegung mg von der linken Hand nach der rechten; nach dem Stoße aber hat sie die Bewegung mx von der rechten zur linken. Sie hat also von M erstlich eine Bewegung = mg von der rechten zur linken erhalten, um die gleiche Bewegung in entgegengesetzter Richtung aufzuheben; zweitens würde sie, wenn sie weiter nichts erhalten hätte, in Ruhe geblieben sein, und folglich hat sie noch die wirkliche Bewegung mx erhalten. Ueberhaupt also hat der Körper m die Bewegung $mg + mx$ oder $m(g + x)$ erhalten. Da nun, wegen der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung, dieser Gewinn jenem Verluste des M gleich sein muß, so ist

$$\mathrm{M}(\mathrm{G} - x) = m(g + x)$$

oder $\mathrm{MG} - \mathrm{M}x = mg + mx$

daher $\mathrm{MG} - mg = \mathrm{M}x + mx$

folglich $\dfrac{\mathrm{MG} - mg}{\mathrm{M} + m} = x$

wodurch unser Lehrsatz bewiesen ist.

Zusatz I.

Zusatz I. Hieraus lassen sich verschiedene Folgerungen ziehen. Z. E. Wenn $MG = mg$, so ist $x = 0$, und beide Körper bleiben stehen. Dieses geschiehet, wenn beide Quantitäten der Bewegung gleich sind, wozu erforderlich ist, daß entweder $M = m$ und $G = g$, oder daß $M, m :: g, G$. Ferner, wenn $g = 0$, das heißt, wenn der eine Körper vor dem Stoße ruhet, so ist $x = \frac{MG}{M+m}$ oder die Geschwindigkeit nach dem Stoße wird erhalten, wenn man die Bewegung des einen Körpers durch die Summe beider Massen dividiret. Andere Fälle mag der Leser selbst untersuchen, z. E. denjenigen, wo die Massen gleich sind.

Zusatz II. Wir haben in diesem, wie auch im vorigen Paragraph, stillschweigend angenommen, daß die Körper hart sind; die Regeln gelten aber nicht weniger, wenn sie weich sind, nur ist zu bemerken, daß beide Körper in diesem Falle durch den Stoß mehr oder weniger platt werden.

Anmerkung. Wenn man Versuche mit Kugeln auf einer horizontalen Ebne anstellet, so bekommen sie sowohl vor als nach dem Stoße eine drehende oder rollende Bewegung, welches von nichts anderem als von der Reibung herrühret, und uns hier nichts angehet. Wir sehen nur bloß auf die progressive oder fortrückende Bewegung des Schwerpunktes. Diese wird durch das Drehen der umliegenden Theile nicht gehindert, und wenn keine Reibung vorhanden wäre, so würde der Schwerpunkt oder der Mittelpunkt der Masse alle übrige Theilchen in parallelen Richtungen mit sich fortschleppen (§. 4).

§. 8.

Beide gefundene Formeln können in einer einzigen zusammen gefaßt werden, wenn man das zweideutige

Zeichen $+$ gebrauchet. Wenn also überhaupt zwei Massen M und m mit den Geschwindigkeiten G und g gerade zusammen stoßen, so gehen sie nach dem Stoße gemeinschaftlich mit einer Geschwindigkeit x, so daß

$$x = \frac{\mathrm{MG} \pm mg}{\mathrm{M} + m}$$

wo das Zeichen $+$ für den Fall gilt, wo ein Körper den andern verfolget, und $-$ für den Fall da beide einander entgegen gehen; und in diesem leztern Falle kann die Geschwindigkeit g als negativ betrachtet werden, wenn die andere G positiv angenommen wird.

Exempel. Es sei die Masse M $= 10$ Pfund, und ihre Geschwindigkeit G $= 59$ Fuß für jede Sekunde. Die Masse m sei 15 Pfund, und ihre Geschwindigkeit 24 Fuß für jede Sekunde, so ist entweder

$$x = \frac{10 \times 59 + 15 \times 24}{10 + 15} = 38 \text{ Fuß}$$

$$\text{oder } x = \frac{10 \times 59 - 15 \times 24}{10 + 15} = 9\tfrac{1}{5} \text{ Fuß}$$

das erste für einerlei Richtung, das andere für entgegengesezte Richtungen.

Anmerkung I. Träfe es sich im lezten Falle, daß mg größer wäre als MG, so würde x negativ, woraus man schließen müßte, daß die Bewegung nach dem Stoße, nicht, wie man angenommen hatte, in der Richtung des M, sondern in der Richtung des m geschähe.

Anmerkung II. Obgleich die Rechnung eigentlich für den leeren Raum eingerichtet ist, so wird sie doch ziemlich in der Luft eintreffen, wenn nur die Materien recht dicht sind und der Luft wenig Oberfläche bieten.

In

In jedem vollen Raume müssen unter G, g, und x eigentlichen die leztern Geschwindigkeiten vor dem Stoße, und die anfänglichen nach dem Stoße, verstanden werden. Dieses hindert jedoch nicht, daß diese Größen auf eine Sekundenlange Bewegung gerechnet werden. Gesetzet z. E. in den leztern Millionentheilchen einer Sekunde habe die Masse M einen Raum von $\frac{1}{10000}$ Fuß zurückgeleget, so bedenke man, daß, wenn sich die Masse M eine ganze Sekunde lang eben so wie ganz zulezt beweget hätte, sie alsdann 1000000 mal $\frac{1}{10000}$ Fuß, das ist 100 Fuß gemacht hätte, und also G = 100 Fuß. Solche Bewandniß hat es auch mit g und x, wenn die Bewegung nicht einförmig ist. Nämlich man betrachtet sie im lezten oder ersten Augenblicke als einförmig, und rechnet die Geschwindigkeit so, wie sie sich ergiebt, wenn man annimmt, diese einförmige Bewegung dauere während der ganzen Einheit der Zeit.

Zusatz. Die Gleichung

$$x = \frac{MG \pm mg}{M + m}$$

entstand aus dieser

$$(M + m)\, x = MG \pm mg$$

Es ist demnach allemal

$$Mx + mx = MG \pm mg$$

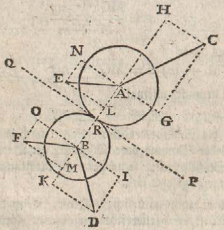
das heißt, die Summe der Bewegungen nach dem Stoße ist allemal der Summe oder Differenz der Bewegungen vor dem Stoße gleich, je nachdem die Richtungen einerlei oder entgegengesezet sind.

Dieses ist auch natürlich. Denn, wenn die Richtung einerlei ist, so verlieret der verfolgende Körper, wegen der Gegenwirkung, so viel an Bewegung, als er dem andern mittheilet, und es bleibet also im Ganzen so viel Bewegung als vorher war. Hingegen bei entgegengesetzten Richtungen, vernichtet der schwächere so viel von der Bewegung des stärkern als er, der schwächere selbst hat, und es bleibet also nur noch die Differenz beider Bewegungen übrig. Es hat also hier dieselbe Bewandniß, wie mit zwei Kräften, die entweder in einerlei Richtung, oder in entgegengesetzten Richtungen auf einen Körper wirken (Stat. Hauptst. III. §. 5 rc.).

§. 9.

Aufgabe.

Wenn zwei unelastische Kugeln, deren Geschwindigkeiten und Richtungen gegeben sind, schief aneinander stoßen, so sollen die Richtungen und Geschwindigkeiten beider nach dem Stoße bestimmt werden.



Auf-

Auflösung. Gesezet, die unelastischen Kugeln A und B, die sich in den Richtungen und mit den Geschwindigkeiten CA und DB in einer Ebne bewegen, die durch beide Richtungslinien und beide Schwerpunkte gehet, stoßen beide aneinander, und es sollen die Linien AE und BF gefunden werden, welche ihre Richtungen und Geschwindigkeiten nach dem Stoße vorstellen.

Man stelle sich eine Ebne PQ vor, welche beide Kugeln berühret, und welche also auf der Ebne DBAC senkrecht sein wird. Man ziehe AH und CG auf PQ senkrecht, hernach aber CH und AG mit der Ebne PQ parallel, so entstehet ein Parallelogramm HG, und anstatt der Kraft $A \times AC$, womit sich der Körper wirklich beweget, kann man sich zwei andere Kräfte $A \times HA$ und $A \times GA$ vorstellen, welche, wenn sie beide zugleich auf die Kugel A wirkten, genau den nämlichen Erfolg verursachen würden (Statik Hauptst. III, §. 9). Und wenn auch der Körper A, schon ehe er bei R ankam, von der Kraft, die ihn trieb, verlassen worden wäre, so hindert nichts, daß man sich vorstelle, diese Kraft verfolge ihn noch jezt, oder wirke erst jezt auf ihn, indem die einmal eingedrückte Bewegung in ihm bleibet (Statik Hauptst. III, §. 3).

Eben so kann man die Kraft oder Bewegung $B \times DB$ in zwei andere $B \times KB$ und $B \times IB$ zerlegen, wovon die eine gegen die Ebne PQ senkrecht wirket, die andere aber mit PQ parallel.

Laßt uns für einen Augenblick die parallelen Kräfte bei Seite sezen, und nur die beiden $A \times HA$ und $B \times KB$ betrachten. Wären diese allein, so entstünde ein gerader Stoß zweier einander entgegenlaufender Körper, und, gesezt daß $A \times HA$ größer sei als $B \times KB$, so würden beide Kugeln in der Richtung der stärkern zusammen fortlaufen mit einer Geschwindigkeit x, so daß (§. 7)

$$x = \frac{A \times HA - B \times KB}{A + B}$$

Folglich würde die Kugel A die Linie AL, und zugleich B die Linie BM durchlaufen, so daß

$$AL = BM = \frac{A \times HA - B \times KB}{A + B}$$

Die gleichen Linien AL und BM lassen sich demnach in jedem Falle durch die Rechnung bestimmen, und können als bekannt angenommen werden, und die Kugeln A und B bewegen sich in der Richtung der stärkern mit Quantitäten der Bewegung, die durch A $\times$ AL und B $\times$ BM ausgedrücket werden, oder sie bewegen sich in dieser Richtung, als wenn sie durch solche Kräfte A $\times$ AL und B $\times$ BM getrieben würden.

Laßt uns jetzt die vorher bei Seite gesetzten Kräfte A $\times$ GA und B $\times$ IB in Anschlag nehmen. Die Kugel A stehet jetzt unter dem Gebote zweier Kräfte A $\times$ AL und A $\times$ GA. Vermittelst der einen muß die Kugel A den Raum AL, und vermittelst der andern den Raum AN = GA durchlaufen. Sie durchläuft demnach in der That die Diagonal-Linie AE des Parallelogramms LN, welches aus beiden Linien AL und AN gemachet ist (Stat. Hauptst. III, §. 9). Also ist AE die Richtung und Geschwindigkeit der Kugel A nach dem Stoße.

Eben so ohngefähr verhält es sich mit der Kugel B. Sie wird durch zwei Kräfte B $\times$ BM und B $\times$ IB gereizet, und durchläuft BF als die Diagonal-Linie des Parallelogramms MO, welches aus den Seiten BM, und BO (= IB) gemachet ist. Folglich ist BF die Richtung und Geschwindigkeit der Kugel B nach dem Stoße.

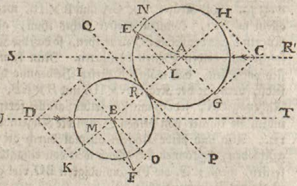
Sind nun die Massen A und B, die Geschwindigkeiten CA und DB in Zahlen, und die Winkel CAG, DBI in Graden gegeben, so lassen sich im rechtwinklichen Dreieck AGC die Seiten GA (= AN) und CG (= HA) berechnen. Desgleichen im Dreieck BDI, die Seiten IB (= BO) und DI (= KB). Ferner aus den Katheten AN und NE (= AL), und

und aus den Katheten BO und OF (= BM) lassen sich die Hypotenusen berechnen, wie auch, wenn man will, die Winkel NAE und OBF, so daß man zugleich die Lage der Linien AE und BF in Betrachtung der Linien GN und IO, oder in Betrachtung der Ebne PQ bestimmen kann.

Anmerkung. Vielleicht fällt jemanden der Zweifel ein, ob die Punkte E und F allemal entfernt genug von einander sein werden, um daß beide Halbmesser der Kugeln zwischen ihnen Platz haben. Hierauf ist die Antwort ja. Die Kräfte A × GA und B × IB, wenn sie allein wirkten, könnten weiter nichts thun, als die Kugeln längs der Ebne PQ zu treiben, so daß die Kugeln solche auf beiden Seiten berührten. Nun kann man sich vorstellen, daß während dieser Bewegung die PQ selbst, vermöge der Kräfte A × HA und B × KB, in der Richtung HK, jedoch mit sich selbst parallel fortrücket, indem sie immer von beiden Seiten die Kugeln berühret. Also sind beide Kugeln allemal durch die Ebne geschieden; sie können sich jedoch weit von einander entfernen, wenn z. E. die Geschwindigkeit BO viel größer ist als die Geschwindigkeit AN.

Zusatz I. Wenn der eine Körper B vor dem Stoße in Ruhe ist, so verschwindet die Kraft B × DB, folglich auch B × KB und B × IB, wie auch das ganze Parallelogramm MO. Die Kraft A × CA zerleget sich wie vorher in zwei, A × HA, und A × GA. Die erste wirket vermittelst eines geraden Stoßes auf B, in der Richtung AB, und es läßt sich der Weg AL oder BM bestimmen, den beide Körper vermöge eines solchen Stoßes machen müßten (§. 7, Zus. I). Bei A entstehet aus den zusammengesetzten Geschwindigkeiten AN und AL eine neue AE. Hingegen bei B, geschiehet keine Zusammensetzung, sondern der Körper B beweget sich in der Linie BM, unterdessen daß A die AE durchläuft.

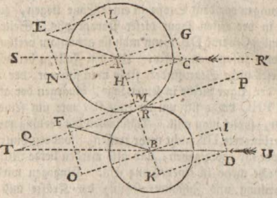
Zusatz II. Wenn die Richtungen vor dem Stoße parallel sind, so sind solche Richtungen allemal in einer Ebne, und die Bestimmung der Wege nach dem Stoße geschiehet übrigens auf die nämliche Art, es mögen die Körper entweder nach einerlei Gegend hingehen, oder einander entgegen kommen. Z. E.



Gesetzt die Körper A und B kommen einander entgegen in den parallelen Richtungen RS und UT mit den Geschwindigkeiten CA und DB, und stoßen bei R aneinander, so entstehet völlig die nämliche Konstrukzion und der nämliche Beweis, wie vorher im allgemeinen, und es findet sich zuletzt, daß A den Weg AE, und B den Weg BF nimmt.

Gesetzt ferner die Kugeln A und B (folgender Figur) gehen in den parallelen Richtungen RS, UT, nach einerlei Gegend hin, und die geschwindere B stößt an die langsamere A. Die Geschwindigkeit der A sei CA, und die der B sei DB, so zerleget sich CA in HA und GA, DB

aber



aber in KB und IB. Hier wirken die Kräfte $B \times KB$ und $A \times HA$ in einerlei Richtung, also wird (§. 6)

$$AL = BM = \frac{B \times KB + A \times HA}{B + A}$$

Endlich aus AN (= GA) und AL entstehet AE, und aus BO (= IB) und BM entstehet BF. Hier sind AE und BF die Geschwindigkeiten und Richtungen nach dem Stoße.

Zusatz III. Wenn die Richtungen der Kugeln vor dem Stoße in einer Ebne liegen, so bleiben die Richtungen nach dem Stoße in derselben Ebne. Wir wollen nur zum Beweise die letzte Figur betrachten. Da CA und DB in einer Ebne liegen, so liegt AB, die sie verbindet, auch in der Ebne, desgleichen die ganze LK. Da die Diagonal-Linie CA und die Seite AH in der Ebne liegen, so lieget auch darin das ganze Parallelogramm GH, folglich auch die Seite GA und deren Verlängerung AN. Weil AN und AL darin liegen, so lieget auch die Diagonal-Linie AE darin. Auf eine ähnliche Art geschiehet der Beweis für BF.

Zusatz IV. Bisher wurde angenommen, daß die Richtungen vor dem Stoße in einer Ebne liegen, so daß z. E. in der ersten Figur dieses Paragraphs (Seite 68) die Linien CA und DB, wenn man sie genugsam verlängert, irgendwo zusammen treffen. Um den Fall zu betrachten, wo dieses nicht Statt findet, stelle man sich vor, der Theil PKQ der Figur bleibe in seiner Lage, hingegen der andere Theil PHQ drehe sich um die Linie RH wie um seine Axe herum, soviel man will. Dann wird die verlängerte CA die verlängerte DB nicht mehr treffen, sondern hinter ihr oder vor ihr vorbeigehen, und also werden beide Richtungen nicht mehr in einer Ebne sein. Hingegen wird die Zertheilung und Zusammensetzung der Kräfte und Geschwindigkeiten, überhaupt der ganze Beweis und das ganze Verfahren bleiben wie vorher.

Zusatz V. Der Weg jeder Kugel für sich, nach dem Stoße, liegt allemal in einer Ebne, worin auch der Weg vor dem Stoße lag, und welche auf der berührenden Ebne PQ senkrecht ist. Dieses folget unmittelbar aus der letzten Vorstellungs-Art (Zus. IV).

§. 10.

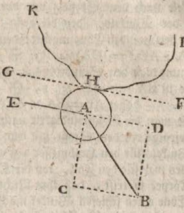
Aufgabe.

Es soll der Weg und die Geschwindigkeit einer unelastischen Kugel gefunden werden, die an einen ganz unbeweglichen unelastischen Körper stößt.

Auflösung.

Es laufe die Kugel A (folgender Figur) in der Richtung und mit der Geschwindigkeit BA gegen einen unbeweglichen Körper, wovon IHK einen Theil vorstellet, und sie treffe ihn im Punkte H. Durch diesen Punkt H lege man eine Ebne FG, welche sowohl den unbeweglichen

Körper



Körper als auch die Kugel berühre. Man ziehe AC und BD auf FG senkrecht, hingegen AD und BC mit FG parallel, so ist die Geschwindigkeit BA in zwei andern CA und DA zerleget, von welchen CA ganz verloren gehet, wegen des unüberwindlichen Widerstandes des unbeweglichen Körpers IHK. Hingegen bleibet die Geschwindigkeit DA unverändert, und diese treibet die Kugel nach dem Stoße in derselbigen Richtung DA oder DE von A bis E, so daß AE = DA.

Hieraus siehet man erstlich, daß der Mittelpunkt der Kugel nach dem Stoße in einer Linie gehet, welche mit der berührenden Ebne parallel ist, wie hier AE mit FG. Zweitens liegen beide Wege der Kugel, sowohl vor als nach dem Stoße in einer Ebne, welche auf der berührenden senkrecht stehet. Denn da AC auf FG senkrecht ist, so ist die Ebne des Parallelogramms CD auch auf FG senkrecht, und da AE die Verlängerung der DA ist, so liegt auch AE in der nämlichen senkrechten Ebne. Drittens

tens verhält sich die Geschwindigkeit vor dem Stoße zur Geschwindigkeit nach dem Stoße, wie der Sinustotus zum Kosinus des Winkels, den die erste Richtung der Kugel mit der berührenden Ebne machet: denn hier ist

$$BA : AE\ (= DA) :: R : \text{S}'\ BAD$$

Viertens nimmt man den Sinustotus = 1,

$$\text{so ist } BA : AE :: 1,\ \text{S}'\ BAD$$

$$\text{daher } AE = BA \times \text{S}'\ BAD$$

folglich erhält man die Geschwindigkeit nach dem Stoße, wenn man diejenige vor dem Stoße mit dem Kosinus des gemeldeten Winkels für den Halbmesser 1 multipliziret.

Dieses alles war für den Fall, wo die Kugel den unbeweglichen Körper so trift, daß ihre Richtung mit der berührenden Ebne einen schiefen Winkel machet. Ist die Richtung aber auf die gedachte Ebne senkrecht, so höret alle Bewegung auf. Denn gesetzt die Kugel laufe in der Richtung CA, und es treffe sich, daß diese CA auf die berührende Ebne FG senkrecht ist, so findet keine Zerlegung der Geschwindigkeit oder der Bewegung Statt, sondern die Kugel bleibet in A stehen.

Zusatz I. Wenn die Kugel gegen eine Ebne anstößt, so sei FG (vorige Figur) diese Ebne. Alsdann gilt von der wirklichen Ebne selbst alles, was von der eingebildeten berührenden Ebne gesagt worden. Die Kugel läuft nach dem Stoße längs der Ebne, mit einer Geschwindigkeit, die man erhält, wenn man die Geschwindigkeit vor dem Stoße, mit dem Kosinus des Winkels, welchen die Richtung und die Ebne machen, multipliziret, indem man 1 zum Sinus-totus annimmt. Geschiehet aber der Stoß senkrecht gegen die Ebne, so höret alle Bewegung auf.

Zusatz II. Die gefundenen Regeln werden noch dadurch bestätiget, daß sie sich aus den allgemeinern herleiten lassen. Für den geraden Stoß haben wir gefunden (§. 8)

$$x = \frac{MG \pm mg}{M + m}$$

wo

wo M und m die Massen, G und g die Geschwindigkeiten vor dem Stoße, x aber die gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoße ist. Wenn ein Körper unbeweglich ist, so rühret dieses daher, daß er mit einer Masse, die im Vergleich mit dem stoßenden Körper als unendlich betrachtet werden kann, in Verbindung stehet, zum Exempel mit der Erde, so daß er sich nicht bewegen könne ohne daß diese große Masse zugleich mitbeweget werde. Man setze also in der Formel für den gestoßenen Körper m das Unendliche, oder ∞, für seine Geschwindigkeit aber das unendlich kleine oder $\frac{1}{\infty}$ (welches eben so viel ist als o) so kömmt

$$x = \frac{MG + \infty \times \frac{1}{\infty}}{M + \infty}$$

$$\text{oder } x = \frac{MG + 1}{M + \infty}$$

und da das endliche M in Betracht des unendlichen verschwindet

$$x = \frac{MG + 1}{\infty}$$

und da jede Größe, wenn sie durch das Unendliche getheilet ist, null wird, so ist

$$x = 0$$

das heißt, es entstehet keine Geschwindigkeit für beide Körper, sondern sie bleiben in Ruhe. Dieses war für den geraden Stoß.

Geschiehet der Stoß gegen eine unbewegliche Masse in schiefer Richtung, so werden beide Bewegungen so zerleget (§. 9), daß man erstlich die Wirkung eines geraden Stoßes betrachten, und die dadurch hervorgebrachte Geschwindigkeit mit den übrig gebliebenen Geschwindigkeiten zusammensetzen könne, welche letztern mit der berührenden Ebne parallel waren. Ist aber die eine Masse unbeweglich, so haben wir eben jetzt gesehen, daß aus dem senkrechten Stoße nichts als Ruhe erfolget. Also wirket nur noch die übrigbleibende Kraft, welche mit der berührenden Ebne parallel ist.

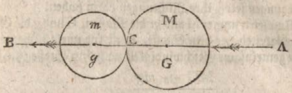
Anmerkung. Ich habe von der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten Erwähnung gethan, obgleich eigentlich die Kräfte oder Bewegungen zusammengesetzet werden. Man erinnere sich hierbei, daß die Kräfte sich überhaupt verhalten wie die Produkte aus den Massen, die sie bewegen, und den Geschwindigkeiten, die sie ihnen geben. Wirken sie auf einen und denselben Körper, so bleibet die Masse unverändert, die Kräfte verhalten sich bloß noch wie die Geschwindigkeiten, und diese können also die Kräfte selbst vorstellen. (Siehe auch Statik. H. III. §. 9. Zus. I.)

§. 11.

Lehrsatz.

Wenn ein vollkommen elastischer Körper einen andern vollkommen elastischen, der in derselbigen Richtung gehet, einholet, und ein gerader Stoß geschiehet, so bleiben beide nach dem Stoße nicht zusammen, obgleich sie dennoch in der nämlichen geraden Linie laufen; sondern jeder gehet für sich mit einer Geschwindigkeit, welche gefunden wird, wenn man erstlich die gemeinsame Geschwindigkeit berechnet, welche beide Körper nach dem Stoße gehabt hätten, im Falle daß sie unelastisch gewesen wären, wenn man diese Geschwindigkeit verdoppelt, und wenn man von dieser doppelten Geschwindigkeit diejenige subtrahiret, welche jeder Körper vor dem Stoße hatte.

Gesetzet, die vollkommen elastischen Körper M und *m* gehen beide in der Richtung AB, und der geschwindere M stößt den langsamern *m*. Sobald dieses geschiehet, so drücket



drücket M den m, und da dieser widerstehet, so werden die elastischen Theile beiderseits bei C zusammengepresset, so daß beide Körper in der Gegend C etwas platter werden als sie vorher waren; und dieses dauret so lange, bis daß beide Körper in der Richtung AB einerlei Geschwindigkeit erhalten haben. Mit dieser gemeinsamen Geschwindigkeit würden sie nun in der Richtung AB fortlaufen, wenn sie nicht elastisch wären. Da sie es aber sind, und es vollkommen sind, so dehnen sich die bei C zusammengedrückten Theile wiederum in entgegengesetzter Richtung aus, mit eben so viel Kraft, als sie zusammengepresset worden. Hier sind demnach zwei vollkommen gleiche Ursachen, die Zusammendrückung und die Wiederherstellung der elastischen Theile, welche folglich gleiche Wirkungen hervorbringen müssen.

Da nun der verfolgende Körper M während der Zusammendrückung eine gewisse Geschwindigkeit verloren hat, so verlieret er noch eben so viel durch die Wiederherstellung, weil auch diese seiner ersten Richtung zuwider ist.

Hingegen, da der verfolgte Körper, während der Zusammendrückung, eine gewisse Geschwindigkeit gewonnen hatte, so gewinnet er noch eben so viel durch die Wiederherstellung, welche in seiner anfänglichen Richtung wirket.

Hieraus siehet man schon, daß beide Körper nach dem Stoße nicht zusammen bleiben können, indem sie durch die Wiederherstellung bei C nach entgegengesetzten Gegenden getrieben werden. Jedoch bleiben sie in der Linie AB, weil die Kräfte der Wiederherstellung sowohl, als die Bewegungen selbst ihre Richtungen darin haben.

Nun seien immer M und m die Massen, G und g die Geschwindigkeiten vor dem Stoße, so ist für unelastische Körper die gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoße (§.6)

$$\frac{MG + mg}{M + m}$$

Also hat M verloren

$$G - \frac{MG + mg}{M + m}$$

Ferner verlieret er noch eben so viel, vermöge der Wiederherstellung, also überhaupt

$$2G - 2\,\frac{MG + mg}{M + m}$$

Folglich behält er

$$G - \left(2G - 2\,\frac{MG + mg}{M + m}\right)$$

$$\text{oder} \quad -G + 2\,\frac{MG + mg}{M + m}$$

$$\text{oder} \quad 2\,\frac{MG + mg}{M + m} - G$$

das heißt, zweimal die gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoße im unelastischen Zustande, weniger die Geschwindigkeit vor dem Stoße, wie im Lehrsatze gesaget worden.

Im selbigen unelastischen Zustande bekömmt m die gemeinsame Geschwindigkeit

$$\frac{MG + mg}{M + m}$$

und

und gewinnet also

$$\frac{MG + mg}{M + m} - g$$

Im elastischen Zustande gewinnet m durch die Wiederherstellung noch eben so viel, also überhaupt

$$2\,\frac{MG + mg}{M + m} - 2g$$

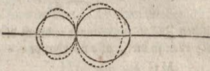
Folglich bekömmt m die Geschwindigkeit

$$g + \left(2\,\frac{MG + mg}{M + m} - 2g\right)$$

oder $$2\,\frac{MG + mg}{M + m} - g$$

das heißt, wie vorher, die doppelte gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoße im unelastischen Zustande, weniger die wirkliche Geschwindigkeit vor dem Stoße.

Anmerkung. Wir haben bloß von der allerersten Zusammendrückung und Wiederherstellung an dem Orte der Berührung geredet. Eigentlich wird jeder der beiden Körper nicht nur an diesem Orte, sondern auch am entgegengesetzten etwas platt. Der verfolgende Körper drücket sich auch hinterwärts ein, weil die hinteren Theile noch die anfängliche Geschwindigkeit haben, und vorwärts gehen, unterdessen, daß die vorderen und mittleren schon verspätet sind. Der verfolgte Körper bekömmt auch vorwärts eine etwas platte Gestalt, weil die vorderen Theile noch die vorige Geschwindigkeit haben, unterdessen, daß die hinteren und mittleren schon beschleuniget sind. Unterdessen, daß beide Körper platter werden, müssen die mittleren Theile etwas seitwärts auseinander gepresset werden, und es muß der ganze Körper an Breite gewinnen.



Also bekommen zwei an einander stoßende elastische Kugeln eine solche Gestalt, wie hier in der Figur mit Punkten bemerket ist; nur daß die Veränderung nicht allemal so merklich ist. Bei der Wiederherstellung bekommen beide Körper nicht nur ihre natürliche Gestalt, sondern sie überschreiten das Ziel, wie bei vielen Bewegungen zu geschehen pfleget, und dehnen sich in die Länge aus, dann wieder in die Breite, und wieder in die Länge, und so dauren die Schwingungen einige Zeit fort, werden aber immer kleiner und kleiner, und zuletzt null. Alles dieses hat seine Richtigkeit. Hingegen bei dem Stoße kömmt es nur bloß auf die erste Eindrückung und Wiederherstellung am Orte der Berührung an. Die Veränderungen an den entgegengesetzten Orten haben hier keine Wirkung; und da die Kugeln nach der ersten Wiederherstellung nicht mehr zusammen sind, so haben auch die folgenden Schwingungen keinen Einfluß auf die progressive oder fortschreitende Bewegung.

Zusatz I. Die relative Geschwindigkeit, womit sich beide Körper nach dem Stoße von einander entfernen, ist derjenigen gleich, womit sie sich vor dem Stoße näherten. Denn vor dem Stoße war die relative Geschwindigkeit $G - g$ (I. Hauptst. §. 6), und nach dem Stoße ist sie

$$\left(2\,\frac{MG + mg}{M + m} - g\right) - \left(2\,\frac{MG + mg}{M + m} - G\right)$$

also $- g + G = G - g$ Zu-

Zusatz II. Der verfolgte Körper behält allemal nach dem Stoße seine Richtung nach derselbigen Gegend hin, und beweget sich geschwinder als vor dem Stoße. Denn er bekommt einen Stoß von hinten, der in derselbigen Richtung geschiehet, und folglich seine Geschwindigkeit vermehret. Hingegen verlieret der verfolgende, wegen der Gegenwirkung des verfolgten, allemal an Geschwindigkeit, und kann sogar zurückgetrieben werden, wie wir bald sehen werden.

Zusatz III. Wenn beide Massen gleich sind, so wird $m = M$. Setzet man M anstatt m in der Geschwindigkeit des verfolgenden, so wird sie

$$2\,\frac{MG + Mg}{M + M} - G = g$$

und machet man die nämliche Veränderung in der Geschwindigkeit des verfolgten, so wird diese

$$2\,\frac{MG + Mg}{M + M} - g = G$$

woraus man siehet, daß beide Körper ihre Geschindigkeiten während dem Stoße vertauschen.

Zusatz IV. Daraus folget, daß, wenn die Massen gleich sind, und der verfolgte Körper ruhet, der verfolgende nach dem Stoße ruhen, und dem andern seine Geschwindigkeit mittheilen werde.

Zusatz V. Die Geschwindigkeit des verfolgenden Körpers wird nach dem Stoße

$$2\,\frac{MG + mg}{M + m} - G$$

Soll dieser Körper nach dem Stoße ruhen, so muß sein

$$2\,\frac{MG + mg}{M + m} - G = 0$$

oder $2\,MG + 2\,mg - MG - mG = 0$

$$MG + 2\,mg - mG = 0$$

$$MG = mG - 2\,mg$$

$$MG = m\,(G - 2g)$$

oder $M : m :: (G - 2g) : G$

Zusatz VI. Die Größe

$$2\,\frac{MG + mg}{M + m} - G$$

wird negativ, wenn $2\,\frac{MG + mg}{M + m}$ kleiner ist als G.

Wenn nun

$$2\,\frac{MG + mg}{M + m} < G$$

so ist $2\,MG + 2\,mg < MG + mG$

$$MG + 2\,mg < mG$$

$$MG < mG - 2\,mg$$

$$MG < m\,(G - 2g)$$

und $\frac{M}{m} < \frac{G - 2g}{G}$

das heißt, der verfolgende Körper muß nach dem Stoße zurückgehen, jedesmal, wenn das Verhältniß der verfolgten zur verfolgenden kleiner ist als das Verhältniß der Geschwindigkeit G zu G — $2g$.

Zusatz VII. Wenn der eine Körper vor dem Stoße in Ruhe ist, so muß der verfolgende nach dem Stoße in dem Falle zurückgehen, wenn seine Masse die kleinste ist; wo nicht, so gehen beide Körper nach dem Stoße in einerlei Richtung vorwärts.

Denn

Denn wenn $g = 0$, so wird die Geschwindigkeit des M

$$2\,\frac{MG}{M+m} - G = \frac{MG - mG}{M+m} = \frac{(M-m)\,G}{M+m}$$

Ist $M < m$, so wird der letzte Bruch negativ, und also geschiehet die Bewegung rückwärts. Ist aber $M = m$, so ruhet der verfolgende Körper (Zus. IV). Ist $M > m$, so beweget er sich vorwärts.

Zusatz VIII. Die Summe der Produkte aus den Massen und den Quadraten ihrer Geschwindigkeiten, beträgt so viel nach als vor dem Stoße. Vor dem Stoße ist sie $MG^2 + mg^2$ Nach dem Stoße ist sie

$$M\left(2\,\frac{MG+mg}{M+m} - G\right)^2 + m\left(2\,\frac{MG+mg}{M+m} - g\right)^2$$

oder

$$M\left(\frac{MG+2mg-mG}{M+m}\right)^2 + m\left(\frac{2MG+mg-Mg}{M+m}\right)^2$$

oder

$$\frac{M(MG+2mg-mG)^2 + m(2MG+mg-Mg)^2}{(M+m)^2}$$

Entwickelt man diesen Ausdruck und verkürzet man ihn, so kömmt für den Nenner

$$M^3G^2 + 2m^2g^2M + m^2G^2M + 2M^2G^2m$$
$$+ m^3g^2 + M^2g^2m$$

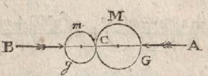
Wenn man nun die Division durch $(M+m)^2$, das heißt, durch $M^2 + 2mM + m^2$ verrichtet, so kömmt zum Quozienten $\quad MG^2 + mg^2$
also eben so viel als vor dem Stoße.

Hierin unterscheiden sich die elastischen Körper von den unelastischen, als bei welchen bloß die Summe der Produfte aus jeder Masse und ihrer bloßen (nicht quadrirten) Geschwindigkeit, nach dem Stoße einerlei bleibet (§. 8 Zusaß)

§. 12.

Lehrsaß.

Wenn zwei vollkommen elastische Körper einander entgegen kommen, und ein gerader Stoß geschiehet, so bleiben beide zwar in derselbigen geraden Linie, aber nicht beisammen, und ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße werden gefunden, wenn man erstlich die gemeinsame Geschwindigkeit für den Fall der mangelnden Elastizität berechnet, dieselbe verdoppelt und hernach die Geschwindigkeit vor dem Stoße bei dem stärkern Körper subtrahiret, bei dem schwächern aber addiret.



Gesezt die elastischen Körper M und m kommen mit den Geschwindigkeiten G und g einander entgegen in der linie AB, und stoßen bei C aneinander. Wären die Körper unelastisch, so würden sie nach dem Stoße zusammen in der Richtung CB des stärkern M gehen, und ihre gemeinsame Geschwindigkeit würde sein (§. 7)

$$\frac{MG - mg}{M + m}$$

Der stärkere hätte also verloren

$$G - \frac{MG - mg}{M + m}$$

Nun

Nun aber wird, wie im vorigen Paragraph, bewiesen, daß er durch die Wiederherstellung bei C wiederum eben so viel verlieret, also überhaupt

$$2G - 2\frac{MG - mg}{M + m}$$

Also bleibet ihm

$$G - \left(2G - 2\frac{MG - mg}{M + m}\right)$$

$$\text{oder } 2\frac{MG - mg}{M + m} - G$$

nämlich die doppelte Geschwindigkeit im unelastischen Zustande, weniger seine Geschwindigkeit vor dem Stoße, wie bei dem verfolgenden Körper im vorigen Paragraph.

Der schwächere Körper m würde im unelastischen Zustande ebenfalls vorwärts gehen mit der gemeinsamen Geschwindigkeit

$$\frac{MG - mg}{M + m}$$

und also gewinnen 1) seine Geschwindigkeit g vor dem Stoße, weil sie in entgegengesetzter Richtung war, und sie durch jene ihm mitgetheilte gleiche Geschwindigkeit in der Richtung des stärkern aufgehoben werden muß; 2) seine wirkliche Geschwindigkeit nach dem Stoße, immer im unelastischen Zustande, also überhaupt

$$g + \frac{MG - mg}{M + m}$$

Nun gewinnet er wiederum so viel durch die Wiederherstellung bei C (§. 11) folglich gewinnet er in allem

$$2g + 2\frac{MG - mg}{M + m}$$

 davon

davon gehet aber ab, die Geschwindigkeit g die er vorher in entgegengesetzter Richtung hatte. Er behält also

$$\left(2g + 2\,\frac{MG - mg}{M + m}\right) - g$$

$$\text{oder } 2\,\frac{MG - mg}{M + m} + g$$

das heißt, die doppelte Geschwindigkeit nach dem Stoße im unelastischen Zustande, nebst seiner Geschwindigkeit vor dem Stoße. Hierin ist also ein Unterschied für den Fall der entgegengesetzten und der gleichen Richtungen, in welchem letztern g subtrahiret werden muß (§. 11).

Zusatz I. Die relative Geschwindigkeit bleibet nach dem Stoße wie vor demselben. Denn, da in dem Beweise angenommen wurde, daß beide Körper nach dem Stoße in der Richtung des stärkern gehen, so ist ihre relative Geschwindigkeit alsdann (Hauptst. I. §. 6)

$$\left(2\,\frac{MG - mg}{M + m} + g\right) - \left(2\,\frac{MG - mg}{M + m} - G\right)$$

das ist nichts anders, als $g + G$. Da nun beide Körper vor dem Stoße eine entgegengesetzte Richtung hatten, so war ihre relative Geschwindigkeit ebenfalls $g + G$. (Hauptst. I. §. 7).

Zusatz II. Gesetzt, die Massen und Geschwindigkeiten beider Körper vor dem Stoße sind gleich, so setzet man M anstatt m, und G anstatt g. Dann wird

$$2\,\frac{MG - mg}{M + m} - G = - G$$

das heißt, der eine Körper gehet zurück, mit der Geschwindigkeit, die er hatte. Ferner wird in diesem Falle,

$$2\,\frac{MG - mg}{M + m} + g = g = G$$

das

das heißt, der andere Körper gehet in der vorigen Richtung des ersten, mit der nämlichen Geschwindigkeit.

Zusatz III. Wenn die Geschwindigkeiten vor dem Stoße gleich, die Massen aber ungleich sind, so setzet man G anstatt g, dann wird

$$2\frac{MG - mg}{M + m} - G = 2\frac{MG - mG}{M + m} - G$$
$$= \frac{2MG - 2mG - MG - mG}{M + m}$$
$$= \frac{MG - 3mG}{M + m}$$
$$= \frac{(M - 3m)G}{M + m}$$

Ist $M > 3m$ oder $m < \frac{1}{3}M$, so ist die Geschwindigkeit der größeren Masse M positiv, das heißt, wenn sie mehr als dreimal so groß ist, wie die andere, so gehet sie nach dem Stoße vorwärts. Ist $M = 3m$, das heißt, ist die größere Masse genau 3mal so groß, als die kleinere, so wird die Geschwindigkeit der größeren $= 0$, und sie bleibet stehen. Ist $M < 3m$, so wird die Geschwindigkeit des M negativ, oder M gehet zurück.

Zusatz IV. Sind die Massen gleich, die Geschwindigkeiten aber ungleich, so wird $m = M$, und dann ist

$$2\frac{MG - mg}{M + m} - G = 2\frac{MG - Mg}{2M} - G$$
$$= G - g - G$$
$$= -g$$

Desgleichen ist in diesem Falle

$$2\frac{MG - mg}{M + m} + g = 2\frac{MG - Mg}{2M} + g$$
$$= G - g + g$$
$$= G$$

 woraus

woraus man siehet, daß beide Körper in entgegengesetzten Richtungen gehen, nachdem sie ihre Geschwindigkeiten vertauschet haben.

Zusatz V. Da überhaupt die Geschwindigkeit des stärkeren Körpers

$$= 2\,\frac{MG - mg}{M + m} - G$$

$$= \frac{2\,MG - 2\,mg - MG - mG}{M + m}$$

$$= \frac{MG - 2\,mg - mG}{M + m}$$

$$= \frac{MG - m(2g + G)}{M + m}$$

so kömmt es darauf an, ob

$$MG < m(2g + G)$$

$$\text{oder} \quad MG = m(2g + G)$$

$$\text{oder} \quad MG < m(2g + G)$$

Im ersten Falle gehet der stärkere Körper nach dem Stoße vorwärts; im zweiten bleibet er ruhend; im dritten gehet er zurück.

Zusatz VI. Unter dem stärkeren Körper verstehen wir allemal denjenigen, der mehr Bewegung hat, und unter der Bewegung das Produkt aus der Masse und der Geschwindigkeit. Wir haben in den vorigen Zusätzen hauptsächlich von dem stärkeren Körper geredet. Denn der schwächere muß allemal nachgeben, und in der Richtung des stärkeren gehen.

Zusatz VII. Wenn der eine Körper m ruhet, so ist $g = 0$, und es erfolget alles wie in den Zusätzen des vorigen Paragraphs. (§. 11. Zus. IV, V, VII).

Zusatz

Zusatz VIII. Die Summe der Produkte aus jeder Masse und dem Quadrate ihrer Geschwindigkeit, ist nach dem Stoße eben so groß, als vor dem Stoße; und dieser Lehrsatz gilt also sowohl für einerlei Richtung (§. 11. Zus. VIII.), als für entgegengesetzte Richtungen.

Die Geschwindigkeiten nach dem Stoße sind

$$2\,\frac{MG - mg}{M + m} - G = \frac{MG - 2mg - mG}{M + m}$$

$$2\,\frac{MG - mg}{M + m} + g = \frac{2MG - mg + Mg}{M + m}$$

Also ist gedachte Summe

$$M\left(\frac{MG - 2mg - mG}{M + m}\right)^2 + m\left(\frac{2MG - mg + Mg}{M + m}\right)^2$$

Dieser Ausdruck, wenn man ihn entwickelt und reduziret, giebt $MG^2 + mg^2$

§. 13.

Vermittelst des zweideutigen Zeichens $\pm$ lassen sich die Formeln für den geraden Stoß vollkommen elastischer Körper vereinigen, so daß die nämliche Formel für einerlei Richtung und für entgegengesetzte Richtungen gelten kann. Es seien immer M und m beide Körper, hingegen G und g deren Geschwindigkeiten vor dem Stoße. Im Falle der nämlichen Richtung soll M allemal den verfolgenden Körper vorstellen. Im Falle der entgegengesetzten Richtung aber ist M der Körper, der die größte Quantität der Bewegung hat. Wir wollen M in beiden Fällen den stoßenden, und m den gestoßenen Körper nennen.

Die Geschwindigkeit des stoßenden ist demnach allemal nach dem Stoße

$$2\,\frac{MG \pm mg}{M + m} - G = \frac{MG \pm 2mg - mG}{M + m}$$

und

und die Geschwindigkeit des gestoßenen ist

$$2\,\frac{MG \pm mg}{M + m} \mp g = \frac{2MG \pm mg \mp Mg}{M + m}$$

wo das obere Zeichen für einerlei Richtung, das untere aber für entgegengesetzte Richtungen gilt.

Exempel. Es sei $M = 10$, $G = 59$, $m = 15$, $g = 24$, und es gehen beide Körper nach derselbigen Gegend hin, so ist

$$2\,\frac{MG + mg}{M + m} - G = 17$$

$$2\,\frac{MG + mg}{M + m} - g = 52$$

Wenn die Körper einander entgegen laufen, so ist

$$2\,\frac{MG - mg}{M + m} - G = -40\tfrac{3}{5}$$

$$2\,\frac{MG - mg}{M + m} + g = +42\tfrac{2}{5}$$

Der stoßende Körper gehet also zurück mit einer Geschwindigkeit von $40\frac{3}{5}$, und der andere gehet in der Richtung des stoßenden mit einer Geschwindigkeit von $42\frac{2}{5}$.

Zusatz I. Dieses Exempel bestätiget die Regel, daß die relativen Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoße gleich sind (§. 11, Zus. I, und §. 12, Zus. I). Denn da $G = 59$ und $g = 24$, so ist die relative Geschwindigkeit, wenn beide Körper in einer Richtung gehen, $59 - 24 = 35$ vor dem Stoße. Nach dem Stoße wird sie $52 - 17 = 35$. Wenn beide Körper einander entgegen kommen, so ist in unserem Exempel die relative Geschwindigkeit vor dem Stoße $59 + 24 = 83$, und nach dem Stoße $40\frac{3}{5} + 42\frac{2}{5} = 83$.

Zusatz II. Aus dem nämlichen Exempel läßt sich auch ersehen, wie die Summe der Produkte jeder Masse mit dem Quadrate ihrer Geschwindigkeit vor und nach dem Stoße gleich viel beträgt (§. 11, Zusatz VIII, und §. 12, Zusatz VIII).

Vor dem Stoße hat man

$$10 \times (59)^2 + 15 \times (24)^2 = 43450$$

Nach dem Stoße in gleicher Richtung

$$10 \times (17)^2 + 15 \times (52)^2 = 43450$$

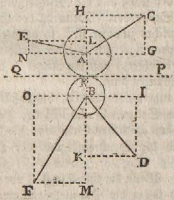
Nach dem Stoße in entgegengesetzter Richtung

$$10 \times (40\tfrac{3}{5})^2 + 15 \times (42\tfrac{2}{5})^2 = 43450$$

§. 14.

Aufgabe.

Zwei vollkommen elastische Kugeln wirken, vermittelst eines schiefen Stoßes, auf einander: es soll die Richtung und Geschwindigkeit einer jeden nach dem Stoße bestimmet werden.



Gesetzt,

Gesetzt, die vollkommen elastischen Kugeln A und B gehen mit den Geschwindigkeiten CA und DB, und stoßen bei R an einander. Man lege in Gedanken die Ebne PQ, welche beide Kugeln bei R berühre. Wir wollen für jetzt annehmen, die Richtungen CA und DB liegen in einer Ebne; so beschreibe man in dieser Ebne die Parallelogramme GH und IK, so daß CH, GA, IB und DK mit der Ebne PQ parallel, hingegen CG, HA, ID, BK darauf senkrecht seien.

Nun ist die Bewegung A × CA in zwei andere A × HA und A × GA zerleget. Eben so ist die Bewegung B × DB in B × KB und B × IB zerleget. Die Bewegungen A × HA und B × KB, wenn man sie allein betrachtet, verursachen einen geraden Stoß, dessen Wirkung sich allemal durch §. 12 berechnen läßt. Gesetzt, man finde, diese Wirkung bestehe darin, daß die Kugel A mit der Geschwindigkeit AL zurück gehet, und daß B mit der Geschwindigkeit BM ebenfalls zurück gehet, so merke man auf der Linie HM, die durch beide Mittelpunkte gehet, die Punkte L und M. Man verlängere GA, bis daß AN = GA, und mache mit den Seiten AL und AN das Parallelogramm LN. Man ziehe die Diagonal-Linie AE, so stellet diese den Weg und die Geschwindigkeit der Kugel A nach dem Stoße vor. Denn da der Geschwindigkeit AN (= GA) nichts zuwider ist, so bleibet sie nach dem Stoße, und vereiniget sich mit der Geschwindigkeit AL, woraus dann erfolget, daß die Kugel A die Diagonal-Linie AE durchlaufen muß.

Man verlängere ebenfalls IB, bis daß BO = IB, und mache aus den Seiten BO und BM das Parallelogramm OM, so ist, aus ähnlichen Gründen, die Diagonale BF der Weg und die Geschwindigkeit der Kugel B nach dem Stoße.

Zusatz I. Wenn die eine Kugel B vor dem Stoße in Ruhe ist, so fallen die Parallelogramme IK und OM weg. Die Kraft A × HA wirket allein auf B, und B

gehet

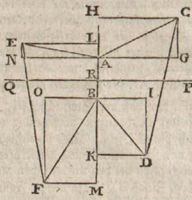
gehet in der Richtung BM dieser Kraft fort. Die Kugel A kann, nach Umständen, vorwärts oder rückwärts gehen: in allen Fällen lassen sich aber die beiden Geschwindigkeiten der Kugel in der Linie HM bestimmen (§. 11, Zus. VII). Nun bleibet nichts übrig, als die Geschwindigkeiten GA (= AN) und AL, wie vorher zusammen zu setzen, um den Weg AE der stoßenden Kugel zu finden.

Zusatz II. Um daß der Stoß schief sei, ist nicht die schiefe Lage beider Richtungen nothwendig erforderlich; sie können auch parallel sein. Dann geschiehet übrigens die Zerlegung und Zusammensetzung der Kräfte immer wie vorher, wie auch schon bei den unelastischen Kugeln gezeiget worden (§. 9, Zusatz II). In diesem Falle ist allemal gewiß, daß beide Richtungen in einer Ebne liegen, indem durch zwei gleichlaufende Linien jedesmal eine Ebne geleget werden kann.

Zusatz III. Wenn die Richtungen vor dem Stoße in einer Ebne liegen, so bleiben sie auch nach dem Stoße in derselbigen Ebne. Wenn die Richtungen vor dem Stoße nicht in einer Ebne sind, so sind sie es auch nicht nach dem Stoße; und es bleibet in diesem letztern Falle die Konstrukzion der Aufgabe unverändert, nur daß man sich drei Ebnen gedenken muß, die eine, welche beide Kugeln zugleich berühret, und zwei anderen, die durch beide Richtungs-Linien gehen, und auf der berührenden senkrecht stehen. Dieses alles wird, wie bei den unelastischen Kugeln, bewiesen (§. 9, Zus. IV und V).

Zusatz IV. Im schiefen Stoße, so wie im geraden, ist die relative Geschwindigkeit einer vollkommen elastischen Kugel nach dem Stoße und vor demselben einerlei. Das heißt, in solchen Zeitpunkten, die vom Augenblicke des Stoßes, vor und nach demselben, gleich weit entfernet sind, befinden sich die Kugeln in gleichen Entfernungen von einander.

In



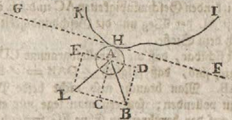
In gegenwärtiger Zeichnung beziehen sich alle Linien und Buchstaben auf die vorhergehende Figur (Seite 93). Nur sind noch die Linien CD und EF hinzugekommen. CD ist die Entfernung beider Körper 1 Sekunde (zum Exempel) vor dem Stoße, und EF ihre Entfernung 1 Sekunde nach dem Stoße. Um zu beweisen, daß EF = CD muß gezeiget werden, daß die Trapezen LMFEL und HKDCH ähnlichgleich sind. Erstens, da in den Richtungen HA und KB ein gerader Stoß geschiehet, so ist bei vollkommen elastischen Körpern die relative Geschwindigkeit in der Linie HM nach dem Stoße so groß als vor demselben (§ 12, Zus. I). Also ist LM = HK. Ferner ist gemacht worden LE = GA, und MF = KD. Die Winkel bei L und H, desgleichen bei M und K sind, als rechte, gleich. Man kehre in Gedanken das Trapezium LF um, und lege es auf das andere HD, so daß LM die HK bedecke, so wird auch EF die CD bedecken. Folglich ist EF = CD.

§. 15.

§. 15.

Aufgabe.

Man soll den Weg und die Geschwindigkeit einer vollkommen elastischen Kugel finden, die an einen ganz unbeweglichen elastischen Körper anstößt.



Es sei IHK der unbewegliche Körper oder ein Theil desselben, A die Kugel, BA ihre Richtung und Geschwindigkeit vor dem Stoße, FG die Ebne, welche die Kugel und den andern Körper im Punkte H des Zusammenstoßes berühret. Durch BA lege man in Gedanken eine Ebne, die auf der berührenden senkrecht sei, und ziehe in derselben AC und BD auf FG senkrecht, hingegen AD und BC mit FG parallel, so ist die Bewegung A × BA in A × CA und A × DA zerleget. Die Bewegung A × CA wirket senkrecht gegen die Stelle H des unbeweglichen Körpers oder gegen die berührende Ebne FG. Diese Bewegung A × CA läßt sich also weiter nicht zerlegen, sie drücket die Kugel gegen die Ebne, machet die Kugel etwas platt, und verursachet in dem unbeweglichen Körper bei H eine kleine Vertiefung. Nachdem dieses geschehen ist, so wirket die Kraft der Wiederherstellung in entgegengesetzter Richtung, und da diese Kraft vollkommen angenommen wird, so ist sie im Stande den Körper A mit der nämlichen Geschwindigkeit AC zurückzutreiben, mit welcher er senkrecht angekommen ist. Also bekömmt die Kugel die senkrechte Geschwindigkeit AC nach dem Stoße. Zugleich behält sie die Geschwindigkeit DA, welcher nichts entgegen stehet. Man mache demnach AE = DA in der Verlängerung der DA. Aus den Seiten AE und AC mache man das Parallelogramm CE, und ziehe die Diagonal-Linie AL, so stellet diese diejenige Geschwindigkeit vor, welche aus den zusammenwirkenden Geschwindigkeiten AC und AE entstehet. Folglich ist AL der Weg und die Geschwindigkeit der Kugel A nach dem Stoße.

Es ist sichtbar, daß die Parallelogramme CD und CE ähnlichgleich sind, daß folglich $\angle$ DAB = $\angle$ EAL und AL = AB. Man braucht also nicht beide Parallelogramme zu vollenden; sondern man lege nur eine Ebne durch BA auf der berührenden Ebne FG senkrecht, ziehe darin DE mit FG parallel, mache $\angle$ EAL = $\angle$ DAB, und AL = BA. Oder man errichte AC auf der Ebne FG senkrecht, lege durch AC und AB eine Ebne, und mache in derselben $\angle$ CAL = $\angle$ CAB, und AL = BA; so hat man jedesmal den Weg und die Geschwindigkeit AL der Kugel nach dem Stoße.

Wenn es sich trift, daß die Richtung vor dem Stoße gegen den unbeweglichen Körper senkrecht ist, so findet gar keine Zerlegung ihrer Bewegung Statt, sondern sie prallet bloß zurück, in derselbigen Linie in welcher sie angekommen ist, und mit derselbigen Geschwindigkeit. Z. E. die Kugel komme in der Richtung und mit der Geschwindigkeit CA, so gehet sie nach C zurück, wie kurz vorher bemerket worden. Hier fällt DA weg, folglich auch AE, und das ganze Parallelogramm EC.

Zusatz I. Wenn die vollkommen elastische Kugel gegen eine vollkommen elastische unbewegliche Ebne stößt, so geschiehet alles wie vorher. Man darf nur anstatt der eingebildeten berührenden Ebne FG die wirkliche Ebne setzen; kömmt also die Kugel in schiefer Richtung an, so prallet

prallet sie mit der nämlichen Geschwindigkeit von der Ebne ab, indem sie beim Ankommen und Weggehen gleiche Winkel machet, sowohl mit der Ebne als auch mit der senkrechten Linie, die man sich im Berührungs-Punkte vorstellet. Kömmt aber die Kugel in senkrechter Richtung gegen die Ebne, so gehet sie mit unveränderter Geschwindigkeit in derselbigen senkrechten Richtung zurück.

Zusatz II. Wenn zwei vollkommen elastische Körper gerade aneinander stoßen, so haben wir gesehen (§. 13) die Geschwindigkeit des stärkern nach dem Stoße sei

$$2\,\frac{MG \pm mg}{M+m} - G$$

und die Geschwindigkeit des schwächern

$$2\,\frac{MG \pm mg}{M+m} \mp g$$

Es sei nun $m = \infty$ und $g = \frac{1}{\infty}$, das heißt, es sei die Masse des Gestoßenen unendlich groß, und deren Geschwindigkeit unendlich klein, so wird die Geschwindigkeit des Stoßenden

$$2\,\frac{MG \pm \infty\,\frac{1}{\infty}}{M+\infty} - G$$

$$\text{oder } 2\,\frac{MG \pm 1}{M+\infty} - G = -G$$

das heißt, der stoßende Körper gehet mit seiner vorigen Geschwindigkeit zurück. Die Geschwindigkeit des gestoßenen wird

$$2\,\frac{MG \pm 1}{M+\infty} \mp \frac{1}{\infty} = 0$$

das heißt, er bleibet in Ruhe. Dieses bestätiget noch die Regel, daß ein vollkommen elastischer Körper, der senkrecht gegen einen unbeweglichen Körper stößt, mit unveränderter Geschwindigkeit zurück prallet. Denn anstatt des unbeweglichen Körpers kann man allemal einen solchen betrachten, der eine unendliche Masse und eine unendlich kleine Geschwindigkeit hat (§. 10, Zus. II). Und da jeder schiefe Stoß, wie bei dem Beweise geschehen ist, in einen senkrechten und einen parallelen zerleget wird, von welchen der senkrechte das gedachte Zurückprallen verursachet, der parallele aber unverändert bleibet, so hat auch dieses seine Richtigkeit, daß das Parallelogramm der Kräfte nach dem Stoße mit dem vor dem Stoße ähnlichgleich ist.

Anmerkung. Da der Fall oft vorkömmt, daß elastische Körper gegen unbewegliche Körper oder Flächen stoßen, so hat man, der Kürze wegen, einige Kunstwörter eingeführet, die sich darauf beziehen. Das Zurückprallen wird Reflexion genannt. Die Ebne FG woran der Körper stößt, oder die den gestoßenen und den stoßenden Körper zugleich berühret, heißt die reflektirende Ebne. Die Ebne BE worin der Weg des Körpers sowohl vor als nach dem Stoße lieget, heißt die Reflexions-Ebne. Diese ist allemal auf der reflektirenden Ebne senkrecht. FG stellet eigentlich den Durchschnitt beider Ebnen vor, und heißt die reflektirende Linie. Der Punkt H wo der Stoß geschiehet, ist der Reflexions-Punkt. Der Winkel BAC den die Richtung vor dem Stoße mit der auf FG senkrechten AC machet, ist der Einfalls-Winkel (angle d'incidence). Hingegen der Winkel CAL den die Richtung nach dem Stoße mit derselbigen AC machet, ist der Reflexions-Winkel, und dieser ist bei vollkommen elastischen Körpern allemal dem Einfalls-Winkel gleich. Andere Autoren halten $\angle$ BAD für den Einfalls-Winkel, und $\angle$ LAE für den Reflexions-Winkel, und auch bei diesen Erklärungen sind beide Winkel für vollkommen elastische Körper gleich. Die Linie AL worin

worin der Körper nach dem Stoße gehet, heißt die Reflexions-Linie. Die gebrochene Linie BAL worin der Körper vor und nach dem Stoße gehet, ist die Reflexions-Straße oder Reflexions-Bahn.

Alle diese Wörter sind vornehmlich in der Katoptrik, oder Lehre von den Spiegeln, gebräuchlich, wo man sich die Theilchen der Licht-Materie als kleine vollkommen elastische Kugeln vorstellet, welche an den Spiegel stoßen, und von ihm zurückprallen. Jedoch bedienet man sich auch bei andern Gelegenheiten der nämlichen Kunstwörter, und deswegen habe ich sie hier angeführet.

§. 16.

Wir haben bisher den Stoß zweier Körper untersuchet, die entweder alle beide unelastisch oder alle beide vollkommen elastisch sind.

Wenn der eine Körper unelastisch und der andere vollkommen elastisch ist, so erfolget alles genau, als wenn beide vollkommen elastisch wären. Denn man kann die elastischen Theilchen, die bei dem Stoße zusammengedrücket werden, als lauter kleine Springfedern (ressorts) betrachten. Nun bedenke man, daß es bei der Wirkung solcher Springfedern gar nicht auf ihre Menge ankömmt, sondern auf den Grad ihrer Elastizität. Sind sie vollkommen elastisch, so können sie, nachdem sie zusammengedrücket worden, weiter nichts thun, als den Körper, oder die Körper durch welche sie zusammen gepresset worden, in entgegengesetzter Richtung mit derselbigen Quantität der Bewegung zurückzutreiben, die zum Eindrücken angewandt worden. Dieses vorausgesetzet, so ist klar, daß, wenn nur einer von zwei an einander stoßenden Körpern vollkommen elastisch ist, weniger Springfedern vorhanden sind und zusammengedrücket werden, als wenn alle beide elastisch sind. Hingegen da diese wenigeren doch alle eine vollkommene Schnellkraft haben, so thun sie die nämliche Wirkung, und treiben beide Körper eben so aus einander, als wenn es mehrere wären, oder als wenn beiderseits welche vorhanden wären. Alles erfolget demnach in beiden Fällen auf einerlei Art.

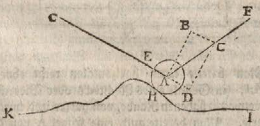
Dieses gilt also auch von der Reflexion der Körper. Der Reflexions-Winkel ist allemal dem Einfalls-Winkel gleich, sowohl wenn die reflektirende Fläche und der einfallende Körper beide vollkommen elastisch sind, als auch wenn nur die Fläche allein oder der einfallende Körper allein elastisch ist.

Anmerkung I. Bei dieser Gelegenheit kann man noch merken, daß unter verschiedenen Körpern nicht allemal diejenigen am meisten elastisch sind, die sich beim Stoße mehr zusammen drücken. Denn, wie eben gesagt worden, es kömmt gar nicht auf die Menge der zusammengedrückten Springfederchen, sondern nur auf ihre Wiederherstellungs-Kraft an. Obgleich also eine elfenbeinerne Kugel sich beim Stoße nur unmerklich eindrükket, so ist sie doch eben so elastisch, wo nicht mehr, als der beste Spring-Ball, der seine Gestalt beim Stoße merklicher verändert.

Anmerkung II. Das Zurückprallen eines Körpers von einer unbeweglichen Fläche rühret nicht allemal von der Elastizität her, sondern auch manchmal von der Weichheit oder der Flüssigkeit der Fläche oder eigentlich des Körpers, zu welchem die Fläche gehöret. Z. E. wenn eine Kanonenkugel in sehr schiefer Richtung auf die Erde fällt, oder wenn ein Stein ebenfalls in sehr schiefer Richtung auf eine Wasserfläche geworfen wird, so prallen diese Körper von der Fläche ab, woran sie gestoßen haben, und machen Sprünge, die man ricochets nennet. Dieses geschiehet also. Die Bewegung oder Kraft des geworfenen Körpers kann im Zeitpunkte, da der Stoß geschiehet,

geschiehet, in zwei Kräfte zerleget werden, wovon die eine horizontal ist, und sich bestrebet den geworfenen Körper längs der Ebne fortzutreiben; die andere aber ist vertikal und wirket niederwärts um den geworfenen Körper in den andern hineinzutreiben. Ist nun diese letzte Kraft nur klein, wie bei einer sehr schiefen Richtung geschiehet, so dringet, während der Zeit der Berührung, der geworfene Körper nur wenig ein. Sein Schwerpunkt bleibet oberhalb der Fläche, wird von der horizonten Kraft fortgetrieben, und begiebt sich unterdessen nach der Seite hin, wo der wenigste Widerstand ist, also nach oben, wo nur Luft ist. Dadurch bekömmt der geworfene Körper eine Richtung, die in schiefer Lage aufwärts gehet, und da er einmal diese Richtung angenommen hat, so fähret er fort schief aufzusteigen, bis ihn seine Schwere wieder herunter bringet. Wenn dieses geschehen ist, so kann er auf eine ähnliche Art einen zweiten, dritten Sprung u. s. f. machen.

Anmerkung III. Es geschiehet auch manchmal eine Reflexion, die nur scheinbar ist. Gesetzt, die unelastische Kugel A komme in der Richtung FA mit der Geschwindigkeit CA, und stoße an einen harten Hügel bei H;

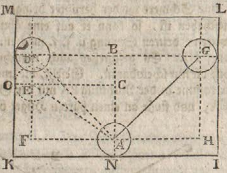


so zerleget sich die Geschwindigkeit CA in zwei andere BA und DA. Die erste ist auf die Fläche des Hügels bei H senkrecht, und wird vernichtet. Die andere ist mit derselbigen Fläche des Hügels parallel, und bleibet unverändert; sie treibet die Kugel in der Richtung AG der verlängerten DA, mit der Geschwindigkeit AE (= DA). Die Kugel entfernet sich demnach von der Fläche IK. Und wenn der Hügel klein genug ist um nicht bemerket zu werden, so scheinet eine Reflexion zu geschehen, obgleich alles, wie bei dem gewöhnlichen Stoße unelastischer Körper vorgehet.

§. 17.

Aufgabe.

Es soll der Grad der Schnellkraft einer festen Materie bestimmt werden.



Man bereite einen horizontalen recht ebnen Tisch IKMLI, in Gestalt eines Rechtecks oder Vierecks, mit einem etwas erhabenen Rande, von harter und unelastischer Materie. Man bereite auch eine Kugel A von der Materie die man probiren will. Man ziehe auf dem Tische gerade Linien mit den Rändern parallel, in der Entfernung des Halbmessers der Kugel. Die eine HF dieser Linien halbire man in A. Man stelle die Kugel irgendwo an dem

dem einen Rande, z. E. in G, und stoße sie gerade hin nach A, so daß sie den Rand IK in der Mitte N berühre. Ob man richtig gezielet hat, wird man bei N erkennen, wenn man die Kugel mit etwas Oel oder sonst einer klebrichten Materie bestrichen hat. Von A wird die Kugel irgendwo nach E zurückprallen, und am Rande bei O ein Merkmal ihres Anstoßes zurücklassen, so daß man den Ort E des Mittelpunktes findet, wenn man OE mit AF parallel ziehet.

Man messe GH und FE, so verhält sich die Elastizität der gegebenen Materie zur vollkommenen Elastizität, wie FE zu GH. Es sei FE 2 Fuß, und GH = 3 Fuß, so ist das Verhältniß wie 2 zu 3, oder die versuchte Materie hat nur $\frac{2}{3}$ einer vollkommenen Elastizität. Denn man errichte AB senkrecht auf HF, man ziehe auch GD mit HF parallel, so zerleget sich die Geschwindigkeit GA in BA und HA. Die Geschwindigkeit HA bleibet unverändert, und treibet den Körper nach F, so daß AF = HA, vermittelst der Geschwindigkeit BA, würde der Körper nach B zurückprallen, wenn er vollkommen elastisch wäre. Die vollkommene Elastizität gäbe ihm demnach die Geschwindigkeit AB = FD. Da er aber nur bis nach E gekommen ist, so ziehe man EC mit AF parallel; dann ist AE die Diagonal-Linie des Parallelogramms CF, und die Geschwindigkeit AE ist aus den Geschwindigkeiten AF und AC (= FE) zusammengesetzet. Die unvollkommene Elastizität war also nur im Stande, die Kugel von A nach C zurück zu treiben. Also verhält sich in der That diese unvollkommene Elastizität zur vollkommenen, wie AC zu BA, oder wie EF zu GH.

§. 18.

Hypothese.

Wenn zwei unvollkommen elastische Körper an einander stoßen, so hänget die nach dem Stoße ent-

entstehende Geschwindigkeit beider Körper bloß von dem Grade der Elastizität desjenigen Körpers ab, der am meisten Elastizität hat; und es ist der Erfolg der nämliche, es mag der andere Körper entweder gar keine Elastizität haben, oder welchen Grad derselben man will, wenn er nur kleiner ist, als im ersten Körper. Auch, wenn beide Körper einerlei Elastizität haben, so ist der Erfolg noch der nämliche, als wenn der eine eine schwächere, oder gar keine Elastizität hätte.

In den Schriften, die vom Stoße der Körper handeln, werden die unvollkommen elastischen fast ganz übergangen, oder doch nur ganz flüchtig berühret. Ich habe nirgends weder Räsonnements noch Versuche angetroffen, die sich auf den Fall der ungleichen Elastizität beziehen, und bin also gezwungen, meine Zuflucht zu einer Hypothese oder Voraussetzung zu nehmen. Ich halte sie deswegen für wahrscheinlich, weil sie mit den übrigen Gesetzen des Stoßes übereinstimmet. Denn, wenn der eine Körper vollkommen elastisch ist, so kann der andere entweder auch vollkommen elastisch, oder auch ganz unelastisch sein, ohne daß der Erfolg des Stoßes anders ausfalle (§. 16). Es scheinet also, daß auch dieser zweite Körper die mittleren Grade der Elastizität besitzen könnte. Wenn dieses angenommen wird, so scheinet die Aehnlichkeit der Fälle zu erfordern, daß, wenn der eine Körper einen gewissen Grad der Elastizität besitzet, der andere entweder denselben Grad, oder einen schwächeren, oder gar keinen haben könne.

Wenigstens kann diese meine Hypothese die Aufmerksamkeit erregen, und zu weiterem Nachdenken Gelegenheit geben. Da die meisten Körper in der Welt eine unvollkommene Elastizität haben, so ist zu bewundern, daß ein so häufig vorkommender Fall so wenig untersuchet worden ist.

§. 19.

§. 19.

Lehrsatz.

Wenn zwei unvollkommen elastische Körper in einer geraden Linie nach einerlei Richtung gehen, und ein gerader Stoß geschiehet, so gehen sie nach dem Stoße in derselbigen geraden Linie, aber abgesondert, und ihre Geschwindigkeiten werden gefunden, wenn man erstlich die gemeinsame Geschwindigkeit im unelastischen Zustande berechnet, zu derselben einen Theil von ihr selbst addiret, der mit dem Grade der größeren Elastizität gleichverhaltend sei, und dann von der Summe einen ähnlichen Theil jeder Geschwindigkeit vor dem Stoße subtrahiret.

Eine Masse M, mit der Geschwindigkeit G, verfolge eine andere Masse m, welche die Geschwindigkeit g hat, und es geschehe ein gerader Stoß. Wären beide Körper unelastisch, so wäre die gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoße (§. 6)

$$\frac{MG + mg}{M + m}$$

Also hätte M verloren

$$G - \frac{MG + mg}{M + m}$$

Wäre die Elastizität vollkommen, so würde M noch eben so viel verlieren (§. 11). Nun aber ist sie unvollkommen, und es kömmt nur die stärkere Schnellkraft in Betrachtung (§. 18). Es verhalte sich demnach die vollkommene Elastizität zur gegebenen, wie q zu p, oder es sei die gegebene $= \frac{p}{q}$ der vollkommenen Elastizität, welcher Bruch durch Versuche bestimmet werden kann (§. 17).

Nun

Nun wird die Masse M, anstatt eben so viel zu verlieren, als sie schon verloren hat, durch die Wiederherstellung nur noch $\frac{p}{q}$ des vorigen Verlustes leiden. Also verlieret M überhaupt

$$\left(1+\frac{p}{q}\right).\left(G-\frac{MG+mg}{M+m}\right)$$

oder $\left(1+\frac{p}{q}\right).G-\left(1+\frac{p}{q}\right).\left(\frac{MG+mg}{M+m}\right)$

Folglich behält M

$$G-\left(1+\frac{p}{q}\right).G+\left(1+\frac{p}{q}\right).\left(\frac{MG+mg}{M+m}\right)$$

oder $\left(1+\frac{p}{q}\right).\left(\frac{MG+mg}{M+m}\right)-\frac{p}{q}G$

welches mit unserm Lehrsatz für den verfolgenden Körper übereinstimmet. Was den verfolgten betrift, so wäre seine Geschwindigkeit nach dem Stoße im unelastischen Zustande

$$\frac{MG+mg}{M+m}$$

Er gewinnet demnach

$$\frac{MG+mg}{M+m}-g$$

Nun gewinnet er durch die Wiederherstellung, weil sie unvollkommen ist, nur noch $\frac{p}{q}$ dieses Gewinnstes, also gewinnet er überhaupt

$$\left(1+\frac{p}{q}\right).\left(\frac{MG+mg}{M+m}-g\right)$$

oder

oder $\left(1+\frac{p}{q}\right).\left(\frac{MG+mg}{M+m}\right)-\left(1+\frac{p}{q}\right).g$

Er hatte aber g, also bekömmt er überhaupt

$$\left(1+\frac{p}{q}\right).\left(\frac{MG+mg}{M+m}\right)-\left(1+\frac{p}{q}\right).g+g$$

das ist $\left(1+\frac{p}{q}\right).\left(\frac{MG+mg}{M+m}\right)-\frac{p}{q}g$

welches wiederum, für den verfolgten Körper, mit unserem Lehrsatze überein kömmt.

Zusatz. Die relative Geschwindigkeit vor dem Stoße verhält sich zu der relativen Geschwindigkeit nach dem Stoße, wie die vollkommene Elastizität zur gegebenen. Denn, von

$$\left(1+\frac{p}{q}\right).\left(\frac{MG+mg}{M+m}\right)-\frac{p}{q}g$$

subtrahire man

$$\left(1+\frac{p}{q}\right).\left(\frac{MG+mg}{M+m}\right)-\frac{p}{q}G$$

so bleibet $\frac{p}{q}G-\frac{p}{q}g$

oder $\frac{p}{q}.(G-g)$

wo $G-g$ der relativen Geschwindigkeit vor dem Stoße gleich ist (Hauptst. I, §. 6). Wenn man nun die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße x nennet, so ist

$$x=\frac{p}{q}.(G-g)$$

oder $qx=p.(G-g)$

oder $(G-g):x::q:p.$

Anmer-

Anmerkung. Aus den gefundenen Formeln ließen sich noch verschiedene Folgerungen ziehen, wie wir bei den vollkommen elastischen Körpern gethan haben (§. 11). Wir wollen aber, der Kürze halben, dem Leser die Entwickelung derselben überlassen.

§. 20.

Wenn zwei unvollkommen elastische Körper in entgegengesetzter Richtung gehen, und ein gerader Stoß geschiehet, so erfolget alles wie im vorigen Falle, außer, daß bei dem schwächeren Körper der verhältnißmäßige Theil seiner Geschwindigkeit nicht subtrahiret, sondern addiret werden muß.

Dieses könnte, wie im vorigen Paragraph, und wie bei vollkommen elastischen Körpern (§. 12), aus der Beschaffenheit der Wiederherstellung bewiesen werden. Indessen kann man es auch aus den Formeln des vorigen Paragraphs schließen, wenn man annimmt, die Bewegung $M \times G$ übertreffe $m \times g$, und g sei negativ, weil sich m in entgegengesetzter Richtung beweget. Durch die bloße Veränderung des $+g$ in $-g$ erhält man alsdann für die Geschwindigkeit des stärkeren Körpers

$$\left(1 + \frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{MG - mg}{M + m}\right) - \frac{p}{q} G$$

und für die Geschwindigkeit des schwächeren

$$\left(1 + \frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{MG - mg}{M + m}\right) + \frac{p}{q} g$$

wo $\frac{MG - mg}{M + m}$ die Geschwindigkeit nach dem Stoße für den Fall der mangelnden Elastizität ist (§. 7).

Zusatz I. Es wird bei diesen Formeln angenommen, daß der stärkere Körper M seine Richtung nicht verändert, und

und fortfährt, obgleich langsamer, vorwärts zu gehen. Das Gegentheil muß sich ausweisen, wenn die Formel für seine Geschwindigkeit in einem gegebenen Falle eine negative Zahl giebt. Indessen, wenn man bei der Voraussetzung bleibet, so ist der Unterschied beider Geschwindigkeiten der relativen Geschwindigkeit nach dem Stoße gleich.

Von $\left(1 + \frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{MG - mg}{M + m}\right) + \frac{p}{q} g$

subtrahire $\left(1 + \frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{MG - mg}{M + m}\right) - \frac{p}{q} G$

so bleibet $\frac{p}{q} g + \frac{p}{q} G$

oder $\frac{p}{q} \cdot (g + G)$

wo $g + G$ die relative Geschwindigkeit vor dem Stoße war, indem die Körper einander entgegen kamen (Hauptstück I, §. 7). Es sei die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße $= x$, so ist demnach

$$x = \frac{p}{q} \cdot (g + G)$$

oder $(G + g) : x :: q : p$

das heißt, die relativen Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoße verhalten sich wie die vollkommene und die gegebene Elastizität, eben wie in dem Falle, wo beide Körper vor dem Stoße nach einerlei Gegend hingingen (§. 19, Zusatz).

Zusatz II. Wenn man die Formeln dieses und des vorigen Paragraphs zusammen nimmt, so hat man für die

die Geschwindigkeit des stoßenden und des gestoßenen Körpers nach dem Stoße

$$\text{I)}\ \left(1+\frac{p}{q}\right)\cdot\frac{MG \pm mg}{M+m} - \frac{p}{q}G$$

$$\text{II)}\left(1+\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{MG \pm mg}{M+m} \mp \frac{p}{q}g\right)$$

wo das obere Zeichen für einerlei Richtung und das untere für entgegengesetzte Richtungen gilt.

Anmerkung. Die verschiedenen Folgerungen aus den Formeln überlassen wir wiederum dem Leser.

§. 21.

Aufgabe.

Es kommen zwei unvollkommen elastische Kugeln zusammen, so daß ein schiefer Stoß geschiehet. Man soll den Weg und die Geschwindigkeit jeder Kugel nach dem Stoße bestimmen.

Die Auflösung geschiehet wie bei vollkommen elastischen Körpern. Nämlich man gedenket sich eine Ebne welche beide Kugeln da berühret, wo sie zusammen stoßen. Man zerleget die Bewegung, die jede Kugel vor dem Stoße hat, in eine senkrechte und eine parallele, in Betrachtung der gedachten Ebne. Nun betrachtet man erstlich bloß die senkrechten Bewegungen und den geraden Stoß, der daraus entstehet. Man betrachtet die Geschwindigkeiten, die aus diesem Stoße erfolgen müssen, und setzet sie zusammen mit den parallelen Geschwindigkeiten, woraus sich dann die Diagonal-Linien ergeben, welche die Richtungen und Geschwindigkeiten nach dem Stoße vorstellen.

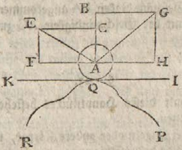
Nur ist im gegenwärtigen Falle zu bemerken, daß die aus dem geraden Stoße entstehenden Geschwindigkeiten so berechnet werden müssen, wie es die unvollkommene Elastizität mit sich bringet, und wie im vorhergehenden Paragraph gezeiget worden.

§. 22.

Aufgabe.

Es soll der Weg und die Geschwindigkeit einer unvollkommen elastischen Kugel bestimmt werden, nachdem sie gegen einen unvollkommen elastischen und unbeweglichen Körper angestoßen hat.

Diese Aufgabe ist im Grunde schon im 17ten Paragraph aufgelöset worden, wo wir gezeiget haben, wie der Grad der Elastizität eines Körpers bestimmet werden kann.



Es sei IK eine unbewegliche Ebne, oder wenigstens die eingebildete Ebne die den unbeweglichen Körper PRQ und die Kugel an dem Orte R berühret, wo diese anstößt. Nun kömmt es darauf an, welcher von beiden Körpern die größte Elastizität hat; denn nach dieser größeren richtet sich allemal der Erfolg (§. 18). Deswegen nahmen wir an, dort, wo die Elastizität der Kugeln allein bestimmet werden sollte, daß die Ebne gar keine Elastizität hätte; wir hätten sie auch bloß weniger elastisch, als die Kugel, annehmen können. Hier aber ist es gleich viel, welche von beiden Elastizitäten die größere sei. Nachdem die Geschwindigkeit GA vor dem Stoße in zwei andere, BA und HA, eine senkrechte und eine parallele, zerleget worden, so verlängert man HA, bis daß AF = HA. Gesetzt nun, die größere Elastizität, entweder in der Kugel oder in der Ebne, sei $\frac{p}{q}$ der vollkommenen, so nehme man rückwärts AC auf BA, so daß $q : p :: BA : CA$, und folglich $CA = \frac{p}{q} BA$. Aus den Seiten AF und AC mache man das Parallelogramm CF, so zeiget die Diagonal-Linie AE den Weg und die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stoße.

Zusatz. Ist die Kugel senkrecht in der Richtung, und mit der Geschwindigkeit BA angekommen, so prallet sie senkrecht mit der Geschwindigkeit AC zurück, so daß $AC = \frac{p}{q} BA$.

§. 23.

Der Inhalt dieses Hauptstückes bestehet kürzlich in folgenden Sätzen.

Wenn zwei Kugeln oder andere Körper, welche unelastisch sind, beide in derselbigen geraden Linie gehen, und sich so stoßen, daß sie aus dieser geraden Linie nicht ausweichen können, so bleiben sie nach dem Stoße zusammen, und gehen mit einander fort, mit einer Geschwindigkeit, die man erhält, wenn man die Summe oder Differenz der Quantitäten der Bewegung vor dem Stoße durch die Summe der Massen dividiret. Die Summe der Bewegungen gilt für den Fall, wo die Richtungen nach derselbigen Gegend hinzielen; und dann ist auch die Richtung nach dem Stoße noch dieselbige. Die Differenz ist für den Fall, wo die Richtungen entgegengesetzet sind, und dann geschiehet die Bewegung nach dem Stoße allemal in der Richtung des stärkeren Körpers, das heißt, desjenigen, bei welchem das Produkt aus der Masse und Geschwindigkeit am größten ist. Jedoch kann auch im letzten Falle nach dem Stoße die bloße Ruhe entstehen,

näm-

nämlich, wenn beide Quantitäten der Bewegung gleich sind, und also die Geschwindigkeit nach dem Stoße null wird.

Hierbei ist noch zu bemerken, daß die Summe oder die Differenz der Quantitäten der Bewegung vor dem Stoße allemal gleich ist der Summe gedachter Quantitäten nach dem Stoße.

Geschiehet der Stoß so, daß beide Körper von ihren Richtungen ausweichen können, so werden die Bewegungen vor dem Stoße, jede in zwei andere, zerleget, so daß man ein Paar Bewegungen bekömmt, welche parallel sind, und ein Paar andere, welche einen bloß geraden Stoß verursachen. Er wird erstlich die gemeinsame Geschwindigkeit gesucht, welche aus diesem geraden Stoße entstehet; und hernach wird diese Geschwindigkeit bei jedem Körper mit derjenigen zusammen gesetzet, die zum parallelen Paare gehörte.

Wenn der Stoß gegen eine unbewegliche Ebne geschiehet, so zerleget man die Bewegung in eine, die auf die Ebne senkrecht ist, und eine andere, die mit derselben parallel ist. Die leztere allein bleibet nach dem Stoße.

Alles dieses ging nur die unelastischen Körper an; nun kommen wir zu denen, die vollkommen elastisch sind, oder gedacht werden.

Wenn zwei vollkommen elastische Körper gerade an einander stoßen, so bleiben sie nicht, wie die unelastischen, zusammen; sondern jeder bekömmt seine Geschwindigkeit für sich. Diese wird also gefunden. Man suchet erstlich die gemeinsame Geschwindigkeit, als wenn die Körper unelastisch wären; diese wird gedoppelt. Hernach wird für jeden Körper diejenige Geschwindigkeit subtrahiret oder addiret, die er vor dem Stoße hatte. Das Subtrahiren ist für den Fall, wo die Richtungen vor dem Stoße einerlei waren. Wenn sie entgegengesetzet waren, so wird nur für den stärkeren Körper (der mehr Quantität der Bewegung hatte) subtrahiret, für den schwächeren aber addiret.

Bei solchen Stößen bleibet die relative Geschwindigkeit nachher wie vorher. Bei einerlei Richtung vor dem Stoße behält der verfolgte Körper nach dem Stoße immer dieselbige Richtung, der verfolgende aber kann nach Umständen vorwärts oder rückwärts gehen, auch wohl ruhend bleiben. Bei entgegengesetzten Richtungen kann dieses alles sowohl dem einen als dem anderen Körper widerfahren. Wenn beide Massen gleich sind, so vertauschen sie allemal nach dem Stoße ihre Geschwindigkeiten. Wenn die Massen gleich sind, und die eine vor dem Stoße ruhend ist, so ruhet die vorher bewegte, und sie giebt der vorher ruhenden ihre Geschwindigkeit. Die Summe der Produkte aus jeder Masse, mit dem Quadrate ihrer Geschwindigkeit, ist vor und nach dem Stoße gleich.

Ist der Stoß nicht gerade, sondern schief, so zerleget man die Bewegungen vor dem Stoße, wie bei unelastischen Körpern, auf eine solche Art, daß man ein Paar parallele Bewegungen bekomme, und ein anderes Paar, die einen geraden Stoß verursachen. Es wird die aus diesem Stoße entstehende Geschwindigkeit für jeden Körper insbesondere gesuchet, und diese wird mit der parallelen Geschwindigkeit zusammen gesetzet.

Es ist merkwürdig, daß auch beim schiefen Stoße vollkommen elastischer Körper, die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße die nämliche ist, als vorher.

Stößt ein vollkommen elastischer Körper gegen eine vollkommen elastische Ebne, so prallet er zurück, mit unveränderter Geschwindigkeit, und der Reflexions-Winkel ist dem Einfalls-Winkel gleich. Ist er senkrecht gegen die Ebne angekommen, so gehet er in derselbigen Linie zurück.

Wenn ein Körper unelastisch, und der andere vollkommen elastisch ist, so erfolget alles wie in dem Falle, wo beide vollkommen elastisch sind.

Der Grad der Elastizität einer Materie läßt sich bestimmen, wenn man eine Kugel daraus machet, dieselbige gegen eine unelastische Ebne stößt, und dann bemerket, ob sie mehr oder weniger zurück prallet. Die nähere Bestimmung eines solchen Versuches ist am gehörigen Orte angegeben worden.

Wenn von beiden Körpern, die an einander stoßen, der eine mehr oder weniger elastisch ist, als der andere, so kann man annehmen, daß die Wirkungen des Stoßes sich bloß nach der größeren Elastizität richten, und wenn beide in gleichem Grade elastisch sind, so ist der Erfolg der nämliche, als wenn nur einer diesen Grad der Elastizität hätte, der andere aber weniger oder gar nicht elastisch wäre.

Bei dem geraden Stoße unvollkommen elastischer Körper wird fast eben so verfahren, wie bei vollkommen elastischen. Jedoch, anstatt die für den unelastischen Zustand gefundene Geschwindigkeit zu doppeln, muß man nur zu derselben einen Theil addiren, der mit dem Grade der Elastizität gleichverhaltend sei. Und, anstatt die ganze Geschwindigkeit vor dem Stoße zu subtrahiren oder addiren, muß wiederum nur ein solcher Theil davon gebraucht werden.

Bei solchen Körpern verhält sich die relative Geschwindigkeit vor und nach dem Stoße, wie die vollkommene Elastizität zur wirklich vorhandenen.

Ist der Stoß schief, so verfährt man ohngefähr wie bei vollkommen elastischen Körpern; nur muß bei dem geraden Theile des Stoßes auf den Grad der Elastizität Rücksicht genommen werden.

Geschiehet der Stoß gegen eine unbewegliche Ebne, so ist der Reflexions-Winkel größer, als bei vollkommen elastischen Körpern, das heißt, größer, als der Einfalls-Winkel, und dieser Reflexions-Winkel richtet sich nach der größeren Elastizität, es mag diese in der Ebne oder in dem stoßenden Körper vorhanden sein.

Drittes Hauptstück.

Von der einförmig-beschleunigten oder verspäteten Bewegung, wie auch von fallenden und geworfenen schweren Körpern.

§. 1.

Wenn ein Körper bloß durch eine augenblickliche Wirkung einer Kraft in Bewegung gesetzet wird, und sonst kein Hinderniß vorhanden ist, so gehet er in der erhaltenen Richtung, und mit der Geschwindigkeit, die er bekommen hat, immer weiter fort. (Stat. Hauptst. III, §. 3). Seine Bewegung ist demnach einförmig. Hingegen, wenn der Körper von einer solchen Kraft beweget wird, die ihn beständig verfolget und vor sich weg treibet, oder die sonst auf irgend einer Art immer in derselbigen Richtung auf ihn wirket, so gehet er allmählig geschwinder. Seine Bewegung ist also in diesem Falle beschleuniget (Stat. Hauptst. II, §. 23), und eine solche Kraft wird eine **beschleunigende Kraft** genannt. Wenn nun ferner diese Beschleunigung so geschiehet, daß die Kraft in allen gleichen Zeittheilchen gleich stark auf den Körper wirket, und also seine Geschwindigkeit um gleich viel vermehret, so ist die Bewegung auf eine einförmige Art beschleuniget, oder, um kürzer zu reden, es ist eine **einförmig-beschleunigte Bewegung**.

Hinge-

Hingegen, wenn ein Körper zu einer einförmigen Bewegung gereizet worden, ihm aber eine Kraft in entgegengesetzter Richtung widerstehet, die ohne Ablaß auf ihn wirket, und folglich seine Geschwindigkeit vermindert; so ist seine Bewegung **verspätet**, und eine solche Kraft ist eine **verspätende Kraft**. Wenn die gedachte Kraft ihm immer auf einerlei Art widerstehet, so daß sie in gleichen Zeittheilchen seine Geschwindigkeit um gleich viel verkleinert, so bekömmt der Körper eine **einförmig-verspätete Bewegung**.

§. 2.

Lehrsatz.

Bei einer einförmig-beschleunigten Bewegung ist der in einer beliebigen Zeit durchlaufene Raum nur halb so groß, als er gewesen wäre, wenn der Körper gleich anfänglich so geschwinde gegangen wäre, als er wirklich zuletzt gehet.

Beweis. Ob gleich bei der einförmig-beschleunigten Bewegung, und bei der beschleunigten überhaupt, angenommen wird, daß die Kraft in eins fortwirket, so wollen wir uns doch anfänglich vorstellen, daß ihre Wirkung durch Stöße geschehe, die in gleichen Zeiträumen auf einander folgen. Gesetzt also, der Körper bewege sich während einer Anzahl n solcher Zeittheile oder Zeiträume. Im ersten durchläuft er einen Weg g, vermöge des ersten Stoßes. Bekäme er keinen neuen Stoß, so würde er mit dieser Geschwindigkeit seinen Weg fortsetzen, und auch im zweiten Zeittheile einen gleichen Raum g durchlaufen. Da er aber im Anfange dieses zweiten Zeittheiles noch einen solchen Stoß bekömmt, so läuft er mit der Summe beider Geschwindigkeiten (Stat. Hauptst. III, §. 5), also durchläuft er im zweiten Zeittheile $2g$. Im dritten ist er also schon von selbst im Stande, wiederum $2g$ zu durchlaufen, weil er diese Geschwindigkeit nun einmal hat. Hingegen bekömmt er am Anfange des dritten Zeittheiles wiederum einen Stoß, und durchläuft folglich $2g + g = 3g$. Und so siehet man, daß er überhaupt im $n$ten Zeittheile ng durchlaufen wird. Also folgen die Zeittheile und die zustimmenden Wege, der Ordnung nach, folgender Weise aufeinander

Zeittheile	1,	2,	3,	4,	5,	:	:	n
Räume	g,	$2g$,	$3g$,	$4g$,	$5g$,	:	:	: ng

Die durchlaufenen Räume machen also eine arithmetische Progression, und die Summe aller, das ist, der ganze Weg, wird gefunden, wenn man den ersten Satz zum letzten addiret, mit der Anzahl der Sätze multiplizirет, und durch 2 dividiret, wie die Rechenkunst es lehret. Folglich ist diese Summe

$$\frac{(ng + g)\,n}{2}$$

oder $$\frac{n^2 g}{2} + \frac{ng}{2}$$

Hätte aber der Körper gleich anfänglich in jedem Zeittheile, wie hier ganz zuletzt, den Raum ng zurückgeleget, und sich ebenfalls während n Zeittheilen beweget, so wäre sein Weg gewesen (Stat. Hauptst. II, §. 24)

$$ng \times n$$

oder $$n^2 g$$

davon ist die Hälfte $$\frac{n^2 g}{2}$$

Diese Hälfte nun durchlief der Körper im vorigen Falle, und noch darüber den Raum $\frac{ng}{2}$. Je größer eine

Zahl

Zahl ist, desto weniger beträgt die Wurzel in Vergleich mit dem Quadrate. Z. E. das Quadrat von 1000000000000 ist 1 000 000 000 000 000 000 000 000 000. Hier ist die Wurzel nur $\frac{1}{1000000000000}$ vom Quadrate, und es ist überhaupt $n = \frac{1}{n} n^2$. Jemehr man also Zeittheile annimmt, das heißt, entweder je länger die Bewegung dauert, oder je kleiner die Zeiträume zwischen jedem Stoße und den folgenden sind, desto weniger beträgt n in Vergleich mit n^2, und folglich $\frac{ng}{2}$ im Vergleich mit $\frac{n^2g}{2}$. Wenn also die Anzahl der Zeittheile sehr groß ist, so kann man ohne merklichen Irrthum $\frac{ng}{2}$ weglassen, und anstatt

$$\frac{n^2g}{2} + \frac{ng}{2}$$

setzen $\frac{n^2g}{2}$

und in diesem Falle ist der, vermittelst solcher aufeinander folgender Stöße durchlaufene Raum, nur ohngefähr halb so groß, als er gewesen wäre, wenn die Geschwindigkeit gleich anfänglich so groß gewesen wäre, als sie zuletzt wurde.

Wenn nun die Kraft nicht durch abgesonderte Stöße, sondern in eins fortwirket, so ist die Anzahl der Stöße unendlich groß, indem die Zeiträumchen unendlich klein sind. Dann verschwindet $\frac{ng}{2}$ ganz in Vergleich mit $\frac{n^2g}{2}$, und es ist nicht mehr ohngefähr, sondern vollkommen richtig, daß der, vermittelst einer einförmig-beschleunigten Bewegung durchlaufene Raum, nur halb so viel beträgt, als wenn der Körper sich während der nämlichen Zeit mit der ganz zuletzt erhaltenen Geschwindigkeit beweget hätte.

Anmerkung I. Die Betrachtung einer solchen Beschleunigung, welche stoßweise geschiehet, war hier nur ein Hülfsmittel. Man hüte sich, auf eine solche Bewegung dasjenige anwenden zu wollen, was in der Folge von der wahren beschleunigten Bewegung gesagt werden soll. Denn da nur bei dieser allein das $\frac{ng}{2}$, in Vergleich mit $\frac{n^2g}{2}$, wirklich verschwindet, so gelten auch nur für diese allein die Folgerungen, die daraus gezogen werden.

Anmerkung II. Bei der wahren einförmig beschleunigten Bewegung muß man unter der letzten Geschwindigkeit nicht denjenigen Weg verstehen, den der Körper in dem letzten endlichen Zeittheile, z. E. in der letzten Sekunde zurückleget; denn während dieser letzten Sekunde gehet die Beschleunigung noch immer vor sich; am Ende derselben gehet die Bewegung geschwinder als in ihrem Anfange. Es ist demnach die letzte Geschwindigkeit eigentlich diejenige, die der Körper im letzten Augenblicke der letzten Sekunde hat, oder noch besser, es ist derjenige Raum, den jetzt nach Verfließung der gegebenen Zeit, der Körper in der folgenden Sekunde durchlaufen würde, wenn er sich selbst überlassen würde, und die Kraft gänzlich aufhörte, auf ihn zu wirken. Denn in diesem Falle würde er mit der im letzten Augenblicke der Beschleunigung erhaltenen Geschwindigkeit fortgehen. Wenn also die Geschwindigkeit sekundenweise gerechnet werden soll, so ist die letzte Geschwindigkeit nicht der in der letzten Sekunde durchlaufene Raum, sondern derjenige, den der Körper mit der Schnelligkeit, die er ganz zuletzt bekommen hat, in einer ganzen Sekunde durchlaufen würde.

Anmerkung III. Wenn man nicht die ganze Zeit der Bewegung, sondern nur einen Theil derselben betrachtet, den man vom Anfange der Bewegung an rechnet, so hat am Ende dieses beliebigen Zeittheiles der Körper eine gewisse Geschwindigkeit, welche man die erhaltene Geschwindigkeit nennet. Sie ist in Absicht des betrachteten Zeittheiles die lezte Geschwindigkeit. Folglich ist die erhaltene Geschwindigkeit derjenige Raum, den der Körper in einer Sekunde, oder überhaupt in der Einheit der Zeit durchlaufen würde, wenn keine Beschleunigung mehr Statt fände.

Zusaz I. Wenn ein Körper, der sich eine Zeitlang mit einförmiger Beschleunigung beweget hat, nun aufhöret, beschleuniget zu werden, und bloß mit seiner lezten Geschwindigkeit fortgehet, so wird er in eben so viel Zeit den doppelten Weg zurücklegen. Denn da er mit seiner lezten Geschwindigkeit den doppelten Weg während der nämlichen Zeit zurückgeleget hätte, so wird er im gegebenen Falle, in gleicher Zeit den doppelten Weg wirklich zurücklegen.

Zusaz II. Die erhaltene Geschwindigkeit sei v, die Zeit der einförmig-beschleunigten Bewegung vom Anfange an sei t, so würde der durchgelaufene Raum vt sein, wenn die Bewegung einförmig gewesen wäre (Stat. Hauptst. II, §. 24). Also ist der durchgelaufene Raum nur in der That

$$w = \frac{vt}{2}$$

wo wir unter w den ganzen Weg oder Raum verstehen, unter t die Anzahl der Sekunden, unter v die erhaltene Geschwindigkeit, in dem Verstande der in der zweiten und dritten Anmerkung erkläret worden, und den der Anfänger nicht aus den Augen lassen muß.

§. 3.

Lehrsaz.

Bei einem und demselben Körper, der sich mit einförmiger Beschleunigung beweget, oder bei zwei Körpern,

Körpern, die durch gleiche beschleunigende Kräfte beweget werden, verhalten sich die erhaltenen Geschwindigkeiten, wie die seit dem Anfange der Bewegung verflossenen Zeiten.

Denn da man sich einbilden kann, die beschleunigende Kraft wirke vermöge unendlich kleiner auf einander folgender Stöße, so ist klar, daß die Anzahl der Stöße nach dem nämlichen geometrischen Verhältnisse zunimmt, wie die Dauer der verflossenen Zeit. Und da die Wirkung jedes Stoßes sich mit der Wirkung der vorhergehenden vereiniget, so nimmt die daraus entstehende Geschwindigkeit nach eben dem Verhältnisse zu. Um dieses zu versinnlichen, so nehme man an, der Körper bekomme in jeder Sekunde 1000000 Stöße, so bekömmt er in 3 Sekunden 3000000 solcher Stöße, und wird durch den letzten dieser Stöße im Stande gesetzet, sekundenweise 3 Millionen solcher kleiner Räumchen durchzulaufen, als ein Stoß beträgt. Hingegen nach 5 Sekunden hat er schon 5000000 Stöße bekommen, durch deren letzten er in den Stand gesetzet wird 5000000 ebengedachter Räumchen in jeder folgenden Sekunde, ohne neue Stöße zu durchlaufen. Also verhalten sich die nach 3 und nach 5 Sekunden erhaltenen Geschwindigkeiten, wie 3000000 zu 5000000, das ist, wie 3 zu 5, oder wie die Anzahl der Sekunden, oder wie die verflossenen Zeiten, wenn man sie seit dem Anfange der Bewegung rechnet.

Zusatz. In der ersten Sekunde leget der einförmig-beschleunigte Körper einen gewissen Weg zurück, dessen Länge von der Stärke der beschleunigenden Kraft oder Macht abhängt, das ist, von der Stärke der unendlich kleinen Stöße, die sie ihm giebt. Diesen Weg wollen wir s nennen. Gesetzt nun, die Beschleunigung hörte auf, so wäre der Körper schon von selbst im Stande, den doppelten Raum, nämlich $2s$ in der zweiten Sekunde zu durchlaufen, und dieses $2s$ ist die in einer Sekunde erhaltene Geschwindigkeit. Es sei $2s = p$. Will

Will man nun wissen, welche Geschwindigkeit v der Körper in t Sekunden, oder am Ende des letzten Augenblickes der $t$ten Sekunde erhalten haben wird, so sage man, vermöge unseres Lehrsatzes,

$$1 : t :: p : v$$

$$\text{daher } v = pt$$

Hier ist v die erhaltene Geschwindigkeit, oder der Weg, den der sich selbst überlassene Körper sekundenweise zurücklegen kann, nachdem seine Bewegung während t Sekunden beschleuniget worden, und dieses durch eine solche Kraft, vermöge welcher er in der ersten Sekunde wirklich s oder $\frac{1}{2}p$ zurückgeleget hat, und dabei die Geschwindigkeit p erhalten hat.

§. 4.

Wir haben jetzt die zwei Hauptgleichungen, worauf die ganze Theorie der einförmig-beschleunigten Bewegung beruhet, nämlich

$$w = \frac{vt}{2} \text{ (§. 2)}$$

$$\text{und } v = pt \text{ (§. 3)}$$

Setzet man den Werth von v aus der zweiten in die ersten, so kömmt

$$w = \tfrac{1}{2} pt^2$$

Nimmt man den Werth von t, nämlich $\frac{v}{p}$ aus der zweiten, und setzet ihn auch in die erste, so kömmt

$$w = \frac{v^2}{2p}$$

Diese zwei neuen Gleichungen nebst den beiden vorigen geben also vier Formeln, die in manchen Fällen nützlich sein können.

Anmerkung. Die Größe $p = 2s$ wollen wir der Kürze halben die **Beschleunigung** nennen.

Zusatz I.

Zusatz I. Wenn man sich erinnert, daß die Produkte veränderlicher Größen sich zusammengesetzt wie ihre Faktoren verhalten, und daß Brüche sich gerade wie ihr Zähler, und umgekehret wie die Nenner verhalten (Statik. Hauptst. I, §. 19), so lassen sich aus den gefundenenen Formeln verschiedene Proporzionen herleiten. Z. E. aus $w = \frac{1}{2}pt^2$ und $w = \frac{v^2}{2p}$ folget, daß sich die durchgelaufenen Wege, bei gleichen beschleunigenden Kräften, wie die Quadrate der Zeiten, oder auch wie die Quadrate der erhaltenen Geschwindigkeiten verhalten. Wären die Zeiten oder die erhaltenen Geschwindigkeiten gleich, so würden sich die Wege im ersten Falle gerade und im andern umgekehret wie die Beschleunigungen verhalten.

Zusatz II. Obgleich die gefundenen Formeln und Proporzionen ihre völlige Richtigkeit haben, so will ich doch die Sache noch auf andere Art deutlich zu machen suchen, indem ich aus der Erfahrung weiß, wie viel Schwierigkeit die Anfänger bei diesen Lehren zu finden pflegen.

Man stelle sich einen einförmig-beschleunigten Körper vor, der schon eine Sekunde lang gegangen ist, und in derselben einen gewissen Weg s zurückgeleget hat, so hat er eben dadurch die Fähigkeit erhalten, in der folgenden Sekunde von selbst $2s$ durchzulaufen (§. 2, Zus. I), also ist $2s$ seine am Ende der ersten Sekunde erhaltene Geschwindigkeit.

Folglich würde der sich selbst überlassene Körper in der zweiten Sekunde $2s$ durchlaufen. Hingegen, da er während dieser zweiten Sekunde eben so viel Stöße von der beschleunigenden Kraft bekömmt, als in der ersten, so wirken diese Stöße eben so viel als in der ersten Sekunde, also machen sie, daß er anstatt $2s$ wirklich $2s + s$, also $3s$ durchläuft. Jetzt hat der Körper in den beiden ersten Sekunden schon $s + 3s = 4s$ durchlaufen; und würde,

sich

sich selbst überlassen, in 2 andern Sekunden doppelt so viel, also $8s$ durchlaufen (§. 2, Zus. I), welches für jede Sekunde $4s$ machet. Es ist demnach am Ende der 2ten Sekunde die erhaltene Geschwindigkeit $4s$.

In der dritten Sekunde durchläuft der Körper, wegen der immer fortdaurenden Stöße, nicht nur $4s$, sondern $4s + s = 5s$. Er hat also in 3 Sekunden zurückgeleget $s + 3s + 5s = 9s$, und würde jetzt, ohne fernere Beschleunigung, in den drei folgenden Sekunden das doppelte, nämlich $18s$ durchlaufen, welches für jede Sekunde $6s$ machet, und dieses ist seine am Ende der dritten Sekunde erhaltene Geschwindigkeit. In der vierten Sekunde kömmt zur Geschwindigkeit $6s$, die der Körper schon hat, noch s wegen der fortdaurenden Stöße hinzu, also durchläuft der Körper $7s$. Er hat demnach in 4 Sekunden durchlaufen $s + 3s + 5s + 7s = 16s$, und der Körper ist nun von selbst im Stande, in 4 andern Sekunden $32s$ durchzulaufen, welches $8s$ für jede Sekunde machet, und dieses ist seine in 4 Sekunden erhaltene Geschwindigkeit, oder seine erhaltene Geschwindigkeit am Ende der 4ten Sekunde.

So kann man weiter fortfahren, und man wird alles finden, wie in folgender Tafel.

Ordnung der Sekunden.	Weg in jeder einzelnen Sekunde.	Weg seit Anfang der Bewegung.	Erhaltene Geschwindigkeit.
1	s	s	$2s = p$
2	$3s = s + p$	$4s$	$4s = 2p$
3	$5s = s + 2p$	$9s$	$6s = 3p$
4	$7s = s + 3p$	$16s$	$8s = 4p$
5	$9s = s + 4p$	$25s$	$10s = 5p$
6	$11s = s + 5p$	$36s$	$12s = 6p$
7	$13s = s + 6p$	$49s$	$14s = 7p$
8	$15s = s + 7p$	$64s$	$16s = 8p$
9	$17s = s + 8p$	$81s$	$18s = 9p$
10	$19s = s + 9p$	$100s$	$20s = 10p$

Aus

Aus dieser Tafel siehet man

1) Daß die von Sekunde zu Sekunde durchlaufenen Räumchen nach den unpaaren Zahlen zunehmen, nämlich $1s$, $3s$, $5s$, $7s$ rc.; oder daß man jeden erhält, wenn man das doppelte s oder p mit der Ordnungs-Zahl der Sekunde weniger 1 multipliziret, und s darzu addiret.

2) Daß die seit dem Anfange der Bewegung durchlaufenen Räume wie die Quadratzahlen der verflossenen Zeiten zunehmen. Nämlich $1s$, $4s$, $9s$, $16s$ rc., verhalten sich wie die Quadrate von 1, 2, 3, 4 rc., welches mit dem ersten Zusatze übereinstimmet. Aus dieser zweiten Eigenschaft, wenn sie als bekannt angenommen wird, kann auch die erstere hergeleitet werden. Man darf nur die Unterschiede zwischen s und $4s$, $4s$ und $9s$, $9s$ und $16s$ nehmen u. s. f., so bekömmt man die vorhergehenden Zahlen $3s$, $5s$, $7s$ rc.

3) Daß die erhaltenen Geschwindigkeiten sich wie die verflossenen Zeit-Einheiten verhalten; denn sie sind $1p$, $2p$, $3p$, $4p$ u. s. f., wo p allemal soviel als $2s$ gilt.

§. 5.

Man siehet aus dem vorhergehenden, daß bei einer einförmig-beschleunigten Bewegung drei Dinge zu betrachten sind, wenn man die beschleunigende Kraft und folglich die Beschleunigung selbst als unveränderlich annimmt, nämlich 1) der durchlaufene Weg, 2) die seit dem Anfange der Bewegung verflossene Zeit, 3) die am Ende der Bewegung erhaltene Geschwindigkeit. Von diesen läßt sich jede aus einer der beiden andern finden, nämlich

I) Der Weg aus der Zeit, dazu dienet die Formel $w = \frac{1}{2}pt^2$ (§. 4).

II) Der Weg aus der endlichen Geschwindigkeit;
$$w = \frac{v^2}{2p}$$ (ebendaselbst).

III)

III) Die Zeit aus dem Wege. Da $w = \frac{1}{2} pt^2$, so ist $t^2 = \frac{w}{\frac{1}{2}p}$ und $t = \sqrt{\frac{w}{\frac{1}{2}p}}$.

IV) Die Zeit aus der endlichen Geschwindigkeit. Es ist $v = pt$ (§. 4), also $t = \frac{v}{p}$

V) Die endliche Geschwindigkeit aus dem Wege. Da $w = \frac{v^2}{2p}$, so ist $v^2 = 2p.w$ und $v = \sqrt{(2pw)}$.

VI) Die endliche Geschwindigkeit aus der Zeit $v = pt$.

§. 6.

Wenn man die Gesetze der einförmig-beschleunigten Bewegung wohl verstanden hat, so wird die einförmig-verspätete nicht viel Schwierigkeit machen. Man stelle sich vor, die verspätende Kraft (§. 1) gebe dem Körper unendlich viel kleine Stöße in entgegengesetzter Richtung, so häufen diese Stöße ihre Wirkungen eben so an, wie bei der einförmig-beschleunigten Bewegung; nur dort geben sie dem Körper zuletzt seine erhaltene Geschwindigkeit; hier aber vermindern sie seine anfängliche Geschwindigkeit.

Gesetzt, man wisse aus der Erfahrung, daß die Geschwindigkeit nach 1 Sekunde um p vermindert worden, so wird sie, wegen der einförmigen Verspätung, nach t Sekunden um pt vermindert sein. Es sei demnach v die übrigbleibende Geschwindigkeit, und c die anfänglich vorhandene, so ist

$$v = c - pt$$

Gesetzt ferner, die Bewegung habe t Sekunden gedauert, so würde der Körper mit einförmiger Bewegung den Weg ct zurückgeleget haben. Zugleich hat aber die verspätende Kraft so viel gewirket, als nöthig ist, um einen Weg $= \frac{1}{2}pt^2$ zu verursachen (§. 4). Da die Wirkung aber in entgegengesetzter Richtung geschehen ist, so gehet dieser Weg ab von ct, und es bleibet, wenn der Weg w heißt,

$$w = ct - \tfrac{1}{2}pt^2 = (c - \tfrac{1}{2}pt)\,t$$

Die Gleichung $v = c - pt$ giebt $c = v + pt$. Setzet man diesen Werth in $w = (c - \frac{1}{2}pt)t$, so kömmt $w = (v + pt - \frac{1}{2}pt)t = (v + \frac{1}{2}pt)t$. Also haben wir diese neue Gleichung

$$w = (v + \tfrac{1}{2}pt)\,t$$

Die nämliche Gleichung $v = c - pt$ giebt $pt = c - v$, $\frac{1}{2}pt = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}v$, und $t = \dfrac{c-v}{p}$. Setzet man auch diese Werthe in $w = (c - \frac{1}{2}pt)\,t$, so kömmt $w = (c - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}v).\left(\dfrac{c-v}{p}\right) = (\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}v).\left(\dfrac{c-v}{p}\right)$ $= \dfrac{\frac{1}{2}(c+v).(c-v)}{p} = \dfrac{c^2 - v^2}{2p}$. Also bekommen wir noch

$$w = \frac{c^2 - v^2}{2p}$$

§. 7.

Bei der einförmig-verspäteten Bewegung, wenn man die verspätende Kraft, und folglich p als unveränderlich und bekannt annimmt, sind vier Größen zu betrachten, nämlich 1) die anfängliche Geschwindigkeit c; 2) die Dauer t der Bewegung, seit dem Anfange gerechnet; 3) der durchlaufene Raum w; 4) die zuletzt übrig bleibende Geschwindigkeit v. Von diesen vier Größen läßt sich jede aus zwei der übrigen bestimmen, nämlich

1) die

1) die anfängliche Geschwindigkeit aus der Zeit t und dem Wege w. Denn da (§. 6)

$$w = ct - \tfrac{1}{2}pt^2$$
so ist $$w + \tfrac{1}{2}pt^2 = ct$$
und $$\frac{w}{t} + \tfrac{1}{2}pt = c$$

2) Die anfängliche Geschwindigkeit c aus der Zeit t und der übrig bleibenden Geschwindigkeit v. Denn da $v = c - pt$, so ist $c = v + pt$.

3) Die anfängliche Geschwindigkeit c aus dem Wege w und der übrig bleibenden Geschwindigkeit v. Denn da (§. 6)

$$w = \frac{c^2 - v^2}{2p}$$
so ist $$2pw = c^2 - v^2$$
$$2pw + v^2 = c^2$$
$$\sqrt{(2pw + v^2)} = c$$

4) Die Zeit t aus der anfänglichen Geschwindigkeit c und dem Wege w. Denn

$$w = ct - \tfrac{1}{2}pt^2$$
$$\tfrac{1}{2}pt^2 = ct - w$$
$$\tfrac{1}{2}pt^2 - ct = -w$$
$$pt^2 - 2ct = -2w$$
$$t^2 - \frac{2c}{p}t = -\frac{2w}{p}$$
$$t^2 - \frac{2c}{p}t + \frac{c^2}{p^2} = \frac{c^2}{p^2} - \frac{2w}{p}$$
$$= \frac{c^2 - 2pw}{p^2}$$
$$t - \frac{c}{p} = \frac{\pm\sqrt{(c^2 - 2pw)}}{p}$$
$$t = \frac{c \pm \sqrt{(c^2 - 2pw)}}{p}$$

5) Die Zeit t aus der anfänglichen Geschwindigkeit c und der letzten Geschwindigkeit v.

Da $v = c - pt$ (§. 6)

so ist $pt = c - v$

$$t = \frac{c - v}{p}$$

6) Die Zeit t aus dem Wege w und der letzten Geschwindigkeit v. (§. 6)

Da $w = vt + \frac{1}{2}pt^2$

so ist $2w = 2vt + pt^2$

$$\frac{2w}{p} = \frac{2v}{p}t + t^2$$

$$t^2 + \frac{2v}{p}t = \frac{2w}{p}$$

$$t^2 + \frac{2v}{p}t + \frac{v^2}{p^2} = \frac{v^2}{p^2} + \frac{2w}{p}$$

$$= \frac{v^2 + 2pw}{p^2}$$

$$t + \frac{v}{p} = \frac{\pm\sqrt{(v^2 + 2pw)}}{p}$$

$$t = \frac{-v \pm \sqrt{(v^2 + 2pw)}}{p}$$

7) Der Weg w aus der anfänglichen Geschwindigkeit c und der Zeit t. Es ist

$$w = (c - \tfrac{1}{2}pt)\, t$$

8)

8) Der Weg w aus der anfänglichen Geschwindigkeit c und der endlichen v. Hier ist

$$w = \frac{c^2 - v^2}{2p}$$

9) Der Weg w aus der Zeit t und der letzten Geschwindigkeit v. Hier ist

$$w = (v + \tfrac{1}{2}pt)t$$

10) Die endliche Geschwindigkeit v aus der anfänglichen c und der Zeit t. Hier ist

$$v = c - pt$$

11) Die endliche Geschwindigkeit v aus der anfänglichen c und dem Wege w. Es ist

$$w = \frac{c^2 - v^2}{2p}$$

$$2pw = c^2 - v^2$$

$$v^2 = c^2 - 2pw$$

$$v = \sqrt{(c^2 - 2pw)}$$

12) Die endliche Geschwindigkeit v aus der Zeit t und dem Wege w.

Da $\quad w = vt + \tfrac{1}{2}pt^2$

so ist $\quad w - \tfrac{1}{2}pt^2 = vt$

$$\frac{w}{t} - \tfrac{1}{2}pt = v$$

§. 8.

Wenn der einförmig-verspätete Körper eine Zeit lang in seiner ersten Richtung fortgegangen ist, so wird zuletzt seine ganze anfängliche Geschwindigkeit durch die verspätende Kraft vernichtet, und es bleibet ihm nichts mehr davon übrig, so daß $v=0$. Will man die Bewegung bis dahin rechnen, so muß in den Formeln v verschwinden, alsdann ist w der Weg vom Anfange der Bewegung, bis zur Zeit, da der Körper aufhöret, sich in seiner anfänglichen Richtung zu bewegen, und t ist eben dieser ganze Zeitraum. In diesem Falle verwandelt sich

$$v = c - pt$$

in $$o = c - pt$$

oder $$c = pt$$

Eben so verwandelt sich

$$w = (v + \tfrac{1}{2}pt)\,t$$

in $$w = (\tfrac{1}{2}pt)\,t$$

oder $$w = \tfrac{1}{2}pt^2$$

Desgleichen, aus

$$w = \frac{c^2 - v^2}{2p}$$

wird $$w = \frac{c^2}{2p}$$

Ueberhaupt, man bekömmt die nämlichen Formeln, als für die einförmig-beschleunigte Bewegung (§. 4), nur, daß hier die anfängliche Geschwindigkeit c anstatt der endlichen v stehet. Dieses kann auch nicht anders sein. Denn, wenn man sich vorstellet, ein einförmig-beschleunigter Körper, der anfänglich in Ruhe war, sei bis zu einem gewissen Orte gekommen, wo er eine gewisse Geschwindigkeit erlanget hat; und er werde jetzt mit einer gleichen Geschwindigkeit zurück gestoßen, so nimmt ihm die beschleunigende Kraft, die ihm jetzt zuwider ist, nach und nach eben so viel Geschwindigkeit ab, als sie ihm gegeben hatte; folglich muß er wieder in eben so viel Zeit eben so weit zurück gehen, bis er alle seine erhaltene Geschwindigkeit verloren hat.

Zusatz.

Zusatz. Wenn also eine vollkommen elastische Kugel, die mit einförmig-beschleunigter Geschwindigkeit ankömmt, gegen eine Fläche stößt, die gegen ihre Richtung senkrecht ist, so muß sie, indem die beschleunigende Kraft noch immer in ihrer vorigen Richtung wirket, und sich also, in Betrachtung des Körpers, jetzt in eine verspätende verwandelt, in eben so viel Zeit eben so weit zurück gehen, indem die letzte Geschwindigkeit des anstoßenden Körpers in die anfängliche des zurück prallenden verwandelt wird. (H. II, §. 15). Wenn nun dieselbige Kraft immer in ihrer eigenthümlichen Richtung fort wirket, so muß die Kugel nun wieder in ihrer ersten Richtung gehen, wieder anstoßen, wieder eben so weit zurück getrieben werden; und dieses Hin- und Hergehen wird ins Unendliche fortdauren, vorausgesetzt, daß die Bewegung im leeren Raume geschehe, und auch keine Reibung vorhanden sei. Um dieses zu versinnlichen, darf man sich nur die beschleunigende Kraft ohngefähr wie einen Wind vorstellen, der die Kugel treibet.

§. 9.

Wenn der einförmig-verspätete Körper alle seine Geschwindigkeit verloren hat, so giebt ihm die beschleunigende Kraft wiederum eine neue Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung; dann gehet er durch denselbigen Weg zurück, wodurch er gekommen ist. Er findet sich also zweimal an derselbigen Stelle seines ersten Weges. Ist er wieder an seinem ersten Orte gekommen, und findet er kein Hinderniß, so gehet er nun ins Unendliche in der Richtung der beschleunigenden Kraft fort, so daß sein Weg, in Betracht der ersten Richtung, negativ wird. Man stelle sich hier wiederum einen Körper vor, der gegen den Wind geworfen wird, zuletzt seine Geschwindigkeit verlieret, und dann in der Richtung des Windes zurück getrieben wird. Hieraus wird man begreifen, was es zu bedeuten hat, wenn die Formeln theils negative Größen, theils doppelte Größen hervorbringen. Ferner, da der Körper, vermöge der anfänglichen Geschwindigkeit und der verspätenden Kraft, in seiner ersten Richtung nicht weiter kommen kann, als bis zu einer gewissen Stelle, wo alle seine anfängliche Geschwindigkeit verloren ist; so muß, wenn man seinen Weg in der anfänglichen Richtung zu groß annimmt, etwas Unmögliches heraus kommen. Daher kann auch t unmöglich oder imaginär werden in der 4ten Formel des §. 7, wo $t = \frac{c \pm \sqrt{(c^2 - 2pw)}}{p}$

Dieses geschiehet, wenn $2pw > c^2$ oder $w > \frac{c^2}{p^2}$. In diesem Falle wird $c^2 - 2pw$ negativ, und folglich $\sqrt{(c^2 - 2pw)}$ imaginär.

§. 10.

Es würde eine überflüssige Mühe sein, die einförmig-beschleunigte oder verspätete Bewegung so genau zu untersuchen, wenn wir nicht in der Natur einen Fall hätten, wo sie wirklich Statt findet. Die Erfahrung lehret, daß Körper, die man frei herunter fallen läßt, sich mit einförmig-beschleunigter Bewegung der Erde nähern, wenn die Luft ihnen nicht merklich widerstehet. Man muß sich also die Fallkraft als eine solche vorstellen, die in der Nachbarschaft der Erde allenthalben vorhanden ist, und dem fallenden Körper in jedem Augenblicke neue Stöße giebt, wodurch er gezwungen wird, immer geschwinder zu gehen. Worin eigentlich das Wesen bestehet, welches diese Kraft ausübet, ist bisher unbekannt, aber ihre Wirkung lieget uns beständig vor Augen. Von dieser unbekannten Kraft ist hauptsächlich folgendes zu merken.

1) Ihre Wirkung ist in allen Zeiten einerlei. Man bemerket nicht, daß derselbige Körper an einem Tage geschwin-

geschwinder oder langsamer, als an einem anderen falle. Wenigstens ist bisher keine merkliche Veränderung hierin entdeckt worden.

2) Sie nimmt ab, wenn man sich weiter vom Mittelpunkte der Erde entfernet. Auf sehr hohen Bergen fallen die Körper etwas langsamer, als in den Thälern und auf der Ebne. Auch fallen die Körper etwas langsamer, je näher man den Aequator der Erde kömmt. Hingegen läßt sich in den meisten Fällen annehmen, daß sie in nicht gar zu großen Entfernungen von der Erdfläche, oder eigentlich von der Wasserfläche und in derselbigen Gegend, unverändert bleibet, weil die Höhen, die man bei den gewöhnlichen Verrichtungen erreichet, nicht sehr beträchtlich sind, und man auch den Aequator nicht viel näher kömmt.

3) Sie verursachet in allen Körpern, sie mögen groß oder klein, dicht oder undicht sein, einerlei Geschwindigkeit des Falles, wenn sonst nichts hindert. Man hat durch Versuche gefunden, daß unter der Glocke einer Luftpumpe eine Feder eben so geschwinde fällt, als ein Stück Blei. Dieses ist auch leicht zu begreifen. Denn wenn die Kraft, wovon wir reden, jedem Theilchen der Materie eine gewisse Geschwindigkeit giebt, so wird diese Geschwindigkeit durch die Menge der Theile weder vermehret noch vermindert. (Wenn man Pferde hat, die mit einer gewissen Geschwindigkeit laufen, so wird diese Geschwindigkeit dadurch nicht verändert, daß man weniger oder mehr Pferde zusammen laufen läßt.) Man verwechsele aber diese gleiche Geschwindigkeit der fallenden Körper nicht mit ihrer Schwere. Diese wird bestimmet durch den Druck, den die Körper gegen die Hand oder jeden andern Widerstand ausüben, der sie zu fallen verhindert. Dieser Druck ist desto größer, je mehr Materie im drückenden Körper vorhanden ist. (Denn, um bei der vorigen Vergleichung zu bleiben, so ist klar, daß, ob gleich hundert Pferde nicht

geschwinder laufen als 10, dennoch die 100 zehnmal mehr Kraft erfordern werden, wenn man sie, da sie sich schon zum Laufen anstrengen, zurück halten will.)

4) Obgleich alle Körper im leeren Raume mit gleicher Geschwindigkeit fallen, so geschiehet dieses doch nicht in der Luft. Diejenigen, die viel Masse unter einem kleinen Volumen enthalten, dringen besser durch, als andere, die in Rücksicht auf ihre kleine Masse viel Platz einnehmen, und folglich alle Augenblicke viel Lufttheilchen verdrängen müssen.

5) Die Versuche, die man mit fallenden Körpern in der Luft machet, können also nicht vollkommen mit der Theorie übereinstimmen, die für den leeren Raum eingerichtet ist. Die Bewegung beschleuniget sich in der Luft nicht so viel als sie sollte, wegen des beständigen Widerstandes der Luft. Jedoch hat man gefunden, daß wenn der fallende Körper von Gold, Blei, und überhaupt von einer sehr dichten Materie ist, alles genau genug eintrift, zumal wenn die Höhen von denen man ihn fallen läßt, nur 2 bis 300 Fuß betragen. Newton hat aus den verschiedenen Stockwerken eines hohen Thurmes bleierne Kugeln fallen lassen, und gefunden, daß sich die durchlaufenen Räume genau genug wie die Quadrate der verflossenen Zeiten verhielten, welches eine einförmig-beschleunigte Bewegung verräth (§. 4, Zus. I).

6) Wenn ein Körper von der Erde gerade aufwärts geworfen oder geschossen wird, so wirket die Fallkraft ihm durch unendlich viel kleine Stöße entgegen, und seine Bewegung wird einförmig-verspätet (§. 1). Da aber die Luft zugleich widerstehet, so leidet er noch mehr Verspätung; und nur, wenn er von sehr dichter Materie ist, und die anfängliche Geschwindigkeit nicht zu groß ist, wird er den Gesetzen der einförmig-verspäteten Bewegung ziemlich getreu bleiben. Ich sage, wenn die anfängliche Geschwindigkeit nur mittelmäßig ist; denn man kann bemerken, daß

jedes

jedes flüßige Wesen einem langsam gehenden festen Körper weniger widerstehet, als einem geschwinde laufenden.

§. 11.

Bei den Fragen, die sich auf das Fallen und Steigen der Körper beziehen, wenn man die obigen Formeln (§. 5 und 7) darauf anwendet, ist t die Zeit in Sekunden, vom Anfange des Fallens oder Steigens gerechnet; w ist der während dieser Zeit durchlaufene Raum, das ist, die Höhe, von welcher der Körper gefallen ist, oder bis zu welcher er gestiegen ist, in Fußen gerechnet; v die Geschwindigkeit, die der Körper am Ende der Zeit t erhalten hat, auch in Fußen; c die anfängliche Geschwindigkeit, wenn der Körper aufwärts geworfen wird, auch in Fußen. Endlich ist p die Wirkung der Fallkraft während einer Sekunde, oder die Geschwindigkeit, die ein fallender Körper am Ende der ersten Sekunde seines Falles erhalten hat, oder das Doppelte des Raumes, den er in der ersten Sekunde des Falles durchläuft. Alles dieses bedeutet im Grunde einerlei (§. 3 und 4). Auch diese Quantität p wird in Fußen gerechnet, und muß durch die Erfahrung bestimmt werden. Die genauesten Versuche aber, oder die daraus gezogenen Folgerungen, beweisen, daß ein fallender Körper, dem die Luft nicht merklich widerstehet, in der ersten Sekunde seines Falles einen vertikalen Weg von 15,0981 Pariser Fuß durchläuft. Nun machen 13913 Pariser Fuß 14400 Rheinländische, also machen 15,0981 Pariser Fuß soviel als 15,6265 Rheinländische, oder in Duodezimal-Maaß 15 Rheinländische Fuß, 7 Zoll $6\frac{1}{2}$ Linien ohngefähr. Hiervon ist das Doppelte $31,253 = p$ in Rheinländischen Fußen.

§. 12.

Laßt uns jetzt durch Exempel zeigen, wie die Formeln für die einförmig-beschleunigte Bewegung auf fallende

Körper

Körper angewandt werden, wenn diese so beschaffen sind, daß ihnen die Luft wenig widerstehet. Die Formeln sind alle aus §. 5 genommen.

Exempel I. Von welcher Höhe kann ein Körper in 5 Sekunden fallen? oder wenn der Fall eines Körpers 5 Sekunden gedauret hat, von welcher Höhe ist er herunter gekommen?

Es ist $w = \frac{1}{2} pt^2$

Hier also $w = \frac{1}{2} \times (31{,}253) \times (5^2)$

oder $w = \dfrac{(31{,}253) \times 25}{2} = 390{,}66$ Fuß.

Exempel II. Von welcher Höhe muß ein Körper herunterfallen, um daß er zuletzt eine Geschwindigkeit von 50 Fuß (für eine Sekunde) erhalte?

Es ist $w = \dfrac{v^2}{2p}$

Hier also $w = \dfrac{(50)^2}{2 \times (31{,}253)} = \dfrac{2500}{62{,}506} = \dfrac{2500000}{62{,}506}$
$= 39{,}996$ Fuß.

Exempel III. Wie viel Zeit braucht ein Körper, um von einer Höhe von 200 Fuß herunter zu fallen?

$$t = \sqrt{\frac{w}{\frac{1}{2}p}}$$

Hier $t = \sqrt{\dfrac{200}{15{,}6265}}$

L 200 = 2, 3010300
L 15,6265 = 1, 1.9.3.8.6 1.7

: 2) 1, 1071683
0, 5535841 = L 3,5775

Also t = 3,5775 Sekunden.

Exem-

Exempel IV. Während wie viel Zeit muß ein Körper fallen, um eine Geschwindigkeit zu erhalten, welche für eine Sekunde gerechnet, 100 Fuß betrage?

$$t = \frac{v}{p}$$

$$\text{Hier } t = \frac{100}{31{,}253} = 3{,}1997 \text{ Sekunden}$$

Exempel V. Welches ist die letzte Geschwindigkeit eines Körpers, der von einer Höhe von 300 Fuß herabfällt?

$$v = \sqrt{(2pw)}$$

$$\text{Hier } v = \sqrt{(62{,}506 \times 300)} = 136{,}937 \text{ Fuß.}$$

Exempel VI. Welches ist die endliche Geschwindigkeit eines Körpers, der während 4 Sekunden gefallen ist?

$$v = pt$$

$$\text{Hier } v = 31{,}253 \times 4 = 125{,}012 \text{ Fuß.}$$

§. 13.

Wenn von Körpern die Rede ist, welche in einer vertikalen Linie aufsteigen, nachdem sie mit einer gewissen anfänglichen Geschwindigkeit aufwärts geworfen worden, so können die Fragen die sich darauf beziehen, alle durch die im 7ten Paragraph gegebenen Regeln für die einförmig-verspätete Bewegung, aufgelöset werden.

Exempel I. Wenn ein Körper in Zeit von 3 Sekunden bis zu einer Höhe von 300 Fuß gerade aufwärts steigen soll (wobei jedoch nichts hindert, daß er hernach noch höher steige), mit welcher Geschwindigkeit muß er geworfen werden? Oder wenn ein Körper in 3 Sekunden 300 Fuß hoch gestiegen ist, welches war die Geschwindigkeit, mit welcher er unten seine Bewegung anfing?

Es ist (§. 7)

$$c = \frac{w}{t} + \tfrac{1}{2}\, pt^2$$

Hier also $c = \frac{300}{3} + (15{,}6265) \cdot 9$

oder $c = 100 + 140{,}6385 = 240{,}6385$ Fuß.

Exempel II. Mit welcher Geschwindigkeit ist ein Körper aufwärts geworfen worden, wenn er nach 2 Sekunden noch 50 Fuß Geschwindigkeit übrig behält?

$$c = v + pt$$

Hier $c = 50 + (31{,}253) \times 2$

$$c = 50 + 62{,}506 = 112{,}506 \text{ Fuß.}$$

Exempel III. Welches ist die anfängliche Geschwindigkeit, oder die Geschwindigkeit des Wurfs, wenn dem Körper, nachdem er 300 Fuß gestiegen ist, noch 10 Fuß Geschwindigkeit übrig bleiben?

$$c = \sqrt{(2pw + v^2)}$$

Hier $c = \sqrt{(62{,}506 \times 300 + 100)}$

$$c = \sqrt{(18751{,}8 + 100)}$$

$$c = \sqrt{(18851{,}8)}$$

$$c = 137{,}3018 \text{ Fuß.}$$

Exempel IV. Wie viel Zeit braucht ein gerade aufwärts geworfener Körper um 12 Fuß hoch zu kommen, wenn er mit einer Geschwindigkeit von 30 Fuß geworfen worden?

$$t = \frac{c \pm \sqrt{(c^2 - 2pw)}}{p}$$

Hier $t = \dfrac{30 \pm \sqrt{[(30)^2 - (62{,}506) \times 12]}}{31{,}253}$

Dieses

Dieses giebt für t zwei Werthe, nämlich $t = 1{,}351$ und $t = 0{,}568$. Dieses ist also zu verstehen. Nach $\frac{568}{1000}$ einer Sekunde befindet sich der Körper zum erstenmal in einer Höhe von 12 Fuß. Hernach steiget er weiter bis daß seine steigende Bewegung ganz aufhöret. Dann fällt er zurück, und nach $1\frac{351}{1000}$ Sekunde, seit dem Augenblicke des Wurfes gerechnet, kömmt er wiederum bis zur nämlichen Höhe von 12 Fuß herunter.

Anmerkung. Hätte man bei der nämlichen anfänglichen Geschwindigkeit von 30 Fuß, eine zu große Höhe genommen, so würde $\sqrt{(c^2 - 2pw)}$ negativ, und folglich die Auflösung unmöglich geworden sein; das heißt, der Körper hätte gar nicht die verlangte Höhe erreichen können. Die Möglichkeit der Auflösung erfordert, daß $2pw < c^2$, folglich $w < \frac{c^2}{2p}$ oder $w < \frac{c^2}{62{,}506}$

Exempel V. Wenn ein Körper mit einer Geschwindigkeit von 137 Fuß aufwärts geworfen wird, in wieviel Zeit verringert sich diese Geschwindigkeit bis auf 10 Fuß?

$$t = \frac{c - v}{p}$$

Hier $t = \frac{137 - 10}{31{,}253} = \frac{127}{31{,}253} = 4{,}063$ Sek.

Exempel VI. Ein Körper ist gestiegen $98\frac{2}{3}$ Fuß, und hat übrig eine Geschwindigkeit von $43\frac{7}{8}$ Fuß. Seit wie viel Sekunden ist er gestiegen?

$$t = \frac{-v \pm \sqrt{(v^2 + 2pw)}}{p}$$

Hier

$$t = \frac{-43{,}875 \pm \sqrt{[(43{,}875)^2 + (62{,}506) \times (98{,}666)]}}{31{,}253}$$

Wenn

Wenn man das positive Zeichen vor der Wurzel gebrauchet, so kömmt

$$t = 1{,}473 \text{ Sekunden.}$$

Nimmt man die negative Wurzel, so bekömmt man eine negative Zeit, von welcher hier kein Gebrauch gemacht werden kann.

Exempel VII. Wenn ein Körper mit 279 Fuß Geschwindigkeit aufwärts geworfen wird, wie hoch ist er, nachdem 3 Sekunden verflossen sind?

$$w = (c - \tfrac{1}{2}pt)\ t$$

$$\text{Hier } w = (279 - 15{,}6265 \times 3) \times 3$$

$$w = 396{,}3615 \text{ Fuß.}$$

Exempel VIII. Wenn ein Körper mit 15 Fuß Geschwindigkeit aufwärts geworfen ist, wie hoch muß er gehen, bis daß ihm nur noch 1 Fuß Geschwindigkeit übrig bleibet?

$$w = \frac{c^2 - v^2}{2p}$$

$$\text{Hier } w = \frac{(15)^2 - (1)^2}{62{,}506}$$

$$w = 3{,}567 \text{ Fuß.}$$

Exempel IX. Ein Körper ist während $2\frac{1}{2}$ Sekunden gestiegen, und hat noch eine Geschwindigkeit von 100 Fuß, wie hoch ist er jetzt gekommen?

$$w = (v + \tfrac{1}{2}pt)\ t$$

$$\text{Hier } w = (100 + 15{,}6265 \times 2\tfrac{1}{2}) \times 2\tfrac{1}{2}$$

$$w = 347{,}66562 \text{ Fuß.}$$

Exem-

Exempel X. Ein Körper wird in die Höhe geworfen mit einer Geschwindigkeit von 170 Fuß. Wie viel Geschwindigkeit bleibet ihm nach 2 Sekunden übrig?

$$v = c - pt$$

Hier ist $v = 170 - (31{,}253 \times 2)$

$$v = 107{,}494 \text{ Fuß.}$$

Exempel XI. Wenn ein Körper mit einer Geschwindigkeit von 150 Fuß aufwärts geworfen worden, und schon 100 Fuß gestiegen ist, wie viel Geschwindigkeit bleibet ihm übrig?

$$v = \surd\, (c^2 - 2pw)$$

Hier ist $v = \surd\, (150^2 - 62{,}506 \times 100)$

$$v = 128{,}255$$

Exempel XII. Ein gerade aufwärts geworfener Körper ist während 3 Sekunden 200 Fuß hochgestiegen, wie viel bleibet ihm Geschwindigkeit?

$$v = \frac{w}{t} - \tfrac{1}{2}pt$$

Hier ist $v = \frac{200}{3} - 15{,}6265 \times 3$

$$v = 19{,}787 \text{ Fuß.}$$

§. 14.

In den zwölf vorhergehenden Exempeln wurde die aufsteigende Bewegung bis zu einem beliebigen Zeitpunkte gerechnet. Man kann aber auch solche Fragen aufwerfen, wo von der ganzen Dauer und dem ganzen Wege des aufsteigenden Körpers die Rede ist, bis zu dem Zeitpunkte, wo er aufhöret zu steigen, indem alle seine anfängliche Geschwindigkeit durch die Gegenwirkung der Fallkraft verzehret ist. In solchen Fällen kömmt keine endliche

Geschwindigkeit vor, oder sie wird null. Man könnte demnach die Formeln gebrauchen, welche im 8ten Paragraph für $v=0$ herausgebracht worden. Hingegen kann man auch dergleichen Fragen allemal in andere verwandeln, welche sich auf fallende Körper beziehen, indem ebendaselbst bemerket worden, daß ein Körper, der mit einer gewissen Geschwindigkeit gerade aufwärts geworfen worden, und der so lange steiget, bis daß die anfängliche Geschwindigkeit ganz verzehret ist, hernach wieder herunter fällt, in eben so viel Zeit, als er zum Steigen gebrauchet hat, und zuletzt die nämliche Geschwindigkeit wieder erhält, die er im Anfange des Steigens hatte. Wir können demnach bei den folgenden Aufgaben die Formeln des 5ten Paragraphs von neuem gebrauchen.

Exempel I. Ein gerade aufwärts geworfener Körper steiget während $3\frac{1}{2}$ Sekunden, wie hoch gehet er hinauf? Diese Frage wird eben so aufgelöset, als die folgende: Ein Körper ist während $3\frac{1}{2}$ Sekunden gefallen, von welcher Höhe ist er gekommen?

$$w = \tfrac{1}{2}pt^2$$

Hier ist $w = 15{,}6265 \times (3{,}5)^2$

$$w = 191{,}425 \text{ Fuß.}$$

Exempel II. Wie hoch steiget ein Körper, der mit einer Geschwindigkeit von 100 Fuß aufwärts geworfen wird? Oder: von welcher Höhe muß ein Körper fallen, um daß er eine Geschwindigkeit von 100 Fuß bekomme?

$$w = \frac{v^2}{2p}$$

Hier $w = \dfrac{(100)^2}{62{,}506} = 159{,}984$

Exempel III. Ein gerade aufwärts geworfener Körper steiget 350 Fuß hoch, in wie viel Zeit geschiehet dieses?

dieses? Oder: In wie viel Zeit fällt ein Körper aus einer Höhe von 350 Fuß?

$$t = \sqrt{\frac{w}{\frac{1}{2}p}}$$

Hier ist $t = \sqrt{\frac{350}{15,6265}}$

$t = 4,7327$ Sekunden.

Exempel IV. Ein Körper wird mit einer Geschwindigkeit von 300 Fuß gerade aufwärts geworfen, wie lange Zeit wird er steigen? Oder: wie lange muß ein Körper fallen, um eine Geschwindigkeit von 300 Fuß zu erhalten?

$$t = \frac{v}{p}$$

Hier ist $t = \frac{300}{31,253}$

$t = 9,599$ Sekunden.

Exempel V. Mit welcher Geschwindigkeit muß ein Körper gerade aufwärts geworfen werden, um daß er 287 Fuß hoch steige? Oder: Welche Geschwindigkeit erlanget ein Körper, der aus einer Höhe von 287 Fuß fällt?

$$v = \sqrt{(2pw)}$$

Hier $v = \sqrt{(62,506 \times 287)}$

$v = 133,937$ Fuß.

Exempel VI. Wenn ein Korper während $2\frac{1}{4}$ Sekunden gerade aufsteigen soll, mit welcher Geschwindigkeit muß er geworfen werden? Oder: Welche Geschwindigkeit erhält ein Körper, der während $2\frac{1}{4}$ Sekunden fällt?

$$v = pt$$

Hier $v = 31,253 \times 2\frac{1}{4}$

$v = 70,319$ Fuß.

Anmerkung. Bei dergleichen Exempeln kann auch, anstatt der Zeit des Aufsteigens, die ganze Dauer des Steigens und Fallens in der Luft gegeben sein. Alsdann muß man diese Dauer erst halbiren, um die bloße Zeit des Aufsteigens, oder diejenige des Fallens, allein zu bekommen. Das letzte Exempel hätte auch so vorgetragen werden können: Mit welcher Geschwindigkeit muß ein Körper gerade aufwärts geworfen werden, um daß er nach $4\frac{1}{2}$ Sekunden wieder an dem Orte zurück komme, wo er geworfen worden. Alsdann hätte man die Hälfte von $4\frac{1}{2}$ oder $2\frac{1}{4}$ für die Zeit des Steigens oder Fallens nehmen, und die Aufgabe, so wie kurz vorher geschehen ist, auflösen müssen.

§. 15.

Was wir bisher von geworfenen Körpern gesaget haben, gilt nur bloß für den Fall, wo der Wurf gerade aufwärts oder in einer vertikalen Richtung geschiehet. Dieser Fall ist aber der seltenste. Deswegen müssen wir noch untersuchen, wie sich ein Körper bewegt, der im leeren Raume, oder in einem wenig widerstehenden Raume, nach einer Richtung geworfen wird, die von der vertikalen Linie abweichet. Hierbei wird vorausgesetzt, daß der Leser die Eigenschaften der Parabel kennet, einer Linie, von welcher in allen Lehrbüchern der höheren Geometrie gehandelt wird. Allenfalls kann ein Anfänger auch meinen erleichterten Unterricht in der höheren Meßkunst nachschlagen, wenn er dieses Buch besitzet.

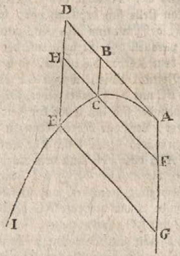
§. 16.

Lehrsatz.

Wenn ein schwerer Körper im leeren Raume geworfen wird, in einer Richtung, die nicht vertikal ist, so beschreibet er eine Parabel.

(Siehe folgende Figur.)

Wenn



Wenn der Wurf in vertikaler Richtung oder gerade aufwärts geschiehet, so haben wir schon gesehen, daß in diesem Falle der Körper mit einförmig-verspäteter Bewegung in gerader Linie steiget. Geschiehet aber der Wurf nach jeder anderen Richtung, so kann man sich die Bewegung folgender Weise vorstellen.

Ein schwerer Körper, der anfänglich in A ist, werde in der Richtung AD geworfen; so würde er, wenn keine Fallkraft vorhanden wäre, in der Linie AD, mit einförmiger Bewegung fortgehen, und solche Theile derselben durchlaufen, die sich wie die verflossenen Zeiten verhalten würden. Z. E. die Wege AB und AD würden sich verhalten wie die vom Anfange der Bewegung an gerechneten Zeiten t und T, kurz, es wäre

$$AB : AD :: t : T$$

Da der Körper aber schwer ist, so fällt er zugleich, unterdessen, daß er, vermöge des Wurfes, seitwärts fortgehet. Man stelle sich demnach vor, die Linie ohne Schwere, AD, gehe mit ihm herunter, und bleibe dabei mit sich selbst parallel. Z. E. während der Zeit t falle die Linie samt dem Körper bis in FH, so beschreibet das Ende A eine Vertikal-Linie, wovon AF ein Theil ist; und wenn man BC mit AF parallel ziehet, so ist FC = AB; der Punkt B befindet sich am Ende der Zeit t in C, und der Körper, der, vermöge der einförmigen Bewegung, bis B gekommen wäre, befindet sich jetzt wirklich in C.

Die Linie AD, oder FH, samt dem Körper, falle nun weiter herunter, bis zu Ende der Zeit T, immer seit dem Anfange der Bewegung gerechnet, und sie sei dann in GE. So hat das Ende A die vertikale AG beschrieben, und wenn man DE mit AG parallel ziehet, so ist DE = AG, und der Punkt D samt dem Körper muß jetzt in E sein.

Nun verhalten sich bei fallenden Körpern die durchlaufenen Räume, wie die Quadrate der, seit dem Anfange der Bewegung an, verflossenen Zeiten (§. 4, Zusatz I).

Also ist $AF : AG :: t^2 : T^2$

Da nun $AB : AD :: t : T$

so ist $AB^2 : AD^2 :: t^2 : T^2$

Aus der ersten und letzten dieser drei Proporzionen folget

$$AF : AG :: AB^2 : AD^2$$

oder $AF : AG :: FC^2 : GE^2$

Also, in der Linie AI, die der geworfene Körper beschreibet, verhalten sich die Abzissen AF, AG, wie die Quadrate der zustimmenden Applikaten FC, GE. Und da der Beweis sich auf jede zwei andere Paar Koordinaten anwenden läßt, so ist AI eine Linie, in welcher sich die auf der vertikalen AG genommenen Abzissen allemal verhalten, wie die zustimmenden, mit AD parallelen Abzissen.

Diese

Diese Linie ist demnach eine Parabel, wovon AG ein Diameter ist (Höhere Geomet. Hauptst. III, §. 28).

Zusatz I. Es ist klar, daß die gerade Linie AD die Parabel AI in A berühret. Denn nicht nur erfordert solches die Natur der Parabel, wo die Applikaten FC, GE mit der Tangente AD, die durch das Ende A des Diameters gehet, parallel sein müssen; sondern es ist auch leicht einzusehen, daß der Körper im ersten Augenblicke nur unendlich wenig von der Richtung AD abweichet, und also AD für die Verlängerung des ersten Theilchens der krummen Linie gehalten werden kann.

Zusatz II. Wenn man die Applikaten mit y, die Abszissen mit x, den Parameter aber mit p bezeichnet, so ist bekanntermaaßen,

$$y^2 = px$$

folglich $$p = \frac{y^2}{x}$$

oder $$p = \frac{FC^2}{AF}$$

oder $$p = \frac{GE^2}{AG}$$

Ueberhaupt, wenn man ein einziges Paar der Koordinaten bestimmet hat, so läßt sich der Parameter leicht finden, wenn man das Quadrat der Applikate durch die Abzisse dividiret, oder, welches einerlei ist, wenn man zur Abzisse und zur zustimmenden Applikate die dritte Proporzional-Linie suchet.

Da aber die Parabel für jeden Diameter einen anderen Parameter hat, so verstehet sichs, daß hier vom Parameter des Diameters AG, und keinem anderen die Rede ist.

Zusatz III. Ferner, wenn die Lage des Diameters AG, samt der Lage der Tangente AD, und folglich auch der Applikaten, nebst dem Parameter p bestimmet ist, so ist die Parabel völlig bestimmet, und sie gehet nothwendig durch die Punkte C, E, I. Denn mit diesen gegebenen Dingen lassen sich nicht zwei verschiedene Parabeln beschreiben.

§. 17.

Die Größe des Parameters hänget ab von der Kraft, womit der Wurf geschehen ist, und folglich von der Geschwindigkeit, womit der Körper seinen Lauf angefangen hat, wie wir unverzüglich sehen werden. Um nun für diese Geschwindigkeit und jene Kraft ein bestimmtes Maaß zu haben, so stelle man sich vor, daß der Körper mit derselbigen Kraft, und folglich mit derselbigen anfänglichen Geschwindigkeit im leeren Raume gerade aufwärts geworfen werde; dann ist es gewiß, daß er bis zu einer gewissen Höhe steigen muß, die von der Größe der werfenden Kraft oder der anfänglichen Geschwindigkeit abhänget (§. 14. Exempel II).

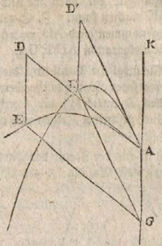
Um also einen deutlichen Begriff von der werfenden Kraft zu geben, kann man den Diameter der Parabel oberwärts verlängern, bis zur Höhe, wohin der Körper steigen würde, wenn der Wurf vertikal wäre. Diese Verlängerung stellet alsdann die Kraft des Wurfes vor, und es läßt sich auch leicht die anfängliche Geschwindigkeit daraus schließen (§. 14. Exempel V).

§. 18.

Lehrsatz.

Die Vertikal-Linie, welche die Kraft des Wurfes vorstellet, ist der vierte Theil des gemeinsamen Parameters aller möglicher Parabeln, welche der in beliebigen Richtungen, vermöge dieser Kraft geworfene Körper, beschreiben kann.

Es



Es sei AK die Linie, welche die Kraft des Wurfes vorstellet. Bildet man sich ein, daß der von A bis K gestiegene Körper wiederum von K bis A herunterfällt, so erhält er in A die nämliche Geschwindigkeit, die er anfänglich hätte (§. 14), und mit dieser kann er in eben so viel Zeit, als er zum Fallen gebrauchet hat, den doppelten Raum durchlaufen (§. 2, Zus. I). Es sei demnach AD = 2 AK. Man nehme nun AG = AK, so fällt die Linie AD sammt dem bewegten Körper (§. 16) von A bis G (mit der nämlichen Bewegung, als fiele sie von K bis A) während daß der Körper von A bis D läuft, und zuletzt ist der Körper in E, im Winkel des Parallelogramms ADEGA. Nun ist vermöge der Natur der Parabel

$$GE^2 = AG \times p$$

oder da GE = AD = 2 AK und AG = AK, so ist

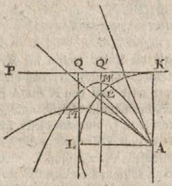
$$(2\,AK)^2 = AK \times p$$
$$4\,AK^2 = AK \times p$$
$$4\,AK = p$$
$$AK = \tfrac{1}{4}p.$$

 Dieser

Dieser Beweis gilt bei allen möglichen Winkeln, welche AD mit AK machen kann. Z. E. wenn die Richtung AD′ ist und genommen wird AD′ = 2AK, so gilt das nämliche vom Parallelogramm AD′E′GA.

Zusatz I. Alle mögliche Parabeln, die ein mit einer gewissen Kraft geworfener Körper beschreiben kann, haben, in Betrachtung des Diameters, der durch den Punkt gehet, wo der Wurf geschiehet, einen und denselben Parameter.

Zusatz II. Es ist aus der Natur der Parabel bekannt, daß die Entfernung vom Anfange A des Diameters bis



zum Nabel oder Brennpunkte L oder L′ allemal der vierte Theil des zum Diameter gehörigen Parameters ist, also ist $AL = \frac{1}{4}p = AK$, desgleichen $AL' = \frac{1}{4}p = AK$. Also $AK = AL' = AL$. Wenn man also aus A mit dem Halbmesser AK einen Zirkel KL beschreibet, so liegen in dessen Umkreise die Brennpunkte aller möglichen Parabeln, die ein aus A mit der Kraft AK geworfener Körper beschreiben kann.

Zusatz III. Wenn man annimmt, daß alle Richtungen und folglich alle Parabeln in einer Ebne liegen, und man

man ziehet in derselbigen Ebne KP horizontal, und folglich auf AK senkrecht, so ist KP die gemeinschaftliche Directrisse aller gedachter Parabeln. Denn die Entfernungen AK und AL, oder AK und AL′ sind gleich, wie es sich gehöret (Höh. Geom. Hauptst. III, §. 28)

Zusatz IV. Wenn man durch L und L′ vertikale Linien ziehet, so hat man die Scheitel M, M′ der Parabeln, und es sind MQ = ML, M′Q′ = M′L′. Dann ist MQ oder ML der vierte Theil des Haupt-Parameters der Parabel AM, und M′Q′, oder M′L′ ist der vierte Theil des Haupt-Parameters der Parabel AM′. Diese Parabeln lassen sich also leicht zeichnen, indem die Lagen der Axen und der Brennpunkte nebst den Hauptparametern gegeben sind.

Anmerkung. Unter dem Haupt-Parameter verstehe ich denjenigen, der zur Axe gehöret.

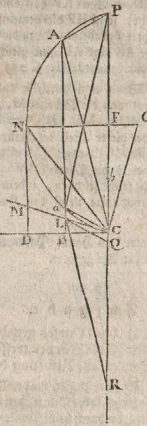
§. 19.

Aufgabe.

Es ist die Kraft des Wurfes gegeben, und ein Punkt, den der geworfene Körper treffen soll. Man verlanget die erforderliche Richtung des Wurfes.

Es sei C (folg. Fig.) der Punkt, wo der Wurf geschiehet, CD eine horizontale Linie, L der Punkt, den man treffen soll, CM eine gerade Linie, die durch beide Punkte C und L gehet, C*b* die vertikale Linie, welche die Kraft des Wurfes anzeiget, CP auch vertikal und = 4C*b*, folglich so groß als der Parameter aller möglichen Parabeln, die der mit der Kraft C*b* geworfene Körper beschreiben kann (§. 18).

Man nehme CF = 2C*b* = ½CP. Durch den Punkt F ziehe man eine horizontale Linie GN. Auf CL errichte man in C die senkrechte Linie CG. Aus dem Punkte G, wo GN und CG einander begegnen, und mit dem Halbmesser



messer CG beschreibe man den Zirkelbogen CNP. Durch den Punkt L ziehe man die vertikale Linie LA. Vom Punkte C ziehe man gerade Linien nach den Punkten A und *a*, wo der Zirkelbogen von der Linie LA geschnitten wird, so sind diese Linien CA, C*a* die beiden Richtungen, in welchen der Körper C mit der Kraft C*b* geworfen werden kann, wenn er den Punkt L treffen soll.

Zum

Zum Behuf des Beweises ziehe man noch PA, Pa, so sind die Dreiecke PAC, CAL ähnlich. Denn die Wechselwinkel PCA, CAL sind gleich. Ferner hat der Winkel APC halb soviel Grade als der Bogen CNA, auf welchem er gestützet ist; anderseits aber hat der Winkel ACL, der durch die Sehne AC und die Tangente CL gebildet wird, auch halb so viel Grade als der Bogen CNA. Also ist $\angle$ APC = ACL, und beide Dreiecke sind ähnlich. Folglich ist

$$PC : CA :: CA : AL$$

$$\text{daher } CA^2 = PC \times AL$$

Mit den Seiten AC und AL mache man das Parallelogramm ALRCA, so ist CA = RL und AL = CR, folglich $RL^2 = PC \times CR$

Wenn man demnach eine Parabel beschreibet, worin CR ein Diameter, C dessen Anfang, CP der Parameter, CA die Tangente bei C ist, so gehet diese Parabel durch den Punkt L, in dem das Quadrat der Applikate RL gleich ist, dem Rektangel aus der Abszisse CR und dem Parameter CP. Da aber eine solche Parabel, welche PC oder 4Cb zum Parameter hat, eine von denen ist, welche durch die Kraft des Wurfes Cb erzeuget werden, und da sie zugleich durch L gehet, so thut sie dem Verlangen Genüge, und ihre Tangente CA ist eine Richtung des Wurfes, wodurch der Punkt L getroffen wird.

Auf eine ganz ähnliche Art wird bewiesen, daß auch die Dreiecke PCa, CaL ähnlich sind, daß also

$$PC : Ca :: Ca : aL$$

oder wenn man das Parallelogramm CaLQ machet, daß

$$PC : QL :: QL : CQ$$

daß folglich

$$QL^2 = PC \times CQ$$

und

und daß die Parabel, welche CR zum Diameter, CP zum Parameter desselben, und Ca zur Tangente bei C hat, ebenfalls durch den Punkt L gehet.

Zusatz I. Wenn die vertikale LA außerhalb des Zirkelbogens fällt, und ihn also gar nicht schneidet, so ist die Aufgabe unmöglich, und das gegebene Ziel kann mit der gegebenen Kraft Cb gar nicht erreichet werden.

Zusatz II. Wenn die nämliche vertikale Linie den Zirkelbogen nur berühret, wie z. E. MN, so ist der Punkt M das entfernteste Ziel in der Linie CM, welches mit der gegebenen Kraft Cb erreichet werden kann. Die Richtung CN ist alsdann nur einfach, und sie halbiret den Winkel PCM, welchen die Linie CM worin das Ziel lieget, mit der vertikalen PC machet. Denn der Halbmesser GN halbiret die Sehne PC, worauf er senkrecht ist, und folglich den Bogen PNC. Nun hat $\angle$ PCN, halb so viel Grade, als der Bogen PAN, und $\angle$ NCM halb so viel, als der Bogen NaC: da nun diese Bögen gleich sind, so sind es auch jene Winkel. Folglich $\angle PCN = \angle NCM = \frac{1}{2} \angle PCM$.

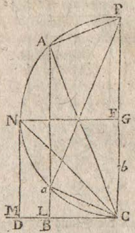
Zusatz III. Wenn die Vertikal-Linien LA den Zirkelbogen schneidet, so sind allemal zwei Richtungen möglich, vermittelst welcher das Ziel L getroffen werden kann, und beide machen gleiche Winkel mit der Richtung CN des weitesten Wurfes. Denn da GN auf die Sehne Aa senkrecht ist, so halbiret GN diese Sehne und den Bogen ANa, so daß $AN = aN$. Daher sind die auf AN und aN gestützte Winkel ACN, aCN gleich.

Hieraus folget auch, daß $\angle PCA = \angle LCa$, welche Gleichheit übrig bleibet, wenn man $\angle ACN = \angle aCN$ von $\angle PCN = NCM$ abziehet. Die beiden Richtungen also, wodurch der Punkt L getroffen wird, machen gleiche Winkel, der eine mit der Linie CM, worin das Ziel lieget, der andere mit der Vertikal-Linie PC.

Zusatz IV. Wenn der Punkt, welcher getroffen werden soll, in der nämlichen Horizontal-Linie lieget, mit

dem

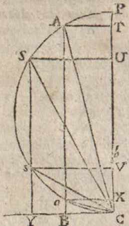
dem Punkte, wo der Wurf geschiehet, so bleibet der ganze Beweis der nämliche. Nur fällt alsdann die Linie CM



auf CD, der Punkt L auf B, M auf D, CG auf CF, G auf F. In diesem Falle ist die größte Wurfsweite $= CD = GN = GC = \frac{1}{2}PC = 2Cb$, also gleich dem halben Parameter der Parabel, oder der doppelten Linie Cb, welche die Kraft des Wurfes vorstellet. Der Winkel mit dem Horizont, welcher diese größte Weite giebt, ist $NCD = \frac{1}{2}PCD = 45$ Grad

Zusatz V. Im nämlichen Falle, wo der Wurf auf einer horizontalen Ebne oder Linie geschiehet, verhalten sich die Weiten der Würfe wie die Sinusse der doppelten Winkel, welche die Richtungen mit dem Horizonte machen.

Denn es werde ein Körper aus C (folg. Fig.) mit der Kraft, die durch Cb vorgestellet wird, in der Richtung CA oder Ca geworfen, so ist die Weite des Wurfes CB. Wird er in der Richtung CS oder Cs geworfen, so ist die Weite CY. Nun



Nun ist CB oder aX der Sinus des Bogens Ca oder des doppelten Winkels aCB. Ebenfalls ist CB oder TA der Sinus des Bogens PA oder seines Supplements $ASsC$, und dieser Bogen $ASsC$ hat doppelt so viel Grade als der Winkel ACB zwischen der Sehne und der Tangente. Eben so wird gezeiget, daß $CY = Vs = US$ der Sinus der Bögen Cas, $CasS$, oder der doppelten Winkel sCY, SCY ist. Da nun die Sinusse der nämlichen Winkel in jedem Zirkel einerlei Verhältniß haben, so verhalten sich in der That die Weiten der Würfe auf einer horizontalen Ebne, wie die Sinusse der doppelten Winkel, welche die Richtungen mit dem Horizont machen.

Zusatz VI. Beide Winkel über den Horizont, welche einerlei Weite des Wurfes auf einer horizontalen Ebne geben, sind einer das Komplement des andern, oder machen zusammen 90 Grad. Denn z. E. der Winkel SCY hat halb so viel Grade als der Bogen CsS, und der Winkel sCY halb so viel als der Bogen Cas, oder als PAS, also

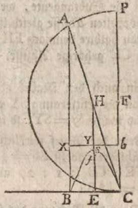
also beide zusammen halb soviel als $CasS + PAS$, das heißt, halb soviel als der halbe Zirkel.

Auch in dem Falle, wo der Wurf auf einer schiefen Ebne geschiehet, läßt sich auf eine ähnliche Art beweisen, daß beide Winkel zusammen allemal so viel machen, als der ganze Winkel zwischen der Vertikal-Linie und der schiefen, worin das Ziel lieget.

§. 20.

Aufgabe.

Die Höhe zu finden, bis zu welcher der mit einer gewissen Kraft, und in einer gewissen Richtung geworfene Körper steigen muß.



Es werde aus C ein Körper mit einer durch Cb vorgestellten Kraft in der Richtung CA geworfen, so nehme man an, der Wurf geschehe auf einer horizontalen Ebne CB (wenn auch dieses wirklich nicht Statt findet). Man mache wie vorher $CF = 2Cb$, $CP = 4Cb$. Aus F mit dem Halbmesser FC beschreibe man einen halben Zirkel, der die Richtungs-Linie CA irgendwo in A schneiden wird. Aus A fälle man die senkrechte AB, so ist, aus dem vorher bewiesenen, CB die horizontale Weite des Wurfes, und die Parabel muß durch C und B gehen; ihr Scheitel ist der verlangte höchste Punkt der Bahn, und muß bestimmet werden.

Durch b ziehe man die horizontale bX, so wissen wir schon, daß bX die Direktriße der Parabel ist (§. 18, Zusaß III). Da die verlangte Parabel eine vertikale Axe und zwei ähnlichgleiche Zweige hat, so muß die Axe zwischen C und B in der Mitte liegen. Man halbire demnach CB in E, und ziehe EH senkrecht bis daß sie der CA in H begegnet, so bestimmet diese EH die Lage der Axe.

Da nun CH eine Tangente der Parabel ist (§. 16, Zus. I), so ist EH die Subtangente, welche bei der Parabel allemal der doppelten Abzisse gleich ist (Höh. Geom. H. II, §. 4). Man halbire demnach EH in S, so ist ES die zur Applikate CE gehörige Abzisse. Folglich ist S der Scheitel.

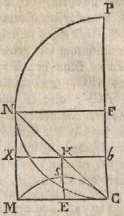
Will man nun auch den Nabel oder Brennpunkt haben, so messe man die Entfernung SY vom Scheitel bis zur Direktriße, und mache $Sf = SY$, so ist f der Nabel.

Zusaß I. Wenn der Wurf wirklich auf einer horizontalen Ebne geschiehet, so ist $ES = \frac{1}{4}AB$. Denn es ist $EH : AB :: CE : CB :: 1 : 2$, also $EH = \frac{1}{2}AB$, daher $ES = \frac{1}{2}EH = \frac{1}{4}AB$.

Zusaß II. Wenn die Richtung des Wurfes mit dem Horizonte einen Winkel von 45 Graden machet, so ist die Höhe bis wo der geworfene Körper steiget, gleich dem achten Theile des Parameters, oder der Körper gehet viermal weiter, als er hoch steiget (Folg. Fig.).

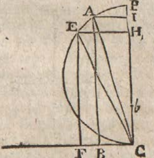
Denn in diesem Falle ist $ES = \frac{1}{2}EH = \frac{1}{4}MN = \frac{1}{8}CP$, und da $CM = CF = \frac{1}{2}CP$, so ist $ES = \frac{1}{4}CM$.

Auch



Auch ist hier E der Brennpunkt, und CM der Haupt-Parameter. Hingegen ist der Parameter für dem Diameter, der durch C gehet = 4CE = 2CM = 2CF = CP, welches mit der Konstrukzion übereinstimmet.

Zusatz III. Die Höhen, bis wohin die mit einerlei Geschwindigkeit geworfenen Körper steigen, verhalten sich wie die Sinusverse der doppelten Winkel, welche die Richtungen mit dem Horizonte machen.

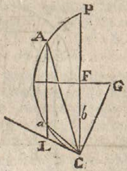


Wir haben eben gesehen, daß der mit der Kraft Cb in der Richtung CA geworfene Körper bis zu einer Höhe steiget, welche $= \frac{1}{4}$AB. Eben so steiget der mit der nämlichen Kraft in der Richtung CE geworfene Körper bis zu einer Höhe $= \frac{1}{4}$EF. Nun ist AB = CI, der Sinusversus des Bogens AEC, der doppelt so viel Grade hat, als der Winkel ACF, also ist auch AB der Sinusversus des zwiefachen Winkels ACF. Eben so wird bewiesen, daß FE = CH der Sinusversus des Bogens CE, oder des zwiefachen Winkels ECF ist. Folglich ist die erste Höhe zur zweiten, wie $\frac{1}{4}$AB zu $\frac{1}{4}$EF, oder wie AB zu EF, oder wie CI zu CH, oder wie der Sinusversus von $2 \angle$ ACF zum Sinusversus von $2 \angle$ ECF. Dieses gilt ebenfalls für die zwei Würfe, die denselbigen Punkt treffen (§. 19, Zus. III).

§. 21.

Lehrsatz.

Die Seiten, in welchen ein Körper das gegebene Ziel durch eine oder die andere dazu dienliche Richtung erreichet, verhalten sich wie die Sinusse der Winkel, den beide Richtungen mit dem Ziele machen.



Wir

Wir haben gesehen, daß der mit der Kraft *Cb* geworfene Körper das Ziel L treffen kann, sowohl wenn er in der Richtung CA, als wenn er in der Richtung *Ca* geworfen ward (§. 19, Zus. III). Wenn man sich nun die Entstehung der Parabel, die der geworfene Körper beschreibet, so wie oben (§. 16) vorstellet, nämlich daß der Körper die Linie CA oder *Ca* durchläuft, während daß diese mit sich selbst parallel herunterfällt, so ist klar, daß die verflossenen Zeiten sich verhalten, wie die Linien CA, *Ca*, welche durchlaufen werden, bis daß der Körper die Vertikal-Linie AL verrichtet hat, worin der Punkt L lieget. Die Zeiten, wovon die Rede ist, verhalten sich demnach wie die Linien CA, *Ca*, oder wie die Sehnen der Bögen *CaA*, und *Ca*. Die Sehne eines Bogens ist allemal gleich dem doppelten Sinus des halben Bogens. Also verhalten sich die Zeiten, wie die doppelten Sinusse der halben Bögen *CaA* und *Ca*, oder wie die einfachen Sinusse der halben Bögen. Da nun diese halben Bögen eben so viel Grade haben, als die Winkel ACL, *a*CL, so verhalten sich die Zeiten, wie die Sinusse der Winkel ACL, *a*CL.

§. 22.

Man vergesse nicht, daß die bisher vorgetragene Theorie der geworfenen Körper nur eigentlich für den leeren Raum eingerichtet ist. Jedoch trift sie in der Luft noch ziemlich zu, wenn der Körper viel Masse oder Gewicht hat, um die Luft mit desto mehr Stärke zu durchschneiden, und wenig Volumen oder Ausdehnung, um nicht zu viel Lufttheilchen im Wege anzutreffen; und wenn er dabei mit einer nicht gar zu großen Geschwindigkeit geworfen wird, um daß die Luft zum Ausweichen Zeit habe. Wenn man demnach eine eiserne oder bleierne Kugel mit der Hand wirft, so beschreibet sie ziemlich genau eine Parabel; auch wenn Wasser aus einer Röhre sprizet, so beschreibet es beinahe

beinahe eine Parabel. Hingegen bei Kanonen-Kugeln und Bomben ist an gar keine Parabel zu gedenken indem hier die Geschwindigkeit des geworfenen Körpers gar zu groß und folglich der Widerstand der Luft zu stark ist.

Indessen hat die vorige Theorie immer ihren Nutzen, indem sie in vielen Fällen hinlänglich ist. Auch ist sie deswegen merkwürdig, weil sie zur Theorie der Bewegung der Planeten Anlaß gegeben hat, indem man diese als Körper betrachtet, die eine Art von Schwere haben, wodurch sie sich bestreben in die Sonnen zu fallen, und zugleich annimmt, daß sie in gewissen Richtungen geworfen worden, mit einer Kraft, die hinlänglich war, um das Fallen auf ewig zu verhüten.

§. 23.

Wenn wir nun die im gegenwärtigen Hauptstücke vorkommenden Lehrsätze ins Kurze zusammenziehen, so lauten sie wie folget

Wenn ein Körper durch eine Kraft getrieben wird, die seine Bewegung auf eine einförmige Art beschleuniget, so leget er in einer gewissen Zeit, seit dem Anfange der Bewegung, nur den halben Weg zurück, den er durchlaufen hätte, wenn er sich mit der zuletzt erhaltenen Geschwindigkeit einförmig beweget hätte.

Die erhaltenen Geschwindigkeiten aber verhalten sich wie die seit dem Anfange der Bewegung verflossenen Zeiten.

Die seit dem Anfange der Bewegung durchlaufenen Wege verhalten sich wie die Quadratzahlen der verflossenen Zeiten, oder auch wie die Quadratzahlen der erhaltenen Geschwindigkeiten.

Wenn man die Zeit in gleiche Theile eintheilet, so nehmen die in den einzelnen Zeittheilen zurückgelegten Wege, wie die ungeraden Zahlen, zu.

Wenn

Wenn man die am Ende des ersten Zeittheiles erhaltene Geschwindigkeit, oder den doppelten im ersten Zeittheile zurückgelegten Weg, die Beschleunigung nennet, so hat man folgende vier Haupt-Gleichungen für die einförmig-beschleunigte Bewegung. 1) Der Weg ist gleich dem halben Produkte aus der erhaltenen Geschwindigkeit und der verflossenen Zeit; 2) die erhaltene Geschwindigkeit ist gleich dem Produkte aus der Beschleunigung und der Zeit; 3) der Weg ist noch gleich dem halben Produkte aus der Beschleunigung und dem Quadrate der Zeit; 4) derselbige Weg ist gleich dem Quozienten, welcher entstehet, wenn man das Quadrat der erhaltenen Geschwindigkeit durch die doppelte Beschleunigung dividiret.

Vermittelst der vier angeführten Gleichungen lassen sich alle Aufgaben auflösen, die sich auf die einförmig-beschleunigte Bewegung beziehen.

Die nämlichen Gleichungen können auch bei solchen Aufgaben gebrauchet werden, die sich auf die einförmig-verspätete Bewegung beziehen, wenn man nur annimmt, daß die Bewegung so lange dauret, bis daß die Geschwindigkeit null geworden ist. Denn jede dergleichen Aufgaben kann mit einer andern verwechselt werden, worin die Bewegung einförmig-beschleuniget ist. Wird aber eine beliebige Dauer der Bewegung angenommen, so kommen zwei Geschwindigkeiten, die anfängliche und die endliche, nebst der Zeit, dem Wege, und die Verspätung (im Gegensatze der Beschleunigung), in Betrachtung. Und für solche Fälle sind die gehörigen Formeln gegeben worden.

Alle Körper in der Nähe der Erde fallen, im leeren Raume, mit einer einförmig-beschleunigten Bewegung, und wenn man sie gerade aufwärts wirft, so steigen sie mit einer einfömig-verspäteten Bewegung. Wenn sie fallen, so durchlaufen sie in der ersten Sekunde 15,0981 Pariser Fuß, oder 15,6265 Rheinländische Fuß. Das Doppelte hiervon, oder 31,253 Rheinländische Fuß, ist für fallende Körper die Beschleunigung, oder für gerade aufsteigende die Verspätung, wenn die Zeit in Sekunden, der Weg aber und die Geschwindigkeit in Rheinländischen Fußen gerechnet werden.

In der Luft fallen nicht alle Körper mit gleicher Geschwindigkeit, wie im leeren Raume. Jedoch, wenn ein Körper wenig Ausdehnung und viel Masse hat, so geschiehet das Fallen oder Steigen in der Luft beinahe nach denselbigen Regeln, wie es im leeren Raume geschehen würde.

Diese Regeln sind keine andern, als die vorher von die einförmig-beschleunigten, oder einförmig-verspäteten Bewegung überhaupt, gegeben werden; und vermöge derselben können alle Aufgaben aufgelöset werden, die sich auf fallende und gerade aufsteigende Körper beziehen.

Wenn ein Körper nicht gerade aufwärts geworfen wird, sondern in einer Richtung, die mit dem Horizont einen schiefen Winkel machet, so ist die Bahn eine Parabel, vorausgesetzet, daß der Wurf im leeren Raume geschiehet, oder beinahe eine Parabel, wenn der Wurf in der Luft geschiehet, und nur mit einer mittelmäßigen Geschwindigkeit.

Wenn ein Wurf in schiefer Richtung geschiehet, so läßt sich allemal angeben, wie hoch der Körper steigen würde, wenn er durch dieselbige Kraft, und folglich mit derselbigen anfänglichen Geschwindigkeit gerade aufwärts geworfen würde. Diese Höhe giebt demnach die Kraft des Wurfes zu erkennen.

Die

Die gedachte Höhe ist allemal derjenigen Linie gleich, welche vom Punkte, wo der Wurf geschiehet, bis zum Nabel oder Brennpunkte der Parabel gehet, oder die bemeldete Höhe ist der vierte Theil des Parameters der Parabel für denjenigen Diameter, der in vertikaler Richtung durch den Punkt gehet, wo der Wurf geschiehet.

Aus diesen Gründen und aus den bekannten Eigenschaften der Parabel läßt sich die Richtung des Wurfes bestimmen, wenn ein gewisser Punkt getroffen werden soll, und diese Richtung ist allemal doppelt, ausgenommen für dem weitesten Wurf. Dieser erfordert auf einer horizontalen Eb e einen Winkel von 45 Grad. Auch läßt sich die Höhe bestimmen, bis zu welcher der geworfene Körper steigen muß.

Die genauere Entwickelung aller dieser Lehren kann man in den Stellen, wo sie abgehandelt werden, nachlesen.

Viertes Hauptstück.

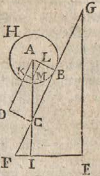
Von schweren Körpern, die längs einer schiefen Ebne oder einer krummen Linie gleiten.

§. 1.

Lehrsatz.

Wenn ein schwerer Körper längs einer schiefen Ebne herunter gleitet, so ist seine Bewegung einförmig-beschleuniget, und nach jeder gegebenen Zeit, seit dem Anfange der Bewegung, hat er eine Geschwindigkeit, die sich zu derjenigen, welche er durch den freien Fall erhalten hätte, eben so verhält, wie die senkrechte Höhe der Ebne zu ihrer Länge, oder wie der Sinus des Neigungs-Winkels zum Sinus-totus.

Gesetzt, der Körper H (folg. Fig.) laufe längs der schiefen Ebne GF herunter, so bekömmt er von der Fallkraft unendlich viel gleiche und in gleichen Zeiträumchen auf einander folgende Stöße, die in vertikaler Richtung von oben nach unten gehen. Diese Stöße werden zwar durch den Widerstand der schiefen Ebne geschwächet; da aber der Winkel, den die Vertikal-Linie mit der Ebne GF machet, allemal gleich ist, so werden sie alle um gleich viel geschwächet, wie aus den Regeln des Stoßes (H. II, §. 10) leicht zu folgern ist. Also bleiben demnach die Stöße



Stöße unter sich gleich. Folglich ist die daraus entstehende Bewegung einförmig-beschleuniget (H. III, §. 1).

Laßt uns jetzt genauer betrachten, nach welchem Verhältnisse jeder Stoß geschwächet wird. Es sei GF die schiefe Ebne, EF waagerecht, EG lothrecht, H der Körper, A sein Schwerpunkt, AC lothrecht, CI die lothrechte Verlängerung der AC, AD mit GF gleichlaufend, AB und CD auf GF senkrecht, M ein Punkt in der AC unendlich nahe bei A, MK mit CD und ML mit AD parallel.

Gesetzt, ein einziger der Stöße, welche der Körper von der Fallkraft leidet, sei im Stande, wenn der Körper frei ist, ihn von A bis M zu treiben, so zerleget sich diese Geschwindigkeit AM in zwei andern AK und AL, deren letztere durch den Widerstand der Ebne GF vernichtet wird. Es bleibet also nur die Geschwindigkeit AK. Also verhält sich die ganze Wirkung der Fallkraft, zu dem Theile derselben, welcher auf der schiefen Ebne übrig bleibet, wie AM zu AK, oder wie AC zu AD, oder wie AC zu BC. Nun sind die Dreiecke ACB und FCI ähnlich, weil sie bei C Scheitelwinkel und jeder einen Rechten haben. Ferner sind auch die Dreiecke FCI und FGE ähnlich, weil CI und EG gleichlaufend sind. Also ist ferner

AC

AC zu BC, wie FC zu CI, und wie FG zu EG. Es ist demnach AM zu AK, wie FG zu EG, oder wie der Sinus-Totus zum Sinus des Neigungs-Winkels F, den die Ebne mit dem Horizont machet.

Das nämliche gilt von jedem Stoße der Fallkraft, also auch von den Summen gleich vieler Stöße, folglich von den Geschwindigkeiten, die durch gleich viel Stöße erzeuget sind, folglich von den Geschwindigkeiten, die in gleichen Zeiten seit dem Anfange der Bewegung erzeuget worden. Diese verhalten sich demnach allemal bei einem frei fallenden, und einem auf einer schiefen Ebne gleitenden Körper, wie der Sinus-Totus zum Sinus des Neigungs-Winkels.

Zusatz I. Es sei demnach p die nach einer Sekunde des freien Falles erhaltene Geschwindigkeit, der Neigungs-Winkel sei φ, der Sinus-Totus sei 1, und die nach einer Sekunde auf der schiefen Ebne erhaltene Geschwindigkeit sei x, so ist, wenn $\mathfrak{S}$ den Sinus bedeutet,

$$p : x :: 1 : \mathfrak{S}\varphi$$

$$\text{daher} \quad x = p . \mathfrak{S}\varphi$$

Zusatz II. Alle Formeln für die einförmig-beschleunigte Bewegung (Hauptst. III, §. 4. u. 12), lassen sich hier eben sowohl als bei dem freien Falle gebrauchen, wenn man nur $p\mathfrak{S}\varphi$ anstatt p setzt. Es ist demnach

$$w = \tfrac{1}{2}p.\mathfrak{S}\varphi.\ t^2$$

$$w = \frac{v^2}{2p.\mathfrak{S}\varphi}$$

$$t = \sqrt{\frac{w}{\tfrac{1}{2}p.\mathfrak{S}\varphi}}$$

$$t = \frac{v}{p.\mathfrak{S}\varphi}$$

$$v = \sqrt{(2p.\mathfrak{S}\varphi.w)}$$

$$w = p.\mathfrak{S}\varphi.t$$

in

in welchen Formeln φ der Neigungs Winkel der Ebne ist; p die in einer Sekunde beim freien Falle erzeugte Geschwindigkeit $= 31{,}253$ (H. III, §. 11); t die seit dem Anfange der Bewegung verflossene Zeit; v die Geschwindigkeit, welche der Körper auf der schiefen Ebne am Ende der Zeit t hat, w der während dieser Zeit auf der schiefen Ebne durchlaufene Raum.

Zusatz III. Wenn ein Körper einen Stoß bekömmt, um daß er längs einer schiefen Ebne hinaufsteige, und die Richtung dieses Stoßes mit der Ebne parallel ist, so erzeuget dieser Stoß eine gewisse Geschwindigkeit c, und es entstehet eine einförmig-verspätete Bewegung, auf die man alle Formeln des §. 6 im IIIten Hauptstücke anwenden kann, wenn man nur allenthalben $p \ominus \varphi$ anstatt p schreibet. Geschiehet der Stoß in schiefer Richtung gegen die Ebne, so zerleget man ihn, wie gewöhnlich, in zwei andere, wovon der eine welcher auf der Ebne senkrecht ist, verloren gehet, der andere aber, der mit ihr parallel ist, seine Wirkung thut, und die anfängliche Geschwindigkeit erzeuget.

Anmerkung I. Exempel wären hier überflüßig. Ein jeder, der die Lehre vom Fallen und Steigen der Körper, wenn sie frei sind, recht verstanden hat, wird bei Bewegungen auf den schiefen Ebnen keine Schwierigkeit finden, und wenn er es für nöthig hält, sich selbst Exempel machen können.

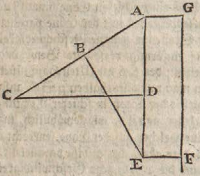
Anmerkung II. Es wird vorausgesetzet, daß die Bewegung im leeren Raume geschiehet, oder wenigstens, daß der Körper eine beträchtliche Masse und ein geringes Volumen habe, um daß ihm die Luft nicht merklich widerstehe. Auch wird angenommen, daß keine merkliche Reibung Statt findet. Ohne diesen Bedingungen würden die Regeln und Formeln die Probe der Erfahrung nicht aushalten.

§. 2.

§. 2.

Aufgabe.

Zwei Körper kommen aus derselbigen Höhe. Der eine fällt frei herunter, der andere längs einer schiefen Ebne. Man soll nach einem beliebigen Zeitraume, aus dem bekannten Orte des einen, den Ort des andern finden.



Der eine Körper gleite aus A längs der schiefen Ebne AC, deren vertikale Höhe AD, und deren horizontale Basis CD ist. Zu gleicher Zeit falle ein anderer Körper aus G frei herunter, indem G so hoch ist als A, oder AG eine horizontale Linie ist. Nun sei der Körper G bis F gekommen, und es werde gefraget, wo dann A ist. Man verlängere nöthigenfalls AD, und nehme AE = GF. Oder, man ziehe durch F die horizontale FE, die den Punkt E bestimmet. So kann man sich vorstellen, der Körper G habe anstatt AF den gleichen Raum AE durchlaufen. Aus E fälle man EB auf AC senkrecht, so ist B der Punkt, wo sich A befindet, wenn G in F ist.

Denn es ist der Weg des G = $\frac{1}{2}pt^2$ (Hp. III, §. 5), und des A = $\frac{1}{2}p.S\varphi.t^2$ (§. 1, Zus. II). Da nun die Zeiten

Zeiten t gleich sind, und auch p unveränderlich ist, so ist

$$\tfrac{1}{2}pt^2 : \tfrac{1}{2}p.\text{S}\varphi.t^2 :: 1 : \text{S}\varphi$$

Nun ist 1 zu Sφ, wie AC zu AD. Ferner sind die Dreiecke ACD und AEB ähnlich, weil sie den gemeinsamen Winkel A und überdies jeder einen Rechten haben. Mithin ist AC zu AD, wie AE zu AB. Also ist $1 : \text{S}\varphi$ :: AE : AB, oder der Weg des freifallenden Körpers verhält sich zum Wege des gleitenden, wie AE zu AB. Da nun AE = GF der wirkliche Weg des erstern ist, so ist AB der wirkliche Weg des andern.

Ist AB gegeben, und man verlanget AE oder GF, so wird auf AC im Punkte B die BE senkrecht errichtet. Dann es ist der Weg des gleitenden zum Wege des fallenden, wie $\tfrac{1}{2}p.\text{S}\varphi.t^2$ zu $\tfrac{1}{2}p.\text{S}\varphi$, oder wie S$\varphi$ zu 1, oder wie AD zu AC, oder wie AB zu AE.

§. 3.

Lehrsatz.

Wenn man in einem Zirkel, dessen Ebne vertikal ist, einen vertikalen Durchmesser, und vom oberen Ende desselben noch eine beliebige Sehne ziehet, so brauchet ein schwerer Körper gleich viel Zeit, um entweder längs dem Durchmesser zu fallen, oder längs der Sehne zu gleiten.

Es falle ein Körper längs dem vertikalen Durchmesser AC, und ein anderer gleite längs der Sehne AB. Es sei der

der erstere bis in C gekommen, so bekömmt man den Ort des anderen, wenn man aus C auf AB die senkrechte CB fället (§. 2). Da also CBA ein rechter Winkel, und ABC ein halber Zirkel ist, so wird der Scheitel B dieses Winkels allemal in der Peripherie, und am Ende der Sehne liegen. Also kommen beide Körper zugleich, der eine in C, der andere in B. Läßt man denselben Körper einmal fallen, und ein andermal gleiten, so ist ebenfalls klar, daß er nicht mehr Zeit gebrauchen wird, um AC als um AB zu durchlaufen.

Zusatz I. Es wird gleich viel Zeit erfordert, um daß der Körper, welche man will von den Sehnen AB, AF, AE oder AD durchlaufe, nämlich allemal so viel, als für den Fall längs AC.

Zusatz II. Der Lehrsatz gilt auch, wenn die Sehnen von dem untern Ende F des vertikalen Durchmessers ausgehen, wie DF, EF. Denn man ziehe AC mit DF,

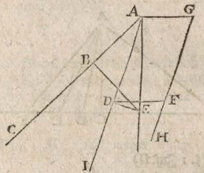
AB mit EF parallel, so ist leicht einzusehen, daß AC und AB nicht nur eben so als DF und EF gegen den Horizont geneiget sind, sondern daß auch jede mit jeder gleich ist. Es werden also DF und EF eben so geschwinde durchgelaufen, als AC und AB, das heißt, eben so geschwinde, als der Durchmesser AF.

§. 4.

§. 4.

Aufgabe.

Es gleiten zwei Körper zugleich aus gleichen Höhen, auf Ebnen, die verschiedene Neigungen haben. Aus der Lage des einen soll die Lage des anderen gefunden werden.



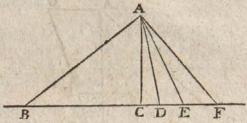
Es sei AG horizontal. Aus A gleite ein Körper längs AC, und aus G ein anderer längs GH. Der erstere sei in B gekommen. Ziehe AE lothrecht, BE auf AC im Punkte B senkrecht, AI mit GH gleichlaufend, ED aus E auf AI senkrecht, DF horizontal, so ist G in F, wenn A in B ist.

Denn gesetzt, ein dritter Körper fiele zugleich längs AE, so wäre er in E, wenn A in B ist (§. 2). Gesetzt ferner, GH befände sich in AI, so wäre auch zu gleicher Zeit G in D (§. 2). Da nun durch die Konstrukzion GF = AD, so ist G in F, wenn der eingebildete Körper in E, und folglich wenn A in B ist.

§. 5.

Lehrsatz.

Die Zeit, während welcher ein Körper eine schiefe Ebne durchläuft, verhält sich zur Zeit, die er brauchet, um von derselbigen Höhe gerade herunter zu fallen, wie die Länge der schiefen Ebne zu ihrer Höhe, oder wie der Sinus-totus zum Sinus des Neigungs-Winkels.



Es ist (§. 1 Zus. II)

$$AC = \tfrac{1}{2}p \cdot t^2$$

$$AB = \tfrac{1}{2}p \cdot S\varphi \cdot T^2$$

wo t die Zeit des Fallens und T die Zeit des Gleitens andeutet. Daher ist

$$t^2 = \frac{AC}{\tfrac{1}{2}p}$$

$$T^2 = \frac{AB}{\tfrac{1}{2}p \cdot S\varphi}$$

Also ist $t^2 : T^2 :: \frac{AC}{\tfrac{1}{2}p} : \frac{AB}{\tfrac{1}{2}p \cdot S\varphi}$

$$:: AC : \frac{AB}{S\varphi}$$

Ferner ist $AC = AB . \mathfrak{S}\varphi$, also

$$t^2 : T^2 :: AB.\mathfrak{S}\varphi : \frac{AB}{\mathfrak{S}\varphi}$$

oder $t^2 : T^2 :: \mathfrak{S}\varphi : \frac{1}{\mathfrak{S}\varphi}$

oder $t^2 : T^2 :: \mathfrak{S}\varphi^2 : 1$

folglich $t : T :: \mathfrak{S}\varphi : 1$

oder $t : T :: AC : AB$.

Zusatz. Wenn verschiedene Körper von gleich hohen Ebnen AD, AE, AF herunter gleiten, so verhalten sich die Zeiten wie die Längen der Ebnen. Denn es seien diese Zeiten T', T'', T''', so ist

$t : T' :: AC : AD$, daher $T' = \frac{AD.t}{AC}$

$t : T'' :: AC : AE$, daher $T'' = \frac{AE.t}{AC}$

$t : T''' :: AC : AF$, daher $T''' = \frac{AF.t}{AC}$

Also

$$T' : T'' :: \frac{AD.t}{AC} : \frac{AE.t}{AC} :: AD : AE$$

$$T' : T''' :: \frac{AD.t}{AC} : \frac{AF.t}{AC} :: AD : AF$$

$$T'' : T''' :: \frac{AE.t}{AC} : \frac{AF.t}{AC} :: AE : AF$$

oder $T' : T'' : T''' :: AD : AE : AF$

§. 6.

Lehrsatz.

Wenn ein Körper längs einer schiefen Ebne herunter gleitet, so erlanget er zulezt eben die Geschwindigkeit, die er bekommen hätte, wenn er von derselbigen Höhe gerade herunter gefallen wäre. (Siehe die vorige Figur.)

Es sei v die durch den Fall längs AC erhaltene Geschwindigkeit, und V die durch das Gleiten längs AB erhaltene, so ist (§. 1. Zus. II)

$$v = pt$$

$$V = p.S\varphi.T$$

wo t die Zeit des Fallens und T die Zeit des Gleitens ist.

Also $v : V :: pt : p.S\varphi.T$

$v : V :: t : T.S.\varphi.$

Nun ist (§. 5) $T : t :: AB : AC :: 1 : S\varphi.$

also $T.S\varphi = t,$

folglich $v : V :: t ; t$

oder $v = V.$

Zusaz. Wenn verschiedene Körper längs verschiedenen Ebnen gleiten, die einerlei Höhe haben, so bekommen sie zulezt alle einerlei Geschwindigkeit. Z. E. Wenn sie die Linien AD, AE, AF (Seite 178) durchlaufen, so haben sie in D, E, F, dieselbige Geschwindigkeit, welche der lezten Geschwindigkeit eines Körpers gleich ist, der von A bis C gefallen ist.

§. 7.

Lehrsatz.

Wenn verschiedene Körper aus derselbigen Höhe, aber auf verschiedenen schiefen Ebnen, herunter

unter gleiten, und man durchschneidet diese Ebnen, wo man will, durch eine horizontale Ebne, so geben sie mit einerlei Geschwindigkeit durch diese horizontale Ebne.

Wenn die Körper A, B und C, welche längs den Ebnen AG, BH, CI gleiten, anfänglich in einer Horizontal-Ebne AC liegen, und man leget noch die horizontalen Ebnen DEF, GHI nach Belieben, so hat A in D die nämliche Geschwindigkeit als B in E, und C in F. Eben so haben A in G, B in H, und C in I einerlei Geschwindigkeit. Man darf sich nur vorstellen, daß die schiefen Ebnen sich in DF oder in GI endigen, so gilt der vorige Beweis. Man kann auch, wenn man will, die schiefen Ebnen so zusammen rücken, daß die Punkte A, B, C wie im vorigen Paragraph auf einander fallen.

Anmerkung. Man beobachte, daß hier von der Zeit gar nicht die Rede ist, und daß die 3 Körper nicht zugleich in D, E und F, oder G, H und I ankommen (§. 5); sondern, wenn sie angekommen sind, haben sie einerlei Geschwindigkeit, die der eine später, der andere früher bekömmt.

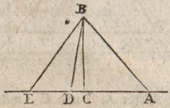
§. 8.

Lehrsaz.

Wenn ein Körper mit einer gewissen Geschwindigkeit anfängt, längs einer schiefen Ebne zu steigen,

gen, so gelanget er eben so hoch, als er hätte herunter gleiten müssen, um dieselbige Geschwindigkeit zu erlangen; er braucht auch eben so viel Zeit.

Dieses ist schon von jeder einförmig-verspäteten Bewegung bewiesen worden (Hauptst. III, §. 8).



Gesetzt also, ein Körper sei von B bis A geglitten, und habe bei A eine Geschwindigkeit c erlanget. Wenn er nun mit dieser Geschwindigkeit c anfängt zu klimmen, so gehet er bis B zurück, bevor seine Bewegung ganz erschöpfet ist. Auch brauchet er eben so viel Zeit von A bis B als von B bis A.

Zusatz I. Da der Körper im Absteigen eine Geschwindigkeit c erhalten hat, so würde er auch im Fallen längs BC die nämliche Geschwindigkeit c erhalten haben (§. 6). Nun kann er, vermöge dieser Geschwindigkeit, wiederum bis B schief aufsteigen; er kann aber auch, vermöge derselben, von C bis B gerade aufsteigen (Hauptst. III, §. 8). Wenn also ein Körper mit einer gewissen Geschwindigkeit anfängt, auf einer schiefen Ebne zu steigen, so kömmt er eben so hoch, als er kommen würde, wenn er mit derselbigen anfänglichen Geschwindigkeit gerade aufstiege.

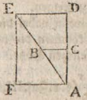
Zusatz II. Verschiedene Körper, die von der nämlichen Horizontal-Fläche an, mit derselbigen anfänglichen Geschwindigkeit, auf verschiedenen schiefen Ebnen steigen, kommen

kommen alle bis zur nämlichen Höhe. Denn z. E. D längs DB, E längs EB, A längs AB, kommen alle mit der Geschwindigkeit c, vermöge des vorigen Zusatzes, bis zur vertikalen Höhe CB, oder bis in B, das ist, bis zur Höhe, wohin ein Körper mit der nämlichen anfänglichen Geschwindigkeit c gerade aufgestiegen wäre.

§. 9.

Lehrsatz.

Wenn ein Körper mit einer gewissen anfänglichen Geschwindigkeit auf einer schiefen Ebne steiget, so hat er in jeder Höhe dieselbige Geschwindigkeit, als wenn er mit der nämlichen anfänglichen Geschwindigkeit bis zur nämlichen Höhe gerade aufwärts gestiegen wäre.



Gesetzt, zwei Körper steigen zugleich mit derselbigen anfänglichen Geschwindigkeit, einer längs der schiefen Ebne AE, der andere gerade aufwärts längs AD. Man ziehe BC horizontal, oder mit AF parallel. Es sei $\phi = \angle EAF = \angle ABC$, der Neigungs-Winkel der Ebne AE gegen den Horizont. Es sei v die Geschwindigkeit in C, und V die in B, so ist

$$v^2 = c^2 - 2p.AC \text{ (H. III, §. 13, Ex. XI).}$$
$$V^2 = c^2 - 2p.S\phi.AB \text{ (§. 1, Zus. III).}$$

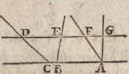
 Nun

Nun ist $AC = AB.S\varphi$, also auch

$$v^2 = c^2 - 2p.AB.S\varphi = V^2$$

da also $v^2 = V^2$, so ist $v = V$, das heißt, beide Geschwindigkeiten sind gleich.

Zusatz I. Wenn also verschiedene Körper A, B, C längs verschiedenen schiefen Ebnen steigen, und ihre an-



fängliche Geschwindigkeit gleich ist, so haben sie allemal in gleichen Höhen, als in F, E, D, die nämliche Geschwindigkeit, welche derjenigen eines gerade aufsteigenden Körpers in G gleich ist, der mit der nämlichen Geschwindigkeit angefangen hat zu steigen.

Zusatz II. Und wenn dabei die Neigungen zweier Ebnen gleich sind, so kommen die beiden Körper auch in derselbigen Zeit zur nämlichen Höhe. Denn es ist

$$t = \frac{c - v}{p.S\varphi} \text{(§.1,Zus.III, u.H.III, §.15 Er.V.)}$$

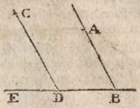
Weil nun $S\varphi$ für beide Ebnen einerlei ist, und weil auch v in gleichen Höhen einerlei ist, so ist gleichfalls t einerlei.

§. 10.

Lehrsatz.

Wenn zwei Körper längs zwei gleich schiefen Ebnen entweder heruntergehen oder aufwärts steigen, so verhalten sich die Quadrate der während der ganzen Bewegungen verflossenen Zeiten, wie die Längen der durchlaufenen Räume.

Es



Es sei $\angle$ ABE = $\angle$ CDE = φ. Ein schwerer Körper gleite von A bis B, in der Zeit t, ein anderer von C bis D in der Zeit T, so ist (§. 1, Zus. II)

$$AB = \tfrac{1}{2}p.S\varphi.t^2$$
$$CD = \tfrac{1}{2}p.S\varphi.T^2$$

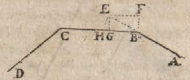
folglich AB zu CD, wie $\tfrac{1}{2}p.S\varphi.t^2$ zu $\tfrac{1}{2}p.S\varphi.T^2$, oder wie t^2 zu T^2.

Steiget ein Körper B mit einer gewissen anfänglichen Geschwindigkeit bis A, und D mit einer andern bis C, so steigen sie so hoch und so lange, als sie müßten heruntergeglitten sein, um die gedachten Geschwindigkeiten zu erhalten. Folglich findet hier die nämliche Proporzion Statt.

§. 11.

Lehrsatz.

Wenn ein Körper ohne Schwere sich längs dem Umfange eines Vielecks beweget, so verlieret er beim Uebergange von einer Seite des Winkels zur folgenden, einen Theil seiner Geschwindigkeit; und die verlorne Geschwindigkeit verhält sich zur ganzen die er hatte, wie der Sinus-Versus des Winkels, den die eine Seite mit der Verlängerung der andern machet, zum Sinus-Totus.



Gesetzt, ein Körper A bekomme einen Stoß in der Richtung AB, und er sei gezwungen sich in der Konkavität des Winkels ABCD zu bewegen. Auf der verlängerten AB nehme man BE gleich der Geschwindigkeit, mit welcher der Körper sich längs AB bewegete. Man ziehe EF mit BC parallel, hingegen EG und BF auf BC senkrecht, so ist die Geschwindigkeit BE in zwei andere BF und BG zerleget, von denen BF ohne Wirkung bleibet, BG aber den Körper längs der BC forttreibet. Aus dem Mittelpunkte B, mit dem Halbmesser BE beschreibe man einen Bogen EH, so ist GH = BH — BG = BE — BG. Also ist GH die verlorne Geschwindigkeit. Da nun GH der Sinus-Versus, und BE der Halbmesser ist, so hat der Lehrsatz seine Richtigkeit.

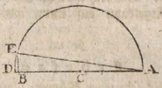
§. 12.

Lehrsatz.

Wenn ein Körper gezwungen ist, sich längs einer krummen Linie zu bewegen, so verlieret er dadurch nichts von seiner Geschwindigkeit, sondern gehet eben so geschwinde, als wenn er seinen Weg in einer geraden Linie fortsetzte.

Man kann sich eine krumme Linie als ein Vieleck von unendlich viel Seiten vorstellen. Jede dieser Seiten machet mit der Verlängerung der vorhergehenden einen unendlich kleinen Winkel. Also verlieret (§. 11) der Körper, bei dem

dem Uebergange von einer dieser kleinen Seiten zur folgenden, an Geschwindigkeit so viel, als der Sinus-Versus eines unendlich kleinen Bogens beträgt, welcher die vorige Geschwindigkeit zum Halbmesser hat. Es ist aber der Sinus-Versus eines unendlich kleinen Bogens unendlichmal unendlich kleiner, als der Sinus-Totus.



Denn es sei der Bogen DE unendlich klein, so ist auch der Sinus EB unendlich klein; nun ist

$$AB : BE :: BE : BD$$

daher $$BD = \frac{BE^2}{AB}$$

Da nun BE unendlich klein ist, so ist BE^2 und folglich $\frac{BE^2}{AB}$ unendlichmal unendlich klein im Vergleich mit AB, und also auch mit AC oder CD. Folglich können in unserm Falle, unendlich viel solche Verluste, wie der Sinus-Versus eines unendlich kleinen Bogens beträgt, nur zusammen einen unendlich kleinen Verlust ausmachen, das heißt, der Körper der sich in einer krummen Linie beweget, verlieret überhaupt unendlich wenig, oder gar nichts von seiner Geschwindigkeit.

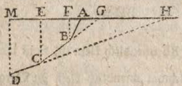
Zusatz I. Wenn die krumme Linie geschlossen ist, wie ein Zirkel, eine Ellipse u. s. w., so kann der Körper unendlich-endlich mal, das heißt immer, herumgehen, ohne etwas von seiner Geschwindigkeit zu verlieren, wohl verstanden, daß hier weder der Widerstand der Luft, noch die Reibung in Betrachtung kommen.

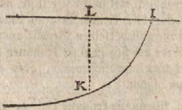
Zusatz II. Hierauf gründet sich eine Art von Kegelspiel, wo die Kugel in einer gekrümmten Rinne herumläuft, bevor sie in gerader Linie nach den aufgestellten Kegeln hingehet. Dadurch wird der Raum erspart, so daß die ganze Kegelbahn auf einem mittelmäßigen Tische Platz hat.

§. 13.

Lehrsatz.

Wenn ein schwerer Körper längs einer krummen Linie heruntergleitet, die in einer vertikalen Ebne lieget, so hat er an jeder Stelle die nämliche Geschwindigkeit, als wenn er von derselben Höhe frei heruntergefallen wäre.





Laßt

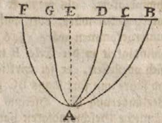
laßt uns anfänglich annehmen, daß der Körper A längs dem Umfange ABCD eines Vielecks heruntergleite, aber mit der ausdrücklichen Bedingung, daß der Stoß an die Ecken B, C, seine Geschwindigkeit keineswegs verändere, oder, wenn man will, daß der jedesmalige Verlust durch einen hinlänglichen Stoß ersetzet werde. Der Körper sei nun bis B gekommen, so hat er daselbst die nämliche Geschwindigkeit, als wenn er von derselbigen Höhe FB heruntergefallen wäre, oder auch, als wenn er längs GB heruntergekommen wäre (§. 6). Wenn sich nun die Geschwindigkeit in der Ecke B nicht verändert, so kann man sich vorstellen, er sei wirklich von G bis B gekommen, und fahre nun fort längs BC zu gleiten, wovon GB die Verlängerung ist. Hieraus folget, daß er nun in C die nämliche Geschwindigkeit hat, als wenn er in der Linie EC heruntergefallen, oder längs HC heruntergeglitten wäre (§. 6), welche HC die Verlängerung der CD ist. Was die bloße erhaltene Geschwindigkeit betrift, so kann man sich also vorstellen, der Körper sei von H bis C gekommen, und gelange nun bis D, indem bei C, der Voraussetzung zufolge, der Geschwindigkeit nichts abgehet. Wenn er also bis D gekommen ist, so hat er in D die nämliche Geschwindigkeit, als wenn er längs MD heruntergefallen wäre. Und so kann man weiter gehen. Hier siehet man deutlich, daß die Geschwindigkeit am Ende jeder Seite des Polygons eben so groß ist, als wenn der Körper von derselbigen Höhe frei heruntergefallen wäre.

Nimmt man nun anstatt des Polygons eine krumme Linie IK, so ist diese als ein Polygon von unendlich viel Seiten zu betrachten, und in diesem Falle gilt wirklich die Voraussetzung, daß der Geschwindigkeit durch den Uebergang von jeder unendlich kleinen Seite zur folgenden, nichts abgehet (§. 12). Daraus folget nun, daß wenn ein Körper von I bis nach K längs der krummen IK geglitten ist, er in K die nämliche Geschwindigkeit habe,

als

als wenn er von L bis K gerade heruntergefallen wäre, indem IL horizontal gezogen worden.

Zusatz. Wenn verschiedene Körper längs verschiedenen krummen Linien von derselbigen Höhe heruntergeglitten sind, so haben sie zuletzt alle die nämliche Geschwindigkeit.



Also, wenn B längs BA, C längs CA, D längs DA, G längs GA, F längs FA, gleiten, so haben sie alle in A die Geschwindigkeit, die ein Körper zuletzt haben würde, der von E bis A gefallen wäre.

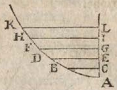
Anmerkung. Ich sage nicht, daß sie alle in gleicher Zeit herunterkommen, sondern daß sie alle am Ende ihrer Bahn gleich geschwinde gehen.

§. 14.

Lehrsatz.

Wenn ein Körper mit einer gewissen anfänglichen Geschwindigkeit längs einer krummen Linie, die in einer vertikalen Ebne lieget, hinaufsteiget, so gelanget er bis zur nämlichen Höhe, wohin er gekommen wäre, wenn er mit derselbigen anfänglichen Geschwindigkeit gerade aufwärts gestiegen wäre.

Gesetzt,

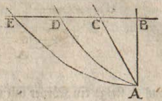


Gesetzt, aus A steige ein Körper mit einer gewissen anfänglichen Geschwindigkeit längs der krummen Linie AK, und zugleich steige ein anderer Körper mit derselbigen anfänglichen Geschwindigkeit gerade aufwärts in der Linie AL. Es seien AB, BD, DF, FH, HK die unendlich kleinen geraden Theilchen der krummen AK. Ziehe die horizontalen Linien BC, DE, FG, HI, KL, so hat der eine Körper, wenn er in B gekommen ist, die nämliche Geschwindigkeit, als der andere in C (§. 9, Zus. I). Die Geschwindigkeit in B verlieret nichts durch den Uebergang von der einen unendlich kleinen Seite des Polygons zur andern (§. 13). Also steiget der eine Körper längs BD, und der andere längs CE, beide mit gleicher anfänglichen Geschwindigkeit. Wenn sie also bis zur selbigen horizontalen Linie DE gekommen sind, so haben sie wiederum einerlei Geschwindigkeit (§. 9, Zus. I). Eben so wird bewiesen, daß in F und G, H und I, K und L einerlei Geschwindigkeit Statt findet. Wenn also die Geschwindigkeit in L null geworden ist, so ist sie auch in K null geworden, beide Körper sind gleich hoch gestiegen, und ihre anfängliche Geschwindigkeit ist nun ganz erschöpfet.

Anstatt zwei Körper, kann man sich den nämlichen gedenken, der zu verschiedenen Zeiten einmal längs der krummen Linie, und das anderemal gerade aufwärts steiget.

Zusatz. Wenn verschiedene Körper längs verschiedenen, entweder krummen oder geraden, Linien mit derselbigen

selbigen anfänglichen Geschwindigkeit steigen, so gelangen sie bis zur selbigen Höhe.

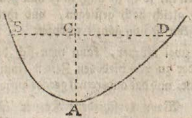


Wenn z. E. aus A verschiedene Körper mit gleicher anfänglicher Geschwindigkeit längs AC, AD, AE, steigen, so gelangen sie bis zur selbigen horizontalen Linie BE, indem sie alle so hoch kommen, als ein Körper, der mit gleicher anfänglicher Geschwindigkeit, von A bis B gerade aufsteiget. Von den krummen Linien ist es eben jetzt, und von den geraden oben (§. 8, Zus. I) bewiesen worden.

§. 15.

Lehrsatz.

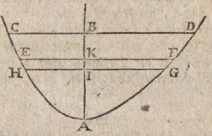
Wenn ein Körper längs einer krummen Linie heruntergehet, die sich wieder aufwärts bieget, so steiget er im aufwärts gehenden Theile bis zur selbigen Höhe, von welcher er heruntergekommen war.



Es

Es sei A der niedrigste Punkt der krummen Linie DAB, so daß die Tangente bei A horizontal sei. Ist nun ein Körper von D bis A geglitten, so hat er dieselbige Geschwindigkeit erhalten, als wenn er von C bis A gefallen wäre (§. 13). Mit dieser Geschwindigkeit fängt er nun an, sich in dem Zweige AB zu bewegen, und steiget bis B, so daß er dieselbige Höhe erreichet, als wenn er mit gedachter anfänglicher Geschwindigkeit gerade aufwärts gestiegen wäre (§. 14). In diesem Falle aber würde er wieder bis C zurückgekommen sein (H. III, §. 14). Also lieget der Punkt B so hoch als C, und folglich so hoch als D.

Zusatz I. In beiden Zweigen hat der ab- und aufsteigende Körper in einerlei Höhe auch einerlei Geschwindigkeit. Zum Exempel wenn der Körper von D bis F



heruntergekommen ist, so hat er die nämliche Geschwindigkeit als ein fallender Körper in K haben würde (§. 13). Und wenn er von A bis E gestiegen ist, so hat er in E die nämliche Geschwindigkeit, die ein mit derselbigen anfänglichen Geschwindigkeit gerade aufsteigender Körper auch in K haben würde (§. 14). Diese ist aber im Fallen und Steigen einerlei. Denn es sei v die Geschwindigkeit bei K im Fallen, und V beim Steigen, so ist

$$v^2 = 2p.\mathrm{BK} \quad (\text{H. III, §. 12, Ex. V})$$
$$V^2 = c - 2p.\mathrm{KA} \quad (\text{H. III, §. 13, Ex. XI})$$

Nun ist BK = AB — KA, also $2p$BK = $2p$AB — $2p$AK, also

$$v^2 = 2p.AB - 2p.GA$$

Es ist aber c^2 hier die durch den Fall längs AB erhaltene Geschwindigkeit, also ist ebenfalls $c^2 = 2p$AB, folglich

$$V^2 = 2p.AB - 2p.KA$$

Also ist $v^2 = V^2$ und $v = V$.

Zusatz II. Wenn beide Theile BAD und BAC der Figur ähnlichgleich sind, so sind auch die Zeiten des Gleitens längs DA und des Aufsteigens längs AC gleich.

Denn man ziehe nach Belieben zwei horizontale Linien GH und FE unendlich nahe an einander. So ist schon aus dem vorigen Zusatze bekannt, daß die Geschwindigkeit in F und E, desgleichen in G und H einerlei ist. Sie sei $= v$ in F und E, ferner c in G und H. Es steigt also der Körper H bis E auf einer kleinen schiefen Ebne, deren Neigung φ sein mag, mit einer anfänglichen Geschwindigkeit c, bis daß er die Geschwindigkeit v erhalten hat. Dazu brauchet er eine Zeit t, so daß (§. 1, Zus. III)

$$t = \frac{c - v}{p.S\varphi}$$

Hingegen, beim Heruntergehen hatte der Körper in F schon die Geschwindigkeit v; diese wurde aber durch die fortgesetzte Wirkung der Fallkraft größer, und in G war sie $= c$. Die Fallkraft hat demnach von F bis G eine Zunahme der Geschwindigkeit verursachet, die $= c - v$ ist; wenn also die Geschwindigkeit v in F nicht vorhanden gewesen wäre, so hätte der Körper durch sein Gleiten auf der kleinen schiefen Ebne bloß die Geschwindigkeit $c - v$ erhalten. Dazu brauchet die Fallkraft ebenfalls die Zeit (H. III, §. 12, Er. IV)

$$t = \frac{c - v}{p.S\varphi}$$

vermöge

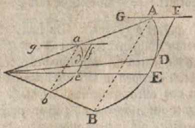
vermöge der Formel $t = \frac{v}{p}$ in welcher hier $c - v$ anstatt v, und $p.\mathrm{S}\varphi$ anstatt p kömmt. Da nun, wegen der Aehnlichkeit beider Hälften der Figur φ beiderseits gleich ist, so sind auch die Zeiten t gleich, und der Körper bleibet eben so lange beim Steigen in HE, als beim Fallen in FG. Da dieses nun von allen gegenüber stehenden Theilchen der krummen Linie gilt, so dauret die Bewegung in einem Zweige so lange Zeit, als in dem andern.

Zusatz III. Wenn der Körper bis C (in der vorhergehenden Figur) gestiegen ist, so gehet er wieder herunter bis A, und bekömmt die nämliche Geschwindigkeit, die dem Falle aus der Höhe BA entspricht. Vermittelst dieser Geschwindigkeit steiget er von A bis D, bis zur Höhe des Punktes B, nämlich eben so hoch, als er vermittelst der Geschwindigkeit A gerade aufwärts gestiegen wäre. Dann gehet er wieder herunter bis A, und steiget bis C, u. s. w. Jeder Hingang wird eine Schwingung genannt, und jeder Hergang eben so. Es würde diese schwingende Bewegung ewig fortdauren, wenn keine Luft und keine Reibung vorhanden wäre. Da aber diese immer mehr oder weniger vorhanden sind, so steiget der Körper das erstemal nicht ganz bis C, dann nicht ganz bis D, und seine Schwingungen werden überhaupt immer kürzer und kürzer, bis daß sie ganz aufhören, und der Körper unten in A ruhet.

§. 16.

Lehrsatz.

Wenn zwei Körper ähnliche Theile ähnlicher krummen Linien durchlaufen, die eine ähnliche Lage gegen den Horizont haben, entweder im Heruntergleiten, oder im Aufsteigen, so verhalten sich die Quadrate der Zeiten wie die Länge der Linien selbst, oder wie ihre ähnliche Dimensionen.



Man kann sich die Entstehung ähnlicher krummen Linien nicht besser vorstellen, als wenn man außerhalb der einen ADB einen Punkt C annimmt, aus unendlich viel Punkten der AB gerade Linien, wie AC, DC, EC, BC, nach C hinziehet, alle diese Linien nach einem gewissen Verhältnisse in a, d, e, b theilet, so daß z. E. $aC = \frac{1}{2}AC$, $dC = \frac{1}{2}DC$, $eC = \frac{1}{2}EC$, $bC = \frac{1}{2}BC$, und durch die Punkte a, d, e, b, eine krumme Linie adb ziehet. Dann wird diese der AB ähnlich, weil es leicht zu beweisen ist, daß die Vielecke CADB und Cadb aus ähnlichen Dreiecken entstehen, selbst ähnlich sind, und ähnliche Perimeter haben. Gesetzt also, ein schwerer Körper gehe herunter längs der ADB, und ein anderer längs der ähnlichen adb. Man betrachte die Zeit, welche jeder auf den zustimmenden Theilchen DE und de zubringet. Zu diesem Ende ziehe man FG und fg beide horizontal durch A und a. Man verlängere DE bis F, und de bis f, so ist nicht schwer zu beweisen, daß DFA und dfa ähnliche Dreiecke sind.

Nun gehet der eine Körper von D bis E mit eben solcher Geschwindigkeit, und in eben soviel Zeit, als wenn er vorher schon längs FD gekommen wäre, und der andere gleitet längs de, als wenn er aus f gekommen wäre (§. 13). Gesetzt, die erforderliche Zeit, um FD zu durchlaufen, sei t, und für FE sei sie T, für fd mag sie sein t', und T′ für fe, so ist (§. 10)

$T^2 : t^2$

$$T^2 : t^2 :: FE : FD$$
$$T'^2 : t'^2 :: fe : fd$$
oder
$$T : t :: \sqrt{FE} : \sqrt{FD}$$
$$T' : t' :: \sqrt{fe} : \sqrt{fd}$$

Da nun wegen Aehnlichkeit der Figuren $FE : FD :: fe : fd$, so ist auch $\sqrt{FE} : \sqrt{FD} :: \sqrt{fe} : \sqrt{fd}$,

also $T : t :: T' : t'$

folglich $(T - t) : t :: (T' - t') : t'$

oder $(T - t) : (T' - t') :: t : t'$

Nun ist ferner

$$t : t' :: \sqrt{FD} : \sqrt{fd}$$

oder $t : t' :: \sqrt{DE} : \sqrt{de}$

folglich $(T - t) : (T' - t') :: \sqrt{DE} : \sqrt{de}$

Nun ist aber $T - t$ die Zeit, während welcher das Theilchen DE, und $T' - t'$ diejenige, während welcher *de* durchlaufen wird. Also verhalten sich die Zeiten für zwei zustimmende Theilchen, wie die Quadrat-Wurzeln der Längen.

Da aber beide Figuren ähnlich sind, so verhalten sich die Seiten, wie jedes Paar zustimmender Dimensionen, z. E. $DE : de :: AB : ab$

oder $\sqrt{DE} : \sqrt{de} :: \sqrt{AB} : \sqrt{ab}$

also verhalten sich auch

$$(T - t) : (T' - t') :: \sqrt{AB} : \sqrt{ab}$$

Das nämliche gilt für alle übrige zustimmende Räumchen und Zeittheilchen. Es seien diese Zeittheilchen einerseits z, z', z'', z''' &c., anderseits Z, Z', Z'', Z''' &c., so ist allemal

$$\left.\begin{array}{l} z : Z \\ z' : Z' \\ z'' : Z'' \\ z''' : Z''' \end{array}\right\} :: \sqrt{AB} : \sqrt{ab} :: \sqrt{ADB} : \sqrt{adb} \text{ \&c.}$$
&c.

Folglich auch

$$(z + z' + z'' + z''' + \&c.) : (Z + Z' + Z'' + Z''' + \&c.)$$
$$:: \sqrt{AB} : \sqrt{ab} :: \sqrt{ADB} : adb \&c.$$

das heißt, auch die ganzen Zeiten verhalten sich wie die Quadratwurzeln der ähnlichen Dimensionen, oder auch, wie die Quadratwurzeln der Längen der krummen Linien selbst. Oder die Quadrate der Zeiten verhalten sich, wie die ähnlichen Dimensionen.

Bisher war der Beweis für heruntergehende Körper eingerichtet; man kann ihn aber auch leicht auf steigende anwenden. Gesetzt, zwei Körper B und b steigen bis A und a in den ähnlichen Bögen BDA und bda, so stelle man sich vor, sie seien erst von A bis B und von a bis b heruntergegangen, und steigen dann mit den ganz unten erhaltenen Geschwindigkeiten wieder aufwärts, jeder längs einem, ganz ähnlichgleichen Zweige seiner Linie, oder längs demselbigen Zweige, so wird, wie bei §. 15, Zus. I. bewiesen, daß das Steigen von E bis D und von e bis d wieder in derselbigen Zeit geschiehet, als vorher das Heruntergehen von D bis E und von d bis e, und daß folglich das Verhältniß der Zeiten beim Steigen das nämliche ist, wie beim Heruntergleiten.

§. 17.

Folgende sind die vornehmsten Sätze, die ein Anfänger aus dem gegenwärtigen Hauptstücke zu bemerken hat.

Ein schwerer Körper, der längs einer schiefen Ebne heruntergleitet, beweget sich mit einförmig-beschleunigter Geschwindigkeit, wenn man alle Reibung, wie auch den Widerstand der Luft, aus der Acht läßt.

Die Beschleunigung eines solchen Körpers verhält sich zur Beschleunigung eines frei fallenden Körpers, wie die senkrechte Höhe der Ebne zu ihrer Länge, oder wie der Sinus des Neigungs-Winkels zum Sinus-Totus.

Wenn

Wenn man demnach diese Verminderung der Beschleunigung in Rechnung bringet, so lassen sich alle Aufgaben für die einförmig-beschleunigte Bewegung, wie auch für frei herunterfallende Körper, auf das Gleiten längs einer schiefen Ebne anwenden.

Wenn ein Körper einen Stoß bekömmt, vermittelst dessen er längs einer schiefen Ebne aufwärts zu steigen gezwungen ist, so ist seine Bewegung einförmig-verspätet, und die Verspätung ist, nach eben solcher Proporzion wie vorher, kleiner als diejenige, welche bei geraden aufgeworfenen Körpern Statt findet.

Wenn ein Körper längs einer schiefen Ebne heruntergleitet, so läßt sich allemal der Ort finden, wo er sein würde, wenn er frei herunterfiele.

Wenn ein Zirkel in einer vertikalen Ebne stehet, und in ihm ein vertikaler Durchmesser gezogen ist, nebst einigen Sehnen die am Ende dieses Durchmessers ihren Anfang nehmen, so gleitet ein Körper in gleichen Zeiten längs allen diesen Sehnen, und diese Zeit ist eben so groß, als die Zeit des Fallens längs dem Durchmesser.

Die Zeit des Gleitens längs einer schiefen Ebne verhält sich zur Zeit des Falles aus derselbigen Höhe, wie der Sinus-Totus zum Sinus des Neigungs-Winkels. Und wenn verschiedene schiefe Ebnen eine gleiche Höhe haben, so verhalten sich die Zeiten des Gleitens längs denselben, wie die Längen der Ebnen selbst.

Die erhaltene Geschwindigkeit eines auf einer schiefen Ebne, oder längs einer krummen Linie gleitenden, Körpers ist eben so groß, als wenn er von derselbigen Höhe gerade heruntergefallen wäre, und wenn verschiedene Körper aus derselbigen Höhe längs verschiedenen schiefen Ebnen oder krummen Linien heruntergleiten, so haben sie zuletzt alle dieselbige Geschwindigkeit.

Steiget der Körper auf einer schiefen Ebne, oder einer krummen Linie, so nimmt die Geschwindigkeit so ab, wie sie beim Heruntergehen zunimmt, und wenn ein Körper einen Stoß bekömmt, um längs einer schiefen Ebne, oder krummen Linie, aufwärts zu gehen, so gehet er bis zu einer solchen Höhe, von welcher er hätte müssen herunterkommen, um die anfängliche Geschwindigkeit zu erhalten.

Die Zeiten des Gleitens längs zwei Ebnen, die mit dem Horizonte gleiche Winkel machen, oder zwei ähnlich-krumme Linien, die eine ähnliche Lage haben, verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Längen der Ebnen oder Linien, oder die Längen verhalten sich, wie die Quadrate der Zeiten.

Die Ecken eines Winkels vermindern die Geschwindigkeit eines Körpers, welcher sich längs dem Umfange des Vielecks beweget; hingegen die allmähligen Krümmungen einer krummen Linie verändern nicht die Geschwindigkeit. Daher auch, wie wir jetzt gesehen haben, verschiedene Lehrsätze zugleich für schiefe Ebnen und für krumme Linien gelten.

Wenn die Konkavität einer krummen Linie aufwärts gekehret ist, und man läßt einen Körper aus einer gewissen Höhe bis zum niedrigsten Punkte gleiten, so steiget er im andern Zweige der krummen Linie, bis zur selbigen Höhe; und wenn beide Zweige ähnlichgleich sind, und gegen den Horizont eine ähnliche Lage haben, so geschiehet das Heruntergleiten und das Hinaufsteigen in gleichen Zeiten. Hernach fällt und steiget der Körper wieder rückwärts u. s. w.

Dieses Abwärts - und Aufwärtsgehen macht eine Schwingung. Im leeren Raume, und wo keine Reibung wäre, müßten die Schwingungen in Ewigkeit fortdauren. In der Luft aber, und in der wirklichen Welt, wo keine Bewegung ohne Reibung ist, werden die Schwingungen immer kleiner und kleiner, bis daß sie gänzlich aufhören.

Fünftes

Fünftes Hauptstück.

Vom Pendel.

§. 1.

Jeder schwere Körper, der so aufgehänget wird, daß er sich hin und her bewegen, daß heißt, Schwingungen machen könne, wird ein Pendel oder Pendulum genannt.

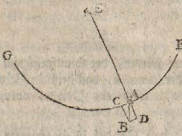
Ein einfaches Pendel ist ein schwerer Punkt, der, vermittelst einer Linie ohne Schwere, an einem gewissen unbeweglichen Punkte hänget, und um diesen herum Schwingungen machen kann. Da ein solches Pendel aber bloß ein ideales Wesen ist, so kann man es versinnlichen, wenn man eine kleine Kugel von einer Materie, die eine große spezifische Schwere hat, als Platina, Gold oder Blei, an einem dünnen Faden oder Drath bindet, und diesen an einem Nagel anhänget. Die Schwingungen dieser Kugel werden, ohne merkliche Abweichung, nach denjenigen Regeln erfolgen, welche im strengsten Verstande nur vom schweren Punkte gelten.

Jeder angehängte und schwingende Körper, der nicht ein bloßer schwerer Punkt ist, oder jedes angehängte und schwingende System von Körpern machet ein zusammengesetztes Pendel. Jetzt reden wir nur vom einfachen. In der Folge dieses Hauptstückes wollen wir das zusammengesetzte betrachten.

§. 2.

Lehrsatz.

Die Schwingungen eines einfachen Pendels sind völlig die nämlichen, als wenn der schwere Punkt sich ohne Faden in dem Zirkelbogen bewegte, in welchem die Schwingungen geschehen.



Gesetzt, der schwere Punkt oder der kleine schwere Körper A hänge vermittelst des Fadens AE an einem Nagel E, und er werde von der Vertikal-Linie entfernet, um daß er Schwingungen mache. Er befinde sich jetzt in A. Es stelle die kleine vertikale Linie AB den Weg vor, den A, vermöge der Fallkraft, in einem bestimmten kleinen Zeittheilchen durchlaufen würde. Man verlängere EA nach D, ziehe BC mit AD parallel, und BD mit AC, welche hier als eine kleine, auf EA senkrechte gerade Linie, betrachtet wird. So ist die Geschwindigkeit AB in zwei andere, AD und AC, zerleget. Die erste wird durch den Widerstand des Fadens und des festen Punktes E vernichtet, die andere AC ist diejenige, welche die Fallkraft in den gegenwärtigen Umständen verursachen kann. Hat also der Körper in A noch keine Geschwindigkeit, so bekömmt er die Geschwindigkeit AC, hat er schon eine Geschwindigkeit, so kömmt noch AC hinzu.

Gesetzt

Gesetzt nun, der Faden AE sei nicht vorhanden, sondern nur der Zirkelbogen FG, worin sich das schwere Körperchen A bewege. Es sei, daß A bloß inwendig gleite, oder daß A auf dem Bogen FG aufgefädnet sei, (jedoch allemal ohne Reibung), so läßt sich die Geschwindigkeit AB, wie vorher, in AD und AC zerlegen. Da AD auf dem Zirkelbogen senkrecht ist, so wird diese Geschwindigkeit durch den Widerstand desselben vernichtet, und es bleibet nur die Geschwindigkeit AC, eben so wie bei der Bewegung des Pendels. Diese Gleichheit der Geschwindigkeit, oder der Zunahme der Geschwindigkeit, läßt sich für alle mögliche Theilchen des Zirkelbogens beweisen; daher also gefolgert werden muß, daß die Bewegung in beiden Fällen genau einerlei ist.

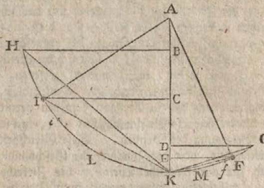
Zusatz. Was also schon von der Bewegung in krummen Linien (Hauptst. IV) gesaget worden, kann auf das Pendel angewandt werden, und was noch vom Pendel bewiesen werden soll, kann auf die Bewegung in einem Zirkelbogen angewandt werden.

§. 3.

Lehrsatz.

Wenn ein Pendel kleine Schwingungen macht, so sind sie alle beinahe gleichzeitig, ob gleich sie nicht von gleich viel Graden sind.

Es beschreibe das Pendel den Bogen GFMK (folg. Fig.), und zu einer anderen Zeit den Bogen HILK. Man theile beide Bögen in gleich viel Theile, und es seien Ff und Ii zwei zustimmende Theile, so daß KLI : KLH :: KMF : KMG, und auch Ii : Ff :: KLH : KMG :: KLI : KMF. Sind die Bögen klein (weit kleiner, als sie in der Figur, um der Deutlichkeit willen, gezeichnet worden), so verhalten sie sich beinahe wie ihre Sehnen. Also



Also $KH : KI :: KLH : KLI$ und $KG : KF :: KMG : KMF$. Folglich ist beinahe

$$KH : KI :: KG : KF$$

$$KH^2 : KI^2 :: KG^2 : KF^2$$

Man ziehe die Applikaten HB, IC, GD, FE. Nun ist jede Sehne, wie KH, die mittlere Proporzional-Linie zwischen der zustimmenden Abzisse KB und dem Durchmesser 2KA. Also $KH^2 = KB \times 2KA$, $KI^2 = KC \times 2KA$, $KG^2 = KD \times 2KA$, $KF^2 = KE \times 2KA$. Substituiret man diese Werthe, und läßt man in allen Sätzen 2KA weg, so ist

$$KB : KC :: KD : KE$$

$$(KB - KC) : KC :: (KD - KE) : KE$$

$$BC : KC :: DE : KE$$

$$\sqrt{BC} : \sqrt{KC} :: \sqrt{DE} : \sqrt{KE}$$

$$\sqrt{BC} : \sqrt{DE} :: \sqrt{KC} : \sqrt{KE}$$

Da nun $KI^2 = KC \times 2KA$ und $KF^2 = KE \times 2KA$, so ist $KI^2 : KF^2 :: KC : KE$, und $KI : KF :: \sqrt{KC} : \sqrt{KE}$,

also $\sqrt{BC} : \sqrt{DE} :: KI : KF$

und

und da bei kleinen Bögen KI : KF :: KLI : KMF :: Ii : Ff, so ist

$$\sqrt{BC} : \sqrt{DE} :: Ii : Ff.$$

Es sei V die Geschwindigkeit in I, und v die Geschwindigkeit in F, so sind diese Geschwindigkeiten eben so groß, als wenn sie durch den Fall längs BC und DE entstanden wären (Hauptst. IV, §. 13), und ihre Quadrate verhalten sich wie die Räume BC und DE (Hauptst. III, §. 4, Zus. I), also $V^2 : v^2 :: BC : DE$, oder $V : v :: \sqrt{BC} : \sqrt{DE}$.

Folglich $V : v :: Ii : Ff$

Also verhalten sich die Räume Ii und Ff wie die Geschwindigkeiten bei I und F. Diese Räume werden demnach in gleichen Zeiten durchlaufen. Und da dieses von allen zustimmenden Theilchen beider Bögen KLH und KMG gilt, so werden beide Bögen in gleichen Zeiten durchlaufen, wenn sie klein sind, als höchstens von 3, 4, oder 5 Graden; denn nur in diesem Falle verhalten sich die Bögen allernächstens wie ihre Sehnen.

Anmerkung. Die Schwingungen eines Pendels geben demnach ein bequemes einförmiges Zeitenmaaß. Denn man darf sich nicht ängstlich um die erste Entfernung des Pendels von der Vertikal-Linie bekümmern. Und ob gleich die Schwingungen immer kleinere und kleinere Bögen machen, so bleiben sie doch gleichzeitig. Auch das etwas größere oder kleinere Gewicht, welches man am Faden bindet, thut nichts zur Sache, wenn nur dessen Durchmesser, in Vergleich mit der Länge des Fadens, sehr wenig beträgt, so daß das Pendel als einfach angesehen werden könne (§. 1).

§. 4.

Lehrsatz.

Bei einfachen Pendeln von ungleicher Länge verhalten sich die Dauern der Schwingungen, wie

wie die Quadrat-Wurzeln aus den Längen der Pendeln.

Gesetzt, beide Pendeln beschreiben Bögen von gleich viel Graden, so durchlaufen sie ähnliche krumme Linien, und dann verhalten sich die Quadrate der erforderlichen Zeiten, wie die Längen der Linien selbst (Hauptst. IV, § 16). Die Längen ähnlicher Zirkelbögen verhalten sich wie die Halbmesser, und diese sind im gegenwärtigen Falle nichts anders, als die Längen der Pendeln selbst. Also verhalten sich die Quadratzahlen von den Dauern der Schwingungen in ähnlichen Bögen, das heißt, in Bögen von gleich viel Graden, wie die Längen der Pendeln. Ob gleich dieser Beweis nur in aller Strenge bei Schwingungen von gleich viel Graden gilt, so erstrecket er sich doch auf alle kleine Schwingungen, wenn sie auch aus unähnlichen Bögen bestehen, indem die Dauer aller kleinen Schwingungen desselbigen Pendels einerlei ist (§. 3).

Da die Quadrate der Dauern sich verhalten, wie die Längen der Pendeln, so verhalten sich die Dauern selbst, wie die Quadrat-Wurzeln der Längen.

§. 5.

Lehrsatz.

Die Anzahlen der Schwingungen zweier einfacher Pendeln, im selbigen Zeitraume, verhalten sich umgekehrt, wie die Quadrat-Wurzeln der Pendel-Längen.

So vielmal kürzer die Dauer jeder Schwingung ist, so vielmal mehr Schwingungen geschehen in einem gewissen Zeitraume. Also verhalten sich die Anzahlen der Schwingungen im nämlichen Zeitraume umgekehrt, wie die Dauern der einzelnen Schwingungen. Diese aber verhalten sich wie die Quadrat-Wurzeln aus den Pendel-Längen (§. 4). Also verhalten sich die Anzahlen der Schwin-

Schwingungen im nämlichen Zeitraume, umgekehrt wie die Quadrat-Wurzeln der Pendel-Längen.

Man kann auch sagen, die Quadrate der Anzahlen der Schwingungen verhalten sich in gleichen Zeiträumen, umgekehrt wie die Pendel-Längen.

Anmerkung. Hierauf gründet sich eine Regel, die in vielen mechanischen Schriften gegeben wird, um die Höhe des inwendigen Raumes einer Kirche, eines Saales, u. s. w. zu finden, wenn ein Kronleuchter von der Decke herunter hängt. Man messe, vom Leuchter an, einen gewissen Theil des Strickes ab, lasse diesen Theil als ein Pendel schwingen, und zähle die Schwingungen während einer gewissen Zeit, z. E. während einer Viertelstunde. Nun lasse man den ganzen Strick schwingen, und zähle auch die Schwingungen während eines gleichen Zeitraumes. Ferner quadrire man die gefundenen Anzahlen der Schwingungen, und sage: wie die Quadratzahl der Schwingungen des ganzen Seiles, zur Quadratzahl der Schwingungen des gemessenen Theiles sich verhält, so verhält sich die Länge des gemessenen Theiles zur Länge des ganzen Seiles, wodurch die Höhe der Decke gefunden wird, woran der Kronleuchter hängt.

Ich wollte aber keinem rathen, einer solchen Höhen-Rechnung viel zu trauen. Denn der Kronleuchter ist gewiß kein bloßer schwerer Punkt, und der Strick daran keine bloße Linie, also das Ganze nichts weniger, als ein einfaches Pendel. Sicherer würde man verfahren, wenn man bloß einen dünnen Faden, mit einer bleiernen Kugel am Ende, herunter hängen ließe, und dann auf die vorige Art den Versuch und die Rechnung machte.

§. 6.

§. 6.

Aufgabe.

Die Länge eines Pendels finden, welches in jeder Sekunde eine Schwingung machet.

Man nehme ein beliebiges Pendulum, welches für einfach gehalten werden könne (§. 1), und zähle die Schwingungen während einer gewissen richtig abgemessenen Zeit, z. E. während einer Viertelstunde. Nun soll das verlangte Pendel während einer Viertelstunde 900 Schwingungen machen. Also: wie das Quadrat der verlangten Anzahl von 900 Schwingungen, sich verhält zur Quadratzahl der gezählten Schwingungen; so verhält sich die länge des gebrauchten Pendels zur verlangten länge des Sekunden-Pendels (§. 5).

Anmerkung I. Durch ein solches Verfahren hat man in Paris gefunden, daß die länge eines Sekunden-Pendels 3 Fuß 8,57 linien, oder 440,57 linien, des zwölftheiligen Pariser Maaßes betrage. Nun machen 139,13 linien des Pariser Fußes soviel als einen Rheinländischen Fuß. Dividiret man 44[illegible] durch 139,13, so kommen im Rheinländischen zwo[illegible]heiligen Maaße 3 Fuß 1 Zoll, 11,99 linien, oder mit Vernachläßigung eines sehr kleinen Bruches 3 Fuß 2 Zoll für die länge des Sekunden-Pendels.

Nun gilt zwar diese länge nur eigentlich für Paris, indessen ist in solchen Gegenden, die nicht viel nördlicher oder südlicher liegen als Paris, noch kein merklicher Unterschied zu beobachten. Ich habe hier in Berlin gefunden, daß ein einfaches Pendel von 3 Fuß 2 Zoll ziemlich richtig seine 60 Schwingung in einer Minute verrichtete.

Anmerkung II. Eine viel genauere Methode zur Bestimmung der länge des Sekunden-Pendels werden wir gegen das Ende dieses Hauptstückes §. 45 anführen.

§. 7.

Aufgabe.

Wenn von diesen drei Dingen, Länge des einfachen Pendels, Dauer jeder Schwingung, Anzahl der Schwingungen in einer gewissen Zeit, eine gegeben ist, so soll man die beiden übrigen finden:

1) Aus der Länge des Pendels die Dauer jeder Schwingung.

Da sich die Dauern der Schwingungen wie die Quadratwurzeln der Längen, oder die Quadratzahlen der Dauern wie die Längen verhalten (§. 4), so sage: Wie 38 Zoll Rheinländisch sich verhalten zur Länge des gegebenen Pendels in Zollen, so verhält sich 1^2 oder 1 Sekunde, Quadratzahl der Dauer beim Sekunden-Pendel, zu einer vierten Zahl, welche das Quadrat der Dauer bei dem gegebenen Pendel sein wird. Aus dieser Quadratzahl die Quadratwurzel gezogen, so hat man die Dauer in Sekunden.

2) Aus der Länge des Pendels die Anzahl der Schwingungen in einer gegebenen Zeit.

Nachdem, wie kurz vorher, die Dauer jeder Schwingung gefunden worden, ist es ein leichtes, zu berechnen, wie viel Schwingungen in einer gegebenen Zeit geschehen müssen.

3) Aus der Dauer jeder Schwingung die Länge des Pendels.

Die Dauer muß in Sekunden ausgedrücket und quadriret werden.

Dann saget man: Wie 1, das Quadrat von 1 Sekunde, zum Quadrate der gegebenen Sekunden, so verhalten sich 28 Zoll zu den verlangten Zollen (§. 4).

4) Aus der Dauer jeder Schwingung die Anzahl der Schwingungen in einer gegebenen Zeit.

Dieses ist eine Rechnung für Kinder.

5) Aus der Anzahl der Schwingungen in einer gegebenen Zeit die Länge des Pendels.

Die Zeit werde in Sekunden ausgedrücket, und man betrachte, daß das Sekunden-Pendel in derselbigen Zeit so viel Schwingungen machen würde, als Sekunden vorhanden sind. Ferner erinnere man sich, daß in gleicher Zeit die Quadrate der Anzahlen der Schwingungen sich umgekehret wie die Längen verhalten (§. 5).

Nun sage man: Wie das Quadrat der gegebenen Anzahl sich verhält zum Quadrate der Zeit in Sekunden, so verhalten sich 28 Zoll zur verlangten Länge.

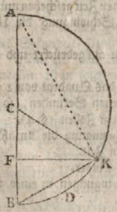
Oder man berechne, vermöge der Division, aus der gegebenen Zeit und Anzahl die Dauer jeder Schwingung, und verfahre dann nach dem dritten Falle.

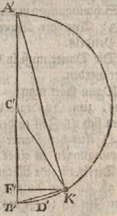
6) Aus der Anzahl der Schwingungen in einer gegebenen Zeit die Dauer einer jeden zu berechnen, ist eine Kleinigkeit.

§. 8.

Lehrsatz.

Die Geschwindigkeiten gleicher Pendeln oder desselbigen Pendels im Augenblicke des Durchganges durch die Vertikal-Linie, verhalten sich wie die Sehnen der beschriebenen Bögen.





Es seien KDB und K′D′B′ die durchlaufenen Bögen. Man ziehe KF und K′F′ senkrecht auf die Vertikal-Linien, so haben beide Körper eben solche Geschwindigkeiten erhalten, als durch den freien Fall längs FB und F′B′, (H. IV. §. 13). Es seien V und v die Geschwindigkeiten in B und B′, so ist (H. III, §. 12, Er. II)

$$FB = \frac{V^2}{2p}$$

$$F'B' = \frac{v^2}{2p}$$

also $FB : F'B' :: V^2 : v^2$

oder $V^2 : v^2 :: FB : F'B'$

Nun ist in den ähnlichen Dreiecken BKF und BAK

$$BF : BK :: BK : BA$$

daher $BF = \frac{BK^2}{BA}$

Eben so wird bewiesen, daß

$$B'F' = \frac{B'K'^2}{B'A'}$$

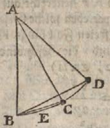
Folglich ist

$$V^2 : v^2 :: \frac{BK^2}{BA} : \frac{B'K'^2}{B'A'}$$

Da aber angenommen worden, daß $BA = B'A'$, so ist $V^2 : v^2 :: BK^2 : B'K'^2$

und $V : v :: BK : B'K'$

Anstatt zwei gleicher Pendeln kann man sich das nämliche gedenken, welches zu verschiedenen Zeiten verschiedene Bögen beschreibet, zum Exempel die Bögen DCEB und CEB; dann verhalten sich die Geschwindigkeiten bei B, wie DB zu CB. (s. folgende Figur.)

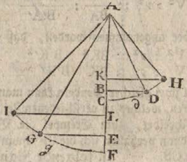


Anmerkung. Dieser Lehrsatz gilt für große und kleine Schwingungen, da hingegen derjenige §. 3 nur für kleine gilt.

§. 9.

Lehrsatz.

Wenn die Fallkraft bei zwei verschiedenen einfachen Pendeln nicht einerlei ist, und die Längen beider Pendeln sich verhalten wie die Fallkräfte, vermittelst welcher sie sich bewegen, so verrichten beide Pendeln ihre Schwingungen in gleichen Zeiten, vorausgesetzet, daß sie ähnliche Bögen beschreiben, oder daß sie beiderseits nur kleine Bögen durchlaufen.



Gesetzt,

Gesetzt, ein einfaches Pendel AD beschreibe den Bogen HC, indem es durch eine Fallkraft p getrieben wird. Es beschreibe ein anderes einfaches Pendel AG, welches durch eine andere Fallkraft P getrieben wird, den ähnlichen Bogen IF. Man theile beide Bögen in gleich viel Theile, und es seien Dd und Gg zustimmende Theile. Man ziehe die Applikaten GE, IL, DB, HK, so sind beide Figuren ACH und AFI vollkommen ähnlich. Es sei v die Geschwindigkeit des Pendels AD, wenn es in D gekommen ist, und es sei V die Geschwindigkeit des Pendels AG, wenn es bis in G gekommen ist, so ist (§. 8)

$$KB = \frac{v^2}{2p} \text{ und } v^2 = 2p.KB$$

$$LE = \frac{V^2}{2P} \text{ und } V^2 = 2P.LE$$

$$\text{also } v^2 : V^2 :: p.KB : P.LE$$

Nun ist angenommen worden, es sei

$$\begin{aligned} p : P &:: AD : AG \\ &:: AC : AF \\ &:: KB : LE \end{aligned}$$

$$\text{also ist } LE = \frac{P \times KB}{p}$$

$$\text{daher } P.LE = \frac{P^2 \times KB}{p}$$

Folglich

$$\begin{aligned} v^2 : V^2 &:: p.KB : \frac{P^2 \times KB}{p} \\ &:: p^2KB : P^2KB \\ &:: p^2 : P^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also } v : V &:: p : P \\ &:: AC : AF \\ &:: CD : GF \\ &:: Dd : Gg \end{aligned}$$

Also verhalten sich die Geschwindigkeiten in D und G, wie die Räumchen Dd und Gg; folglich werden diese Räumchen in gleichen Zeiten durchlaufen. Und da dieses von allen übrigen zustimmenden Räumchen gilt, so werden die Bögen HC und IF in gleichen Zeiten durchlaufen.

Sind beide Bögen unähnlich aber klein, so sind die Schwingungen dennoch gleichzeitig, weil alsdann die Größe derselben keinen merklichen Einfluß auf die Dauer der Schwingungen hat (§. 3).

Anmerkung. Was bei diesem Lehrsatze vorausgesetzet worden, daß die Fallkräfte ungleich sind, findet wirklich in der Natur Statt. Denn obgleich die Fallkraft in einer mittelmäßigen Strecke, von unten nach oben gerechnet, für unverändert gehalten werden kann, so ist die Verlängerung doch schon auf hohen Bergen, wie auch unter dem Äquator merklich genug. Nämlich sie wird dort kleiner.

Zusatz. Da wir im letzten Theile des Beweises geschlossen haben

$v : V :: p : P :: AC : AF :: CD : GF :: Dd : Gg$,

daher $v : V :: Dd :: Gg$,

so ist klar, daß diese Proporzion und die Folgerung daraus nicht Statt findet, wenn nicht $p : P :: AC : AF$. Wenn also die Pendeln sich nicht verhalten, wie die Fallkräfte, so sind auch die Schwingungen nicht gleich. Aus der Gleichheit der Schwingungen läßt sich also schließen, daß beide Pendeln sich verhalten wie die Fallkräfte, oder die Fallkräfte wie die Längen der Pendeln.

§. 10.

Aufgabe.

Durch die Schwingungen des einfachen Pendels die Größe der Fallkraft an verschiedenen Orten oder in verschiedenen Höhen bestimmen.

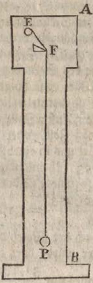
Man

Man suche an jedem Orte, oder in jeder der gegebenen Höhen die Länge des Sekundenpendels (§. 6). Wie sich nun die gefundenen Längen verhalten, so verhalten sich auch die Fallkräfte (§. 9). Zum Exempel, in unsern Gegenden ist die Länge des Sekunden-Pendels 3 Fuß 2 Zoll Rheinländisch. Wäre diese Länge an einem andern Orte 3 Fuß $1\frac{1}{12}$ Zoll, so verhielte sich die Fallkraft hier zur Fallkraft dort, wie 3 Fuß 2 Zoll zu 3 Fuß $1\frac{1}{12}$ Zoll, oder wie 38 Zoll zu $37\frac{1}{12}$ Zoll, oder wie 456 zu 455. Da also die Fallkraft bei uns in einer Sekunde eine Geschwindigkeit von 31,253 Rheinländische Fuß hervorbringet, (H. III, §. 11), so würde sie dort nur eine Geschwindigkeit von $\frac{455 \times 31,253}{456} = 31,184$ Fuß hervorbringen. Dieses wäre demnach der Werth der Beschleunigung p für jenen Ort. Ferner würde dort ein Körper in der ersten Sekunde seines Falles nur $\frac{31,184}{2} = 15,592$ Fuß durchlaufen, anstatt 15,6265.

§. 11.

Wenn ich Versuche mit Pendeln von verschiedenen Längen machen will, so bediene ich mich folgendes Instrumentes. (folg. Fig.)

AB ist ein Brett, welches senkrecht stehet. CD ist ein Wirbel, wie an Violinen, der bei E durch das Brett gehet. FG ist ein dreieckigter Stab, der horizontal im Brette befestiget ist. HKMLNI ist ein dünner Faden, dessen beide Enden in einiger Entfernung von einander auf den Wirbel gewickelt sind. Dieser Faden gehet bei K und L über die eine Kante des dreieckigten Stabes FG. Der Wirbel CD muß nicht gerade über den Stab, sondern etwas seitwärts stehen. P ist eine bleierne Kugel, welche vermittelst zweier Häckchen bei M und N in dem Faden



hänget,

hänget, ohne befestiget zu sein. Vermittelst des Wirbels läßt sich nun der Faden sammt der Kugel auf und nieder bewegen, so daß man nach Belieben ein kürzeres oder längeres Pendel haben kann. Um die jedesmalige Länge zu messen, kann man von F bis ganz unten eine Skala zeichnen, die in Fuße, Zolle und Linien eingetheilet sei. Zu mehrerer Sicherheit gebrauche ich ein Winkelmaß Q, welches ich zugleich an die Kugel und an die Skala anlege, um genau den Punkt der Skala zu finden, welchem die Kugel gegenüber stehet. Wird der Winkelhaken unterhalb der Kugel angeleget, so muß man jedesmal ihren Halbmesser abrechnen, weil der Mittelpunkt der Kugel hier ohngefähr den schweren Punkt vorstellet, der beim einfachen Pendel erforderlich ist (§. 1).

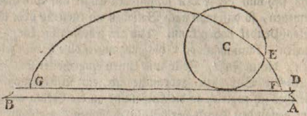
Anmerkung. Da die Schwingungen des Pendels, der einen Zirkelbogen beschreibet, nicht vollkommen gleichzeitig sind (§. 3), so sind die Geometer darauf verfallen, das Pendel nöthigenfalls so einzurichten, daß es eine **Zykloide** oder **Radlinie** beschreibe, in welcher die Schwingungen, wenn sie im leeren Raume geschehen, vollkommen gleichzeitig sind.

§. 12.

Eine Zykloide oder Radlinie ist eine krumme Linie, welche entstehet, wenn ein Zirkel in einer Ebne längs einer geraden Linie rollet, und ein Punkt im Umfange des Zirkels auf der Ebne eine Spur seines Weges hinterläßt.

Jeder Nagel am Umfange eines Wagenrades beschreibet in der Luft eine Zykloide.

Will man eine Zykloide auf dem Papiere beschreiben, so nehme man ein Lineal AB, und eine kleine Rolle oder einen dünnen Zylinder C. An dieser Rolle befestige man einen Faden; man wickele ihn herum und befestige das andere Ende des Fadens am Lineale in D. Man befestige



einen kleinen Stift E am Umfange der Rolle, so daß er das Papier berühre. Man stelle die Rolle anfänglich so, daß der Stift E am Lineale in F anliege, und der Faden DF zugleich stramm angezogen sei. Nun schiebe man die Rolle immer weiter nach B hin, so daß sich der Faden allmälig abwickele, und der Stift zuletzt das Lineal wiederum in G berühre, so beschreibet dieser Stift eine Zykloide FEG.

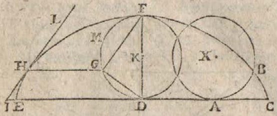
Anmerkung. Diese Linie ist eigentlich die einfache Zykloide, welche wir allein hier gebrauchen. Es giebt auch verlängerte und verkürzte Zykloiden, desgleichen auch verschiedene Arten der Epizykloiden. Von allen diesen Linien findet man in mehrern Büchern Nachricht, unter andern im zweiten Bande meiner höhern Meßkunst.

§. 13.

Die vornehmsten Eigenschaften der Zykloide sind die folgenden, wovon die höhere Geometrie die Beweise giebt, welche auch in meinem erleichterten Unterricht in der höheren Meßkunst anzutreffen sind.

I) Der Bogen AB (folg. Fig.) des erzeugenden Zirkels, welcher Bogen schon bei der Entstehung der Zykloide die Grundlinie oder Basis CE berühret hat, und den Theil CB der Zykloide beschrieben hat, ist gleich dem Theile AC der Grundlinie, worauf er gerollet hat.

II) Die

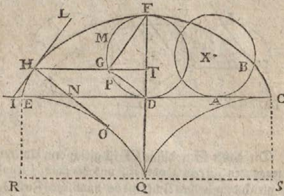


II) Die ganze Grundlinie CE ist gleich dem Umkreise des erzeugenden Zirkels X oder K, und die halbe Grundlinie ist gleich dem halben Umkreise des nämlichen Zirkels.

III) Wenn man, mit der Grundlinie gleichlaufend, eine gerade Linie GH ziehet, vom Zirkel, der auf der Axe DF beschrieben ist, bis zum Umfange der Zykloïde, so ist diese GH allemal dem Zirkelbogen FMG gleich, welcher vom Scheitel F bis zur Begegnung dieser geraden Linie gerechnet wird.

IV) Wenn für einen beliebigen Punkt H der Zykloïde die Tangente oder berührende Linie gezogen werden soll, so wird HG mit der Grundlinie gleichlaufend gezogen, welche HG vom Zirkel auf der Axe den Bogen FMG abschneidet. Die Tangente IL ist allemal mit der Sehne FG des gedachten Bogens parallel.

V) Wenn man den Halbmesser der Krümmung oder des küssenden Zirkels, oder den Stral der Evolute (welches alles einerlei ist) für einen beliebigen Punkt H (folg. Fig.) der Zykloïde haben will, so ziehet man die Linie HG wie vorher, ferner, die Sehne GD des Bogens GPD, welcher zwischen der HG und der Basis CE lieget. Man ziehet HO mit GD parallel, und machet HO = 2GD, oder NO = GD, so ist HO, sowohl der Größe als der Lage nach, der Halbmesser der Krümmung für den Punkt H der Zykloïde, das heißt, der Halbmesser eines Zirkels, der dieselbige Krümmung hat, wie die Zykloïde bei H. VI) Die



VI) Die Evolute einer Zykloïde bestehet in zwei halben Zykloïden, die mit den Hälften der gegebenen völlig einerlei sind, und nur in veränderter Lage erscheinen. Man versetze die Hälfte CDF der gegebenen Zykloïde in QRE, und die Hälfte EDF in QSC, so daß SR eine gerade Linie mache, daß QR = QS = DE = CD, und ER = DQ = CS = FD, so ist CQE die Evolute der Zykloïde CFE. Das heißt, wenn man in Q einen Faden bindet, der so lang ist, als QF oder 2DF, diesen Faden am Ende F anfaßt, ihn stramm hält, und zwischen den beiden halben Zykloïden QC und QE so herumführet, daß sich ein Theil wie QO anschließe, der andere OH aber gerade ausgedehnet sei, so beschreibet das Ende F oder H die Zykloïde CFE.

VII) Jeder beliebige Bogen FH der Zykloïde, vom Scheitel an gerechnet, ist doppelt so lang, als die Sehne FG des zustimmenden Bogens des auf der Axe beschriebenen Zirkels. Eigentlich wird in der höheren Geometrie bewiesen, daß $FH = 2\sqrt{(FD \times TD)}$. Nun ist $TF : FG :: FG : FD$, daher $TF \times FD = FG^2$ und $\sqrt{(TD \times FD)} = FG$, also $FH = 2FG$.

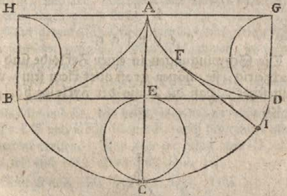
VIII) Die

VIII) Die halbe Zykloide FE ist der doppelten Axe oder 2FD gleich, und die ganze Zykloide CFE ist der vierfachen Axe oder 4FD gleich. Dieses siehet man auch daraus, daß der Faden QF(=2FD) die halbe Zykloide QE decken muß.

§. 14.

Aufgabe.

Ein einfaches Pendel so einrichten, daß es eine gegebene Zykloide beschreibe.



Es sei DCB die gegebene Zykloide, CE ihre Axe, DB ihre Grundlinie. Verlängere CE bis A, so daß EA = CE. Durch A ziehe GH mit DB parallel. Errichte BH und DG senkrecht auf DB. Mit einem Zirkel, der demjenigen gleich sei, welcher die gegebene Zykloide erzeuget hat, beschreibe auf AH und AG die halben Zykloiden AB und AD (§. 12). Biege zwei metallene Platten so, daß sie die Gestalt der halben Zykloiden AB und AD bekommen. Binde einen kleinen schweren Körper I an einem

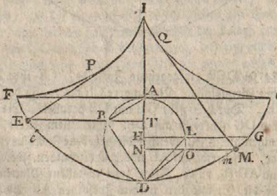
einem Faden, mache den Faden $= AC = 2EC$. Befestige sein anderes Ende in A. Laß dies Pendel schwingen, so beschreibet der schwere Punkt I allemal die Zykloide DCB oder einen Theil derselben. Dieses erhellet aus dem VIten Artikel des vorigen Paragraphs.

Anmerkung. Es ist für die jetzige Aufgabe eben nicht nöthig, daß die Basis DB der Zykloide horizontal sei. Dennoch werden wir in der Folge immer diesen horizontalen Stand annehmen, auf daß das Pendel immer auf beiden Seiten des Scheitels C ähnlichgleiche Schwingungen mache.

§. 15.

Lehrsatz.

Die Schwingungen in einer Zykloide sind alle gleichzeitig, sie mögen groß oder klein sein, vorausgesezt, daß die Basis der Zykloide horizontal sei.



Es

Es sei CDF eine Zykloide, CF deren horizontale Basis, AD die vertikale Axe, ABDOA der erzeugende Zirkel, CIF die Evolute, IM oder IE oder ID ein Pendel, welches so eingerichtet ist, daß es seine Schwingungen in der Zykloide CDF machen muß (§. 14); oder, es sei bloß ein schwerer Punkt vorhanden, welcher in der Konkavität der Zykloide, vermöge seiner Schwere, gleitet, und Schwingungen machet; so sage ich, jede halbe Schwingung in einem beliebigen Theile GD der Zykloide wird der halben Schwingung in der halben Zykloide FD gleich sein; woraus natürlich folget, daß jede ganze Schwingung der Schwingung in der ganzen Zykloide gleich ist, und daß überhaupt alle größere oder kleinere Schwingungen gleich sind.

Man gedenke sich DG in unendlich viel gleiche Theilchen wie Mm getheilet. Man stelle sich vor, es sei auch DF in eben so viel Theilchen getheilet wie Ee, so wird sich jeder Theil der DG zu jedem Theile der DF verhalten, wie DG selbst zu DF. Man nehme nun zwei zustimmende Theile Mm und Ee, das heißt, man nehme solche Punkte, welche DG und DF in M und E, auch in m und e gleichverhaltend theilen. Man ziehe die Applikaten ET, MN, GH, wie auch die Sehnen DB, DO, DL.

Nun ist also DF : DE :: DG : DM.

Da aber in der Zykloide jede Sehne wie DB die Hälfte des zustimmenden Bogens DE ist (§. 13),

so ist auch DA : DB :: DL : DO

also auch $DA^2 : DB^2 :: DL^2 : DO^2$

Nun ist $DB^2 = DT \times DA$, weil $DT : DB :: DB : DA$. Also ist $DA^2 : DB^2 :: DA^2 : DT \times DA :: DA : DT$. Ferner ist aus ähnlichen Gründen $DL^2 = DH \times DA$ und $DO^2 = DN \times DA$, also $DL^2 : DO^2 :: DH \times DA : DN \times DA :: DH : DN$. Substituiret man diese neuen Verhältnisse,

so

so ist $DA : DT :: DH : DN$
$(DA - DT) : DT :: (DH - DN) : DN$
$AT : DT :: HN : DN$
$\sqrt{AT} : \sqrt{DT} :: \sqrt{HN} : \sqrt{DN}$
$\sqrt{AT} : \sqrt{HN} :: \sqrt{DT} : \sqrt{DN}$

Nun war $DB^2 = DT \times DA$ und $DO^2 = DN \times DA$, also $DB^2 : DO^2 :: DT \times DA : DN \times DA :: DT : DN$. Folglich $DB : DO :: \sqrt{DT} : \sqrt{DN}$.

Folglich $\sqrt{AT} : \sqrt{HN} :: DB : DO$
$\sqrt{AT} : \sqrt{HN} :: DE : DM$
$\sqrt{AT} : \sqrt{HN} :: Ee : Mm$

Nun ist die Geschwindigkeit des von F bis F gekommenen Körpers so groß, als wenn er von A bis T gefallen wäre (Hauptst. IV, §. 13). Eben so ist die Geschwindigkeit des von G bis M geglittenen Körpers so groß, als wenn er von H bis N gefallen wäre. Die Quadrate der Geschwindigkeiten fallender Körper verhalten sich bekanntermaaßen wie die Höhen, oder die Geschwindigkeiten wie die Quadratwurzeln der Höhen: also, wenn die Geschwindigkeit in E oder T mit V, und in M oder N mit v bezeichnet wird, so ist

$$\sqrt{AT} : \sqrt{HN} :: V : v$$

Aus dieser und der vorigen Proporzion folget

$$V : v :: Ee : Mm$$

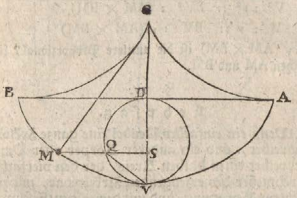
Woraus man siehet, daß die Geschwindigkeiten bei E und M sich verhalten, wie die Räumchen Ee und Mm. Also werden diese Räumchen in gleichen Zeiten zurück geleget. Und da dieses von allen zustimmenden Theilchen der DF und der DG gilt, so werden sowohl die halbe Zykloide als ein beliebiger Theil derselben in gleichen Zeiten durchlaufen, oder die halben Schwingungen sind allemal gleichzeitig, folglich auch die ganzen Schwingungen (Hauptst. IV, §. 15, Zus. II).

§. 16.

§. 16.

Lehrsatz.

Wenn ein einfaches Pendel eine ganze Zykloïde beschreibet, so verhält sich die Geschwindigkeit des schweren Punktes im Scheitel, zur Geschwindigkeit in jedem anderen Punkte der Zykloide, wie die halbe Länge der Zykloide zur mittleren Proporzional-Größe zwischen dem schon beschriebenen und dem noch zu beschreibenden Theile.



Es beschreibe ein Pendel die ganze Zykloïde BMVA. Die Geschwindigkeit in M sei v, und in V sei sie V, so ist bekanntermaaßen (wie bei §. 8)

$$V : v :: \sqrt{(DV)} : \sqrt{(DS)}$$

oder $V^2 : v^2 :: DV : DS$

Nun ist $DS = DV - VS$. Ferner, da $QV^2 = DV \times VS$, so ist $VS = \frac{QV^2}{DV}$. Also $DS = DV - \frac{QV^2}{DV}$.

Folglich $V^2 : v^2 :: DV : \left(DV - \frac{QV^2}{DV}\right)$

$$V^2 : v^2 :: DV^2 : (DV^2 - QV^2)$$

Ferner ist $DV = \frac{1}{2}BV$ und $DV^2 = \frac{1}{4}BV^2$ (§. 13). Desgleichen ist $QV = \frac{1}{2}MV$, daher $QV^2 = \frac{1}{4}MV^2$. Also

$$V^2 : v^2 :: \tfrac{1}{4}BV^2 : (\tfrac{1}{4}BV^2 - \tfrac{1}{4}MV^2)$$

$$V^2 : v^2 :: BV^2 : (BV^2 - MV^2)$$

$$V^2 : v^2 :: BV^2 : (BV + MV).(BV - MV)$$

$$V^2 : v^2 :: BV^2 : (AV + MV).(BV - MV)$$

$$V^2 : v^2 :: BV^2 : (AM \times BM)$$

$$V : v :: BV : \sqrt{(AM \times BM)}$$

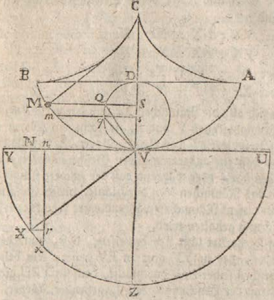
und $\sqrt{(AM \times BM)}$ ist die mittlere Proporzional-Linie zwischen AM und BM.

§. 17.

Lehrsatz.

Wenn ein einfaches Pendel eine ganze Zykloide beschreibet, und ein anderer Körper oder Punkt beschreibet einen halben Kreis, der den vierfachen Durchmesser des erzeugenden Zirkels hat, mit einförmiger Bewegung, und mit derjenigen Geschwindigkeit, die das Pendel in der Vertikal-Linie hat, so erfordern beide Bewegungen gleich viel Zeit.

Man ziehe UY mit AB parallel, und mache $VY = VU = 2VD = VB = VA$ (§. 13). Folglich ist $UY = AVB$. Das Pendel sei von B an herunter gekommen, und beschreibe jetzt das Räumchen Mm. Ziehe MS und ms mit AB parallel, und die Sehnen VQ, Vq. Mache $VN = 2VQ = VM$, $Vn = 2Vq = Vm$. Stelle dir vor, der Punkt M oder ein anderer bewege sich in der geraden Linie YV, welche der halben Zykloide BV gleich ist, nach demselbigen Gesetze, wie er sich wirklich in der Zykloide beweget;



beweget; so daß er, anstatt sich in den Punkten B, M, m, V zu befinden, sich in den zustimmenden Zeiten in Y, N, n, V befinde.

Aus dem Mittelpunkte V mit dem Halbmesser VY = 2 VD = VB beschreibe einen halben Zirkel YZU. Ziehe die Applikaten NX, nx.

Wenn immer V die Geschwindigkeit in V und v in M ist, so haben wir gesehen, daß (§. 16)

$$V : v :: BV : \sqrt{(BV^2 - MV^2)}$$

daher $V : v :: YV : \sqrt{(YV^2 - NV^2)}$

$$V : v :: VX : \sqrt{(VX^2 - NV^2)}$$

$$V : v :: VX : NX$$

Ziehe Xr mit Nn parallel, so ist, wegen der ähnlichen Dreiecke VXN und Xxr, deren Seiten senkrecht aufeinander sind

$$VX : NX :: Xx : Xr$$
$$VX : NX :: Xx : Nn$$
daher $$V : v :: Xx : Nn$$
oder $$Xx : Nn :: V : v$$

Da sich also die Räumchen Xx und Nn verhalten, wie die Geschwindigkeiten V und v, so kann ein Körper mit der Geschwindigkeit V den kleinen Bogen Xx durchlaufen, während daß ein anderer mit der Geschwindigkeit v das Räumchen Nn, oder während daß der schwere Punkt des Pendels das Räumchen Mm durchläuft, dessen Geschwindigkeit in diesem Räumchen während einer sehr kurzen Zeit für einförmig gehalten wird.

Auf solche Art läßt sich beweisen, daß, unterdessen der Körper, der in YV oder in BV gehet, ein beliebiges Theilchen seiner Linie durchläuft, ein in YZU gleichförmig, mit der Geschwindigkeit V, gehender Körper, den zustimmenden kleinen Zirkelbogen durchlaufen kann. Folglich sind die veränderliche Bewegung in BV oder YV und die einförmige in YZ von gleicher Dauer. Der nämliche Beweis gilt für die andere Hälfte der Figur, oder die aufsteigende Bewegung des Pendels.

§. 18.

Lehrsatz.

Die Dauer jeder Schwingung eines einfachen Pendels in der Zykloide, verhält sich zur Zeit des Fallens längs der Axe, wie der Umkreis eines Zirkels sich zum Durchmesser verhält.

Da VZ = 2DV, so fällt ein schwerer Körper längs DV in eben so langer Zeit, als er würde nöthig

haben,

haben, um mit der einförmigen Geschwindigkeit V den doppelten Weg VZ zurückzulegen (§. III, §. 2).

Ferner dauret eine Schwingung in der ganzen Zykloide so lange, als eine einförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit V im halben Umkreise YZU (§. 17).

Wenn aber die Geschwindigkeit einerlei ist, so verhalten sich, bei einförmigen Bewegungen, die Zeiten wie die Wege. Also verhält sich die Zeit in VZ (welche der Zeit des Falles in DV gleich ist), zur Zeit in YZU (welche der Zeit einer Schwingung gleich ist), wie VZ zu YZU, das ist, wie die Halbmesser zum halben Umkreise, oder wie der Durchmesser zum ganzen Umkreise, das ist, nächstens wie 113 zu 355, oder wie 1 zu 3,1416, oder wie 10000 zu 31416. Man kann auch dieses umkehren, und wie im Lehrsatze vortragen.

Ferner, da kleine und große Schwingungen in der Zykloide gleichzeitig sind (§. 15), so gilt das gefundene Verhältniß nicht nur von Schwingungen in der ganzen Zykloide, sondern auch von allen möglichen kleinern Schwingungen.

Der Theil der Zykloide BVA, der beiderseits nächst im Punkte V lieget, weichet nicht viel von einem Zirkelbogen ab, der aus dem Mittelpunkte C beschrieben ist. Denn aus dem 5ten Artikel des 13ten Paragraphs kann leicht gefolgert werden, daß VC der Halbmesser der Krümmung oder des küssenden Zirkels für den Punkt V ist. Dieser Zirkel aber ist eben derjenige, der sich in der Gegend V am genauesten an die Zykloide anschließt.

Also wird alles, was von den Schwingungen in der Zykloide strenge bewiesen worden, auch als Näherung für Schwingungen in kleinen Zirkelbögen gelten. Nämlich:

1) Solche kleine Schwingungen können für gleichzeitig gehalten werden, ohnerachtet sie an Weite ab- oder zunehmen, welches schon auf eine andere Art bewiesen worden.

2) Wie sich der Umkreis eines Zirkels zum Durchmesser verhält, so verhält sich die Dauer einer Schwingung zur Dauer des Falles längs der Hälfte des vertikalen Pendels (denn es ist DV = $\frac{1}{2}$ CV).

§. 19.

Aufgabe.

Aus der bekannten Länge eines Sekunden-Pendels den Weg zu finden, welchen ein schwerer Körper in der ersten Sekunde des Falles zurückleget.

Es sei a die halbe Länge des Sekunden-Pendels. Es sei jeder Zirkelumkreis zu seinem Durchmesser wie π zu 1, so ist (§. 18)

$$\pi : 1 :: 1 \text{ Sek.} : x \left(= \frac{1}{\pi} \text{ Sek.} \right).$$

Also ist $\frac{1}{\pi}$ Sek. die Dauer des Falles längs a. Nun verhalten sich bei fallenden Körpern die Wege, wie die Quadrate der Zeiten. Es sei also h die Höhe des Falles in einer Sekunde, so ist

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 : 1^2 :: a : h$$

$$\frac{1}{\pi^2} : 1 :: a : h$$

daher $h = a\pi^2$

Wir haben schon bemerket, daß die Länge des Sekunden-Pendels in unsern Gegenden 3 Fuß 2 Zoll, oder 38 Zoll Rheinländisch beträgt (§. 6). Also $a = \frac{38}{2} = 19$.

$$\begin{aligned} \text{Also } h &= 19 \times (3{,}1416)^2 \\ &= 19 \times 9{,}8696 \text{ Zoll.} \\ &= 15{,}6268 \text{ Fuß.} \end{aligned}$$

welches

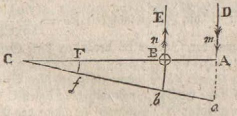
welches bis auf die Tausendtheilchen eines Fußes mit dem bei fallenden Körpern für die erste Sekunde angenommenen Räume übereinstimmet (H. III, §. 11).

§. 20.

Da wir nun das einfache Pendel hinlänglich untersuchet haben, so schreiten wir zum zusammengesetzten (§. 1). Es läßt sich allemal ein einfaches Pendel gedenken, dessen Schwingungen mit denen des zusammengesetzten gleichzeitig sind. Der Punkt, wo anstatt des zusammengesetzten Pendels das einfache angebracht werden müßte, welches die nämlichen Schwingungen machen würde, heißt der Schwingepunkt (centre d'oscillation). Wir müssen uns durch einige vorläufige Betrachtungen zu Untersuchung dieses Punktes vorbereiten.

§. 21.

Es sei auf einer horizontalen Ebne eine gerade steife Linie um den Punkt C herum beweglich. An ihr sei ein



Körper B befestiget, der wegen des Widerstandes der horizontalen Ebne als ein Körper ohne Schwere zu betrachten ist. Auf einen Punkte A der geraden Linie wirke eine Kraft m in der Richtung DA, welche auf CA senkrecht ist. Es wird gefraget, welche Geschwindigkeit B bekömmt?

Die gerade Linie CA kann als ein Hebel betrachtet werden. Wenn wir bei B, mit Weglassung des Körpers B, uns eine Kraft n gedenken, welche in der Richtung BE, mit DA parallel, aber ihr entgegen wirket, so wird das Gleichgewicht erfolgen, wenn

$$CB : CA :: m : n$$

$$\text{daher } n = \frac{m.CA}{CB}$$

Da also die Kraft, welche bei A die Größe m hat, in B einer Kraft $\frac{m.CA}{CB}$ das Gleichgewicht hält, so ist die in B übertragene Wirkung der m eben so groß, als $\frac{m.CA}{CB}$. Folglich kann man sich vorstellen, anstatt der Kraft m in A, wirke auf den Körper B, in der Richtung EB mit DA parallel, eine Kraft $\frac{m.CA}{CB}$. Diese muß der Masse B eine Geschwindigkeit geben, welche man erhält, wenn man die Kraft durch die Masse dividiret (Stat. H. II. §. 32). Also bekömmt B die Geschwindigkeit $Bb = \frac{m.CA}{B.CB}$. Die Krümmung des Bogens Bb verändert diese Geschwindigkeit nicht (H. IV, §. 12).

Der Bogen Bb bestimmt einen gewissen Winkel BCb. Es sei CF die Einheit, wornach die Längen CA und CB gemessen werden, so bestimmet die Länge des Bogens Ff oder Φ auf eine noch genauere Art den Winkel FCf, indem man Tafeln hat, wodurch die Länge des Bogens Ff in Grade verwandelt werden kann.

Nun haben wir

$$CB : CF :: Bb : Ff$$

$$\text{oder } CB : 1 :: \frac{m.CA}{B.CB} : Ff$$

daher

$$\text{daher } \varphi = Ff = \frac{m.CA}{B.CB^2}$$

Diesen Bogen φ oder Ff wollen wir hier die Winkel-Geschwindigkeit nennen. Er giebt zu erkennen, welchen Winkel der Körper B, unter den gegebenen Umständen, in der Einheit der Zeit beschreibet.

§. 22.

Wenn man in A, wo die Kraft wirket, einen Körper befestiget, der sich zu B verhält wie CB^2 zu CA^2, und den Körper B wegnimmt, so entstehet, durch die Wirkung der Kraft m die nämliche Winkel-Geschwindigkeit, als da B vorhanden war.

Es werde der neue Körper in A auch A genannt, man mache vorgeschriebener Maßen

$$CA^2 : CB^2 :: B : A$$

$$\text{so wird } A = \frac{B.CB^2}{CA^2}$$

Dividiret man die Kraft m durch diese Masse, so ist die Geschwindigkeit

$$Aa = \frac{m.CA^2}{B.CB^2}$$

Nun sage man

$$AC : FC :: Aa : Ff$$

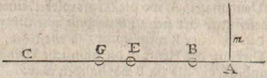
$$AC : 1 :: \frac{m.CA^2}{B.CB^2} : Ff$$

$$\text{daher } \varphi = Ff = \frac{m.CA}{B.CB^2}$$

welches die nämliche Winkel-Geschwindigkeit ist, die vorher entstand, da der Körper B vorhanden war.

§. 23.

Auch wenn mehrere Körper in der steifen Linie vorhanden sind, so entstehet dieselbige Winkel-Geschwindigkeit, als wenn anstatt eines jeden ein anderer im Punkte, wo die Kraft wirket, angebracht wäre, so daß sich jeder neue Körper und der gewesene umgekehret verhielten, wie die Quadrate ihrer Entfernungen vom festen Punkte.

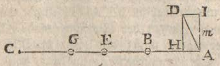


Der Körper B verursachet eben eine solche Winkel-Geschwindigkeit als in A ein Körper $= \frac{B.BC^2}{CA^2}$ (§.22). Der Körper E verursachet ebenfalls solche Winkel-Geschwindigkeit, als wenn in A ein Körper $= \frac{E.CE^2}{AC^2}$ vorhanden wäre. Der Körper G, als wenn in A eine Masse $\frac{G.GC^2}{AC^2}$ wäre. Folglich verursachen alle drei zusammen eine solche Winkel-Geschwindigkeit, als wenn in A die drei Massen $\frac{B.BC^2}{AC^2}, \frac{E.EC^2}{AC^2}, \frac{G.GC^2}{AC^2}$, oder eine einzige $= \frac{B.BC^2 + E.EC^2 + G.GC^2}{AC^2}$ vorhanden wäre.

§. 24.

Wir haben die Richtung der Kraft m auf die Linie AC senkrecht angenommen, es bleibet aber alles das nämliche, wie

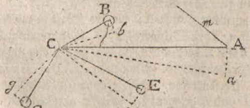
wie vorher, wenn sie auch in schiefer Richtung wirket. In diesem Falle darf man nur die ganze Kraft DA in eine senkrechte IA und in eine parallele AH zerlegen, welche



letztere durch den Widerstand des Punktes C aufgehoben wird. Wenn man alsdann die senkrechte Kraft IA mit m benennet, so bleiben die Beweise wie vorher.

§. 25.

Wir haben ferner angenommen, daß die Körper alle an der geraden Linie selbst befestiget sind. Es finden die gegebenen Regeln aber nicht minder Statt, wenn auch die Körper B, E, G nicht unmittelbar an der steifen Linie befestiget, sondern nur auf eine feste Art mit ihr verbunden sind, und alle in der Ebne liegen, in welcher sich die AC drehet, welche Ebne immer, um der Deutlichkeit willen, horizontal gedacht werden muß, um daß die Wirkung der Schwere aufgehoben sei.



Denn

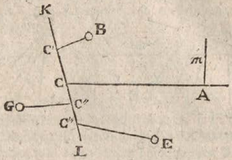
Denn, da hier von der Schwere der Körper gar nicht die Rede ist, sondern nur von ihrer Inerzie, so bedenke man, daß, wenn AC um den Punkt C gedrehet wird, und der Punkt A den Weg Aa durchläuft, die Körper B, E, G, eben solche Bögen Bb, Ee, Gg zu beschreiben gezwungen werden, als wenn sie in denselbigen Entfernungen CB, CE, CG unmittelbar an der AC befestiget wären. Die Inerzie wirket immer der Richtung gerade entgegen, die der Körper nehmen muß; also hier in den Richtungen bB, eE, gG. Eben so würde sie gegenwirken, wenn B, E und G in der Linie AC wären. Es erfolget demnach alles in beiden Fällen auf einerlei Art. Folglich ist auch hier der Erfolg der nämliche, als wenn die Kraft m auf eine Masse $= \frac{B.BC^2 + E.EC^2 + G.GC^2}{AC^2}$ wirkete.

§. 26.

Wenn die einzelnen Massen nicht in einer Ebne liegen, und das ganze System gezwungen ist, sich um eine bewegliche Axe zu drehen, so gelten noch immer die nämlichen Lehrsätze. Man muß sich aber eine Ebne vorstellen, die durch die Axe und den Punkt gehet, wo die Kraft wirket. Die Winkelgeschwindigkeit bestehet dann in dem Winkel, den diese Ebne um die Axe beschreibet; und anstatt der Entfernung vom festen Punkte nimmt man die senkrechte Entfernung von der Axe.

Es seien der Punkt A, wo die Kraft m wirket, und die Massen (ohne Schwere) B, G, E, untereinander und mit der Axe KL verbunden, so daß sie sich alle zugleich um diese Axe drehen müssen. Man ziehe AC, BC′, GC″, EC‴, auf die Axe senkrecht, und gedenke sich eine Ebne, die durch KL und A geleget ist. Wirket nun die Kraft m auf den Punkt A, so beschreibet die Linie AC, sammt der gedachten Ebne, einen gewissen Winkel. Es müssen aber

die



die Linien BC′, GC″, EC‴, alle einen gleichen Winkel beschreiben, so gut, als wären sie auf CA, von C aus aufgetragen. Es geschiehet demnach alles in Betreff der Winkel-Geschwindigkeit, wie in den vorigen Fällen. Wäre also der Körper B allein, so würde die Winkel-Geschwindigkeit der Ebne sein (§. 21)

$$\frac{m.CA}{B.C'B^2}$$

und dieselbige Winkel-Geschwindigkeit würde erfolgen, wenn man anstatt B in A eine Masse $= \frac{B.C'B^2}{CA^2}$ substituirte (§. 22). Ferner, wenn mehrere Körper B, G, E, vorhanden sind, so entstehet dieselbige Winkel-Geschwindigkeit, als wenn in A eine Masse

$$= \frac{B.C'B^2 + G.C''G^2 + E.C'''E^2}{AC^2}$$

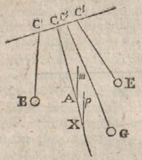
vorhanden wäre (§. 23 und 24).

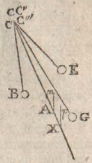
§. 27.

Aufgabe.

Den Schwingepunkt eines Systems von schweren Körpern finden, die sich um eine Axe schwingen.

Es





Es seien die Körper B, E, G auf irgend eine Art unter sich selbst und mit der horizontalen Axe C′ C‴ verbunden, so daß sie gezwungen seien, in ihrer Lage unter einander, und auch mit der Axe zu bleiben, wenn sich das System um diese Axe drehet. Es ist übrigens nicht nöthig, daß die Körper in einer Ebne liegen. In der ersten von beiden beigefügten Figuren ist die Axe C′ C‴ seitwärts zu sehen. In der anderen aber lieget sie ganz in der Gesichtslinie, und wird nur wie ein Punkt gesehen. Man benehme anfänglich in Gedanken den Körpern ihre Schwere, und anstatt derselben setze man in den gemeinsamen Schwerpunkt A eine einzelne Kraft $= p(B+E+G)$ welche in senkrechter Richtung niederwärts wirket, und wo p die Wirkung der Fallkraft ist. Also haben wir hier den Fall, wo verschiedene Körper ohne Schwere, welche mit einander, und mit dem Punkte A verbunden sind, sich um eine Axe C′ C‴ drehen können, und wo eine Kraft $= p(B+E+G)$ bei A wirket. Die Wirkung oder die Winkel-Geschwindigkeit ist demnach hier die nämliche, als wenn die Körper B, G, E gar nicht vorhanden wären (§. 25), und nur in A eine Masse

$$= \frac{B.BC'^2 + G.GC''^2 + E.EC'''^2}{AC^2}$$

vorhanden

vorhanden wäre. Da nun auf diese Masse die senkrechte Kraft $p(B+E+G)$ wirket, so entstehet daraus eine Geschwindigkeit

$$m = p(B+E+G) : \frac{B.BC'^2 + G.GC''^2 + E.EC'''^2}{AC^2}$$

$$= \frac{p(B+E+G).AC^2}{B.BC'^2 + G.GC''^2 + E.EC'''^2}$$

und da die Wirkung beständig fortdauret, so ist die gefundene Geschwindigkeit eigentlich eine Beschleunigung, und man kann sich in A einen bloßen physikalischen Punkt vorstellen, der mit der gefundenen Beschleunigung niederwärts getrieben wird. In diesem Falle ist CA ein einfaches Pendel, welches mit der Beschleunigung

$$m = \frac{p(B+G+E) \times AC^2}{B.BC'^2 + G.GC''^2 + E.EG'''^2}$$

niederwärts getrieben wird. Nun verhalten sich die Längen zweier gleichzeitiger einfacher Pendeln allemal wie die Fallkräfte, oder wie die daraus entstehenden Beschleunigungen (§. 9). Es sei demnach CX ein einfaches Pendel, dessen Schwingungen mit denen des Pendels CA gleichzeitig sind, und welches, wie gewöhnlich, mit der Beschleunigung p gehet, so ist

$$m : p :: AC : CX$$

$$\frac{p(B+E+G)\,AC^2}{B.BC'^2 + G.GC''^2 + E.EC'''^2} : p :: AC : CX$$

$$\frac{(B+E+G)AC}{B.BC'^2 + G.GC''^2 + E.EC'''^2} : 1 :: 1 : CX$$

daher $CX = \dfrac{B.BC'^2 + G.GC''^2 + E.EC'''^2}{(B+E+G).AC}$

Die Summe der Produkte aus jeder Masse in das Quadrat ihrer senkrechten Entfernung von der Axe wird

der

der Exponent der Trägheit oder der Inerzie genannt. Also erhält man die Länge CX oder den Schwingepunkt X, wenn man diesen Exponenten durch dasjenige Produkt dividiret, welches entstehet, wenn man die Summe aller Massen durch die Entfernung des Schwerpunktes von der Axe multipliziret. Ob gleich hier nur von den bloßen Massen ohne Schwere die Rede ist, so kann man sie doch dem Gewichte nach schäzen, wie sonst schon bekannt ist (Stat. Hauptst. I, §. 12).

§. 28.

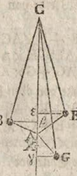
Jeder Körper kann als ein System von unendlich viel kleinen Massen betrachtet werden. Was demnach von einem Systeme gesaget wird, läßt sich auch auf einzelne Körper von beträchtlicher Größe anwenden. Wir werden demnach in den folgenden Paragraphen allemal sagen können: ein System von Körpern oder ein Körper. Bei dem Systeme müßten jedoch allemal sehr kleine oder eigentlich unendlich kleine einzelne Körper verstanden werden.

§. 29.

Lehrsaz.

Der Exponent der Trägheit eines Systems von Körpern oder eines Körpers, für eine gegebene Axe, ist gleich dem Exponent der Trägheit für eine andere Axe, die mit der gegebenen parallel ist, und durch den Schwerpunkt gehet, nebst dem Produkte aus der Summe der einzelnen Massen, und dem Quadrate der Entfernung beider Axen.

Diese Figur muß man sich ohngefähr wie die zweite bei §. 27 vorstellen, nämlich: Cy ist eine vertikale Ebne, und C eine horizontale Axe in derselben. A in der Ebne Cy ist der gemeinsame Schwerpunkt der Körper B, E und G. Die Linie AC gehet durch A, und ist auf der Axe senkrecht.



senkrecht. Durch A stellet man sich eine zweite Axe mit der Axe C parallel vor. X ist der Schwingepunkt für die Axe C. Aus jedem Körper werden zwei gerade Linien wie $B\beta$ und BA gezogen, die eine auf die Ebne $C\gamma$, die andere auf die Axe A senkrecht.

Wir haben gesaget, der Exponent der Trägheit des Systemes bestehe in folgenden Produkten (§. 27)

$$B \times BC^2 + E \times EC^2 + G \times GC^2$$

Nun ist $BC^2 = B\beta^2 + C\beta^2$

$$= B\beta^2 + (CA - A\beta)^2$$
$$= B\beta^2 + CA^2 - 2CA \times A\beta + A\beta^2$$
$$= (B\beta^2 + A\beta^2) + CA^2 - 2CA \times A\beta$$
$$= AB^2 + CA^2 - 2CA + A\beta$$

folglich $B \times BC^2 = B \times AB^2 + B \times CA^2 - 2B \times CA \times A\beta$

Eben so wird bewiesen, daß

$$E \times EC^2 = E \times AE^2 + E \times CA^2 - 2E \times CA \times A\varepsilon$$

Ferner ist

$$GC^2 = G\gamma^2 + C\gamma^2$$
$$= G\gamma^2 + (CA + A\gamma)^2$$
$$= G\gamma^2 + CA^2 + 2CA \times A\gamma + A\gamma^2$$
$$= (G\gamma^2 + A\gamma^2) + CA^2 + 2CA \times A\gamma$$
$$= AG^2 + CA^2 + 2CA \times A\gamma$$

also $G \times GC^2 = G \times AG^2 + G \times CA^2 + 2G \times CA \times A\gamma$

Sammlet man diese Werthe von $B \times BC^2$, $E \times EC^2$, $G \times GC^2$, so kömmt

$$\left.\begin{array}{l} B \times BC^2 \\ + E \times EC^2 \\ + G \times GC^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} B \times AB^2 + B \times AC^2 - 2B \times CA \times A\beta \\ + E \times AE^2 + E \times AC^2 - 2E \times CA \times A\varepsilon \\ + G \times AG^2 + G \times AC^2 + 2G \times CA \times A\gamma \end{array}\right.$$

oder, wenn man die Sätze von oben herunter reihet,

$$\left.\begin{array}{l} B \times BC^2 \\ + E \times EC^2 \\ + G \times GC^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} B \times AB^2 + E \times AE^2 + G \times AG^2 \\ + (B + E + G) \times AC^2 \\ + 2AC \times (G \times A\gamma - E \times A\varepsilon - B \times A\beta) \end{array}\right.$$

Stellet man sich eine Ebne vor, auf $C\gamma$ senkrecht und durch den Schwerpunkt A gehend, so ist $G \times A\gamma - E \times AE - B \times A\beta$ die algebraische Summe aller Momente in Betreff der gedachten Ebne. Diese ist null, eben deswegen, weil A der gemeinsame Schwerpunkt ist (Stat. H. V, §. 11 &c). Folglich ist in der letzten Zeile rechter Hand alles null, und es bleibet

$$B \times BC^2 + E \times EC^2 + G \times GC^2 = B \times AB^2 + E \times AE^2 + G \times AG^2 + (B + E + G) \times AC^2$$

Nun ist $B \times AB^2 + E \times AE^2 + G \times AG^2$ der Exponent der Trägheit des Systems (§. 27), in Betracht der Axe die durch A gehet, und mit der Axe C parallel ist; und $(B + E + G) \times AC^2$ ist das Produkt aus der Summe der Massen und dem Quadrate der Entfernung beider Axen. Also ist der Lehrsatz bewiesen.

Zusatz. Wenn man den Exponenten der Trägheit in Betreff einer Axe, die durch den Schwerpunkt gehet, gefunden hat, so läßt er sich leicht für jede andere Axe finden, welche mit dieser parallel ist.

§. 30.

Lehrsatz.

Die Entfernung des Schwingepunktes vom Schwerpunkte ist gleich dem Exponent der Trägheit

heit in Betreff einer Axe, die durch den Schwerpunkt gehet, und mit der gegebenen parallel ist, dividiret durch das Moment der Schwere, in Betreff der gegebenen Axe. (Siehe vorhergehende Figur).

Es ist (§. 27)

$$CX = \frac{B \times BC^2 + E \times EC^2 + G \times GC^2}{(B + E + G) \times AC}$$

Substituiret man nun anstatt des Zählers dessen Werth, wie er im vorigen Paragraph gefunden worden, so ist

$$CX = \frac{B \times AB^2 + E \times AE^2 + G \times AG^2 + (B + E + G) \times AC^2}{(B + E + G) \times AC}$$

oder

$$CX = \frac{B \times AB^2 + E \times AE^2 + G \times AG^2}{(B + E + G) \times AC} + AC$$

$$CX - AC = \frac{B \times AB^2 + E \times AE^2 + G \times AG^2}{(B + E + G) \times AC}$$

oder

$$AX = \frac{B \times AB^2 + E \times AE^2 + G \times AG^2}{(B + E + G) \times AC}$$

Hier enthält der Zähler den Exponent der Trägheit des ganzen Systemes, in Betrff einer Axe, die durch A gehet, und mit der Axe C parallel ist. Der Nenner ist das Produkt aus der Summe der Massen und der Entfernung AC, also das Moment der Schwere in Betrff der Axe C (Stat. H. V, §. 11 &c.)

§. 31.

Lehrsatz.

Der Schwingepunkt und Aufhängepunkt lassen sich verwechseln; das heißt, wenn man durch den gefundenen Schwingepunkt eine Axe mit der gegebenen parallel leget, und den Körper an dieser Axe schwingen läßt, so fällt der neue Schwingepunkt in die ehemalige Axe (S. letzte Figur).

Denn wenn der Körper in X aufgehänget wird, so lieget der Schwingepunkt jenseit des Schwerpunktes in einer Entfernung, die wir u nennen wollen, so daß (§. 30)

$$u = \frac{B \times AB^2 + E \times AE^2 + G \times AG^2}{(B + E + G) \times AX}$$

Es war aber (§. 30)

$$AX = \frac{B \times AB^2 + E \times AE^2 + G \times AG^2}{(B + E + G) \times AC}$$

daher

$$AC = \frac{B \times AB^2 + E \times AE^2 + G \times AG^2}{(B + E + G) \times AX}$$

Eben diesen Werth hat auch u, also $u = AC$.

Zusatz. Wenn also ein schwingender Körper jede Schwingung in einer gewissen Zeit verrichtet, so wird er sie noch in derselbigen Zeit verrichten, wenn der Schwingepunkt und der Aufhängepunkt verwechselt werden.

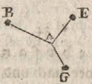
Anmerkung. Wir sagen bald Aufhängepunkt, bald Axe der Schwingungen. Der Aufhängepunkt ist eigentlich da, wo die Axe der Schwingungen von derjenigen Linie geschnitten wird, welche durch den Schwerpunkt gehet, und auf die Axe senkrecht ist. Wenn der Körper an diesem Punkte angehänget wird, so kann man ihn eben so gut schwingen lassen, als wenn er an der ganzen Axe befestiget wäre; die Axe dienet hauptsächlich dazu, daß die Schwingungen jedes Theilchens des Körpers immer in einer und derselbigen Ebne geschehen, welche die Axe senkrecht schneidet.

§. 32.

§. 32.

Lehrsatz.

Der Exponent der Trägheit eines Systemes oder eines Körpers, in Betreff einer Axe, die durch den Schwerpunkt des Systemes gehet, bleibet unverändert, man mag das System um die Axe drehen wie man will.



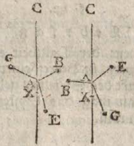
Es bleibet z. E. der gedachte Exponent immer $B \times AB^2 + E \times AE^2 + G \times AG^2$, wie man auch das System um die Axe A drehen mag.

§. 33.

Lehrsatz.

Der Exponent der Trägheit, in Betreff einer jeden horizontalen Axe, bleibet einerlei, wenn man das System oder den Körper wie man will, um eine Axe herum drehet, die durch den Schwerpunkt gehet, und mit der gegebenen parallel ist, jedoch ohne den Abstand beider Axen zu verändern.

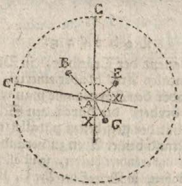
Wenn AC unverändert bleibet, so ist allemal der Exponent der Trägheit, in Betreff der Axe C, $B \times AB^2 + E \times AE^2 + G \times AG^2 + (B + E + G) . AC^2$ (§. 29). Und hier entstehet keine Veränderung, es mag das System wie in der ersten, oder wie in der zweiten Figur gestellet sein. (S. folgende Figur.)



§. 34.

Lehrsatz.

Wenn ein Körper nach und nach an verschiedenen Axen angehänget wird, die alle mit einer gewissen Axe, die durch den Schwerpunkt gehet, parallel und von ihr gleich weit entfernet sind, so bleiben die Schwingungen immer gleichzeitig.



Z. E. wenn $AC' = AC$, so ist $CX' = CX$, und die Schwingungen sind die nämlichen, man mag das System an an der Axe C′ oder an C anhängen. Denn es ist, wenn man es in C anhänget (§. 30)

$$CX = \frac{B \times AB^2 + E \times AE^2 + G \times AG^2 + (B+E+G).AC^2}{(B + E + G).AC}$$

und wenn man es in C′ aufhänget, so ist

$$CX' = \frac{B \times AB^2 + E \times AE^2 + G \times AG^2 + (B+E+G)AC'^2}{(B + E + G).AC'}$$

Da nun AC′ = AC, so ist CX′ = CX.

Zusatz. Und da AX = AX′, so sind die Schwingungen für solche Axen, die durch X, X′ &c. gehen, mit den Schwingungen für die Axen C, C′ auch gleichzeitig, vorausgesetzet, daß alle diese Axen mit einer und derselbigen, die durch A gehet, parallel sind (§. 31). Wenn man also eine Axe hat, die durch den Schwerpunkt gehet, so giebt es allemal zwei Entfernungen AC und AX, oder AC′ und AX′, die gleichzeitige Schwingungen geben.

§. 35.

Lehrsatz.

Wenn man in einer und derselbigen geraden Linie, die durch den Schwerpunkt des Systemes oder Körpers gehet, die Axe bald höher bald niedriger annimmt, so verhalten sich die Entfernungen der Schwingepunkte vom Schwerpunkte umgekehret, wie die Entfernungen der Aufhängepunkte vom Schwerpunkte (folg. Fig.).

Wenn der Aufhängepunkt in C ist, so haben wir (§. 30)

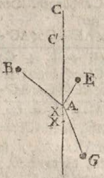
$$AX = \frac{B \times AB^2 + E \times AE^2 + G \times AG^2}{(B + E + G).AC}$$

Ist der Aufhängepunkt in C′, so ist

$$AX' = \frac{B \times AB^2 + E \times AE^2 + G \times AG^2}{(B + E + G).AC'}$$

(S. folgende Figur.)

 Woraus



Woraus leicht zu schließen ist, daß

$$AX : AX' :: \frac{1}{AC} : \frac{1}{AC'}$$

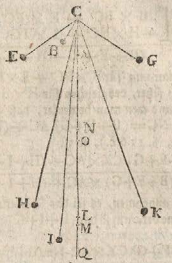
oder $AX : AX' :: AC' : AC$

§. 36.

Aufgabe.

Wenn eine gerade Linie durch die Schwerpunkte zweier Systeme von Körpern oder zweier Körper gehet, die mit ihr verbunden sind, und wenn diese gerade Linie sich um einen gewissen Punkt oder eine gewisse Axe schwinget, so soll man den Schwingepunkt finden, vorausgesetzet, daß man die Entfernung des Aufhängepunktes sowohl von beiden Schwerpunkten, als auch von jedem besondern Schwingepunkte schon wisse.

Es sei CQ (folg. Figur) eine steife gerade Linie, worin der Schwerpunkt A der Körperchen B, E und G lieget, auch der Schwerpunkt L der Körper H, I und K. Es



Es sei C der Aufhängepunkt oder die Axe der Schwingungen. Gesetzt, für diese Axe wäre X der Schwingepunkt der Körper B, E und G, wenn sie allein wären. Für die nämliche Axe sei M der Schwingepunkt der Körper H, I und K, wenn sie allein sind. Es sei ferner N der gemeinsame Schwerpunkt beider Systeme, und O der gemeinsame Schwingepunkt, wenn sie beide verbunden sind, und sich und C drehen.

So ist (§. 27)

$$CX = \frac{B \times BC^2 + E \times EC^2 + G \times GC^2}{(B + E + G) \times AC}$$

$$CM = \frac{H \times HC^2 + I \times IC^2 + K \times KC^2}{(H + I + K) \times LC}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgen diese neuen

$$B \times BC^2 + E \times EC^2 + G \times GC^2 = (B + E + G)\, CX \times AC$$

und

$$H \times HC^2 + I \times IC^2 + K \times KC^2 = (H + I + K) . CM \times LC$$

Ferner ist (§. 27)

$$CO = \frac{\begin{bmatrix} B \times BC^2 + E \times EC^2 + G \times GC^2 \\ + H \times HC^2 + I \times IC^2 + K \times KC^2 \end{bmatrix}}{(B+E+G+H+I+K) \times NC}$$

Wenn man nun für $B \times BC^2 + E \times EC^2 + G \times GC^2$ seinen Werth setzet, desgleichen für $H \times HC^2 + I \times IC^2 + K \times KC^2$, und wen man bemerket, daß $(B+E+G+H+I+K).NC = (B+E+G).AC + (H+I+K).LC$ (Stat. §. V, §. 11 &c.), so ist

$$CO = \frac{(B+E+G).CX \times AC + (H+I+K).CM \times LC}{(B+E+G) \times AC + (H+I+K) \times LC}$$

laßt uns annehmen, es sei das Verhältniß der Massen beider Systeme bekannt, so daß $(H+I+K) = n.(B+E+G)$ so kömmt

$$CO = \frac{(B+E+G).CX \times AC + n.(B+E+G).CM \times LC}{(B+E+G) \times AC + n.(B+E+G) \times LC}$$

oder wenn man oben und unten durch $B+E+G$ dividiret

$$CO = \frac{CX \times AC + n.CM.LC}{AC + n.LC}$$

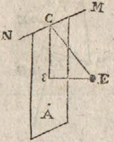
Diese Formel ist verständlich genug, ohne daß es nöthig sei, sie mit vielen Worten auszudrücken.

§. 37.

Bisher haben wir nur allgemeine Lehren von den Schwingepunkten vorgetragen. Jetzt wollen wir sehen, wie solche Punkte in einzelnen Fällen am bequemsten bestimmet werden können. Vor allen Dingen kömmt es darauf an, daß man jedes einzelne Theilchen des Systemes oder Körpers mit dem Quadrate seiner Entfernung von der Axe multiplizire, um hernach alle diese Produkte zu addiren, und den Exponenten der Trägheit (§. 27) zu erhalten.

Anstatt

Anstatt des Quadrats jeder Entfernung von der Axe können aber zwei andere Quadrate eingeführet werden, welches viel bequemer zu sein pfleget.

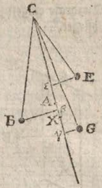


Es sei MN die Axe, E einer von den Körpern, die das System ausmachen, EC die senkrechte Entfernung von der Axe. Durch MN lege man in Gedanken eine beliebige Ebne, zum Exempel diejenige, welche durch den Schwerpunkt A des ganzen Systemes gehet. Man fälle $E\varepsilon$ auf diese Ebne senkrecht, und ziehe εC, so ist $EC^2 = E\varepsilon^2 + \varepsilon C^2$, folglich $E \times EC^2 = E.(E\varepsilon^2 + \varepsilon C^2) = E \times E\varepsilon^2 + E \times \varepsilon C^2$, und so gehet es mit den übrigen Körpern des Systemes, welche in dieser Figur weggelassen sind, um alle Verwirrung zu vermeiden.

Die folgende Figur ist so gezeichnet, als wenn die Axe in der Gesichtslinie läge, und gilt auch für den Fall, wo das System in einer Ebne lieget, welche sich in ihrer eigenen Verlängerung um den Punkt C herumdrehen kann. Wenn A der Schwerpunkt und X der Schwingepunkt ist, so haben wir gefunden (§. 27)

$$CX = \frac{B.BC^2 + G.GC^2 + E.EC^2}{(B + G + E).AC}$$

Da



Da nun $BC^2 = B\beta^2 + C\beta^2$, $GC^2 = G\gamma^2 + C\gamma^2$, $EC^2 = E\varepsilon^2 + C\varepsilon^2$, so kann man auch sagen

$$CX = \frac{B.B\beta^2 + G.G\gamma^2 + E.E\varepsilon^2}{(B + G + E).AC}$$
$$+ \frac{B.C\beta^2 + G.C\gamma^2 + E.C\varepsilon^2}{(B + G + E).AC}$$

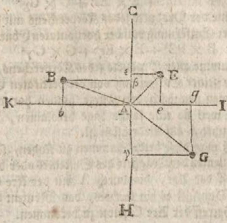
Zusatz. Wenn man sich noch oberwärts eine andere Ebne vorstellet, worin die Axe lieget, und welche auf der gemeldeten oder auf CA senkrecht ist, so sind $B\beta$, $G\gamma$, $E\varepsilon$ die Entfernungen von der einen, und $C\beta$, $C\gamma$, $C\varepsilon$ von der andern Ebne.

§. 38.

Noch besser verfährt man, wenn man sich eine Axe durch den Schwerpunkt mit der gegebenen parallel vorstellet, und den Exponenten der Trägheit in Betreff derselben suchet. Alsdann ist weiter nichts hinzuzusetzen, als das Produkt aus der ganzen Masse und dem Quadrate der Entfernung des Schwerpunktes von der gegebenen Axe (§. 29). Hier kann man nun, in Betreff der

Axe,

Axe, die durch den Schwerpunkt gehet, eben so verfahren, als in Betreff jeder andern, und anstatt jedes einzelnen Quadrates zwei andere eintauschen (§. 37).



Wir haben gesehen, daß, in Betreff der Axe C, der Exponent der Inerzie beträgt (§. 29)

$$B \times AB^2 + E \times AE^2 + G \times AG^2 + (B + G + E) . AC^2$$

Da es aber in den meisten Fällen schwer wäre, die Entfernungen AB, AE, AG unmittelbar zu bestimmen, so bedenke man, daß $AB^2 = A\beta^2 + B\beta^2$, $AE^2 = A\varepsilon^2 + E\varepsilon^2$, $AG^2 = A\gamma^2 + G\gamma^2$, alsdann ist, in Betreff der Axe, die durch A gehet, der Exponent der Trägheit

$$B \times A\beta^2 + E \times A\varepsilon^2 + G \times A\gamma^2$$
$$+ B \times B\beta^2 + E \times E\varepsilon^2 + G \times G\gamma^2$$

wozu noch kömmt $(B + E + G) . AC^2$, wenn man das Moment der Trägheit für den Punkt oder die Axe C haben will. Leget man nun in Gedanken durch den Schwerpunkt A zwei Ebnen, die eine CH, welche durch den Schwerpunkt und durch die gegebene Axe C gehet, die andere IK, welche

welche auch durch den Schwerpunkt gehet, und auf der vorigen senkrecht ist, so ist

$$B \times A\beta^2 + E \times A\varepsilon^2 + G \times A\gamma^2$$

oder $$B \times Bb^2 + E \times Ee^2 + G \times Gg^2$$

die Summe der Produkte jedes Körperchens mit dem Quadrate seiner Entfernung von der horizontalen Ebne IK, und

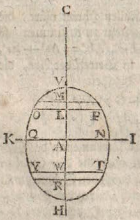
$$B \times B\beta^2 + E \times E\varepsilon^2 + G \times G\gamma^2$$

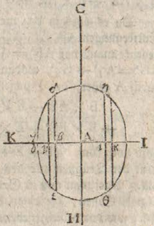
ist die Summe aller Produkte jedes Körperchens, mit dem Quadrate seiner Entfernung von der vertikalen Ebne CH. Diese Ebnen nenne ich der Kürze halben horizontal und vertikal, weil sie eine solche Lage bekommen, wenn der Schwerpunkt A am niedrigsten ist.

Weiß man diese beide Summen zu finden, so hat man den Exponenten der Trägheit des Systemes oder der Masse, in Betreff der Axe, die durch A mit der Axe C parallel gehet. Dann ist es ein leichtes, das Moment der Trägheit in Betreff der Axe C selbst zu bekommen.

§. 39.

Auf diesen Betrachtungen gründet sich eine allgemeine Methode zur Erforschung der Schwingepunkte.





Beide

Beide Figuren stellen jede den vertikalen Durchschnitt eines schwingenden Körpers vor, CH und IK sind zwei Ebnen, die man sich auf der Fläche des Papieres senkrecht vorstellen muß, die sich im Schwerpunkte A senkrecht kreuzen, und wovon die eine durch die Axe C gehet, die man sich ebenfalls auf der Fläche des Papiers senkrecht vorstellen muß.

Man zerschneide in Gedanken den Körper in lauter unendlich dünne Scheiben, wie OMP, alle mit der Ebne IK parallel. Eine solche Scheibe enthält nun eine unendliche Menge körperlicher Punkte, die alle von der Ebne IK gleich weit entfernet sind, nämlich in der Weite AL. Also ist es gleich viel, ob man jedes Pünktchen, als eine kleine Masse, mit dem Quadrate seiner Entfernung von IK multipliziret, oder ob man die Masse der ganzen Scheibe PMO mit dem Quadrate der Entfernung AL multipliziret. Es sei die Fläche PO = S (im Durchschnitte präsentiret sie sich nur wie eine Linie). Es sei $AL = x$, so ist $LM = dx$, die Scheibe PMO ist $= PO \times LM = Sdx$. Multipliziret man mit dem Quadrate der Entfernung $AL = x$,

so ist $PMO \times AL^2 = S.x^2dx$

Da aber Sdx weiter nichts, als die geometrische Größe der Scheibe PMO anzeiget, so muß man noch mit der Dichtigkeit oder spezifischen Schwere der Materie, woraus der Körper bestehet, multipliziren, um die Masse der Scheibe oder aller in ihr enthaltenen Punkte mit in die Rechnung zu bringen. Diese sei p für jede kubische Einheit des Maaßes; dann ist

$$p \times PMO \times AL^2 = pSx^2dx$$

Gesetzet nun, man nehme jedes in NPOQ enthaltene körperliche Pünktchen, und multiplizire es sowohl mit der spezifischen Schwere p als auch mit seiner Entfernung von der Ebne IK, und man addire alle Produkte, so entstehet eine gewisse Summe Z. Nimmt nun AL oder X zu um LM

LM oder $\mathrm{d}x$, so nimmt Z zu um $p.\mathrm{PMO} \times \mathrm{AL}^2$, oder um $p.S.x^2\mathrm{d}x$. Also ist $p.S.x^2\mathrm{d}x = \mathrm{dZ}$, folglich

$$Z = \int p.Sx^2.\mathrm{d}x$$

oder

$$Z = p.\int Sx^2\mathrm{d}x$$

Wenn man also S in einer Funkzion von x ausdrücket, und dann integriret, so bekömmt man Z für den Theil NPOQ des Körpers. Machet man im gefundenen Integral AL oder $x = \mathrm{AV}$, so hat man Z für den Theil NVQ des Körpers.

Eben so kann man unterhalb der Ebne IK verfahren, wenn man setzet $\mathrm{TY} = S$, $\mathrm{AW} = x$, $\mathrm{WR} = \mathrm{d}x$, dann hat man wiederum zu integriren $p\int Sx^2\mathrm{d}x$, um Z für den unteren Theil des Körpers zu finden. Beide Werthe von Z zusammen geben die Summe der Produkte der Theilchen mit den Quadraten ihrer Entfernungen für den ganzen Körper, in Betreff der Ebne IK.

Nun muß auch die nämliche Summe in Betreff der Ebne CH gefunden werden. Es werde der Körper in vertikale Scheibchen wie $\delta\nu\varepsilon$, $\eta\varkappa\theta$ zerschnitten, alle mit CH parallel. Es sei wiederum $\delta\varepsilon = S$, $A\beta = x$, $\beta\nu = \mathrm{d}x$, so wird, wie vorher bewiesen, daß in Betreff der Ebne CH,

$$Z = p\int Sx^2\mathrm{d}x$$

in welches Integral hernach $x = A\zeta$ gesetzet wird, um Z für den ganzen Theil einerseits der Ebne CH zu bekommen. Eben so wird anderseits verfahren, indem auch hier $\eta\varkappa\theta = S$, $Ai = x$, $i\varkappa = \mathrm{d}x$.

Ueberhaupt, wenn wir setzen $\mathrm{AL} = x$, $\mathrm{PO} = S$, $\mathrm{AW} = x'$, $\mathrm{TY} = S'$, $A\beta = x''$, $\delta\varepsilon = S''$, $Ai = x'''$, $\eta\theta = S'''$, so bestehet die Summe aller Produkte der Elemente, mit den Quadraten ihrer Entfernungen von der Axe, die durch A gehet, und die im Durchschnitte der Ebenen CH und IK lieget, in folgenden Integralen

$$p\int Sx^2\mathrm{d}x + p\int S'x'^2\mathrm{d}x' + p\int S''x''^2\mathrm{d}x'' + p\int S'''x'''^2\mathrm{d}x'''$$

oder

$$p[\int Sx^2\mathrm{d}x + \int S'x'^2\mathrm{d}x' + \int S''x''^2\mathrm{d}x'' + \int S'''x'''^2\mathrm{d}x''']$$

Hat

Hat man einmal diese Größe gefunden, so ist es nicht schwer, den Schwingepunkt zu finden. Es sei die geometrische Größe des Körpers $= G$, so ist pG seine Masse. Es sei e die Entfernung des Schwerpunktes von der Axe der Schwingungen, so ist pGe das Moment der Schwere, in Betreff der Axe. Wenn man nun obige Summe durch dieses leztere Moment dividiret, so bekömmt man die Entfernung des Schwingepunktes unterhalb des Schwerpunktes (§. 30). Also ist diese Entfernung

$$\frac{p[\int Sx^2 \partial x + \int S'x'^2 \partial x' + \int S''x''^2 \partial x'' + \int S'''x'''^2 \partial x''']}{p.G.e}$$

oder $$\frac{\int Sx^2 \partial x + \int S'x'^2 \partial x' + \int S''x''^2 \partial x'' + \int S'''x'''^2 \partial x'''}{G.e}$$

Die spezifische Schwere p verschwindet im Zähler und Nenner, wenn der ganze Körper oder das ganze System von einerlei Dichtigkeit ist, wird aber in anderen Fällen beibehalten (§. 36).

§. 40.

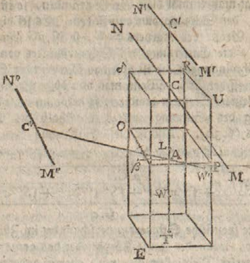
Aufgabe.

Den Schwingepunkt eines viereckigten geraden Prisma finden, welches sich um eine horizontale Axe schwinget, welche die eine Basis des Prisma in zwei gleiche Rechtecke theilet, oder um jede andere Axe, die mit einer solchen parallel ist.

Es drehe sich das gerade Prisma RE um die horizontale Axe MN, welche die obere Basis in zwei gleiche Rechtecke theilet. Es sei die Höhe $CT = h$, die Breite $R\delta = i$, die Länge $RU = k$. Der Schwerpunkt lieget in der Mitte A der Höhe CT. Es sei $AL = x$, so ist $PO = S$ (§. 39). Diese Fläche S ist hier beständig, und $= ik$. Man setze diesen Werth in

$$\int Sx^2 \partial x$$

so kömmt $\int ikx^2 \partial x$



oder $\qquad ik.\int x^2 dx$

das ist $\qquad \dfrac{ik.\,x^3}{3}$.

Und wenn $x = AC = \frac{1}{2}h$ wird, so kömmt

$$\frac{ik.\,\frac{1}{8}h^3}{3} = \frac{ik.\,h^3}{24}$$

Wir lassen p weg, weil wir annehmen, das Prisma sei von homogener Materie. Da der untere Theil des Prisma eben so beschaffen ist, wie der obere, so siehet man ohne weitere Rechnung, daß $\int S' x''dx$ eben so ausfallen wird; folglich bekommen wir noch einmal

$$\frac{ik.\,h^3}{24}$$

oder zusammen $\qquad \dfrac{ik.\,h^3}{12}$

Es sei nun ferner $A\beta$, oder ein Theil dieser Linie $= x''$, und $\delta\varepsilon$ oder ein mit dieser Fläche paralleler Durchschnitt $= S''$, so ist hier $S'' = kh$, und die Formel

$$\int S'' x''^2 \partial x''$$

wird $\int kh . x''^2 \partial x''$

oder $kh . \int x''^2 \partial x''$

das ist $\frac{kh . x''^3}{3}$

und wenn $x = \frac{1}{2} i$ wird, so hat man

$$\frac{kh . \frac{1}{8} i^3}{3}$$

oder $\frac{kh . i^3}{24}$

Da nun die rechte Seite des Prisma eben so beschaffen ist, wie die linke, so wird wiederum $\int S''' x'''^2 \partial x''' = \frac{kh . i^3}{24}$, folglich haben wir für die rechte und linke Seite

zusammen $\frac{kh . i^3}{12}$

Für den oberen und unteren Theil hatten wir

$$\frac{ik . h^3}{12}$$

Folglich in allem

$$\frac{ik . h^3 + kh . i^3}{12}$$

oder $\frac{1}{12} ikh . (h^2 + i^2)$

Da nun die Axe MN durch C gehet, so daß $AC = \frac{1}{2} h$, so muß die Größe des Prisma in $\frac{1}{2} h$ multiplizirt, und

dann die vorher gefundene Größe durch das Produkt divi-
diret werden (§. 39). Nun ist die Größe des Prisma ikh, und das besagte Produkt wird also $ikh \times \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}ikh^2$. Demnach lieget der Schwingepunkt W, so daß (§. 39)

$$AW = \frac{\frac{1}{12}ikh(h^2 + i^2)}{\frac{1}{2}ikh^2}$$

oder $$AW = \frac{1}{6}\frac{h^2 + i^2}{h}$$

oder $$AW = \frac{1}{6}h + \frac{1}{6}\frac{i^2}{h}$$

Folglich $$CW = AC + AW$$
$$= AW + \tfrac{1}{2}h$$
$$= \frac{2}{3}h + \frac{1}{6}\frac{i^2}{h}$$

Zusatz I. Man bemerke, daß in der Formel das $k = RU$ nicht zum Vorschein kömmt. Woraus man schließen muß, daß die Länge des Prisma oder seine Ausdehnung in der Richtung der Axe hier nicht in Anschlag kömmt, und daß der Schwingepunkt immer in W bleibet, so lange CT und Rδ unverändert sind es mag RU so groß oder klein angenommen werden als man will.

Zusatz II. Wenn Rδ oder i null ist, so hat man bloß
$$CW = \tfrac{2}{3}h$$
dieses geschiehet in dem Falle, wo anstatt des Prisma nur ein bloßes schweres Parallelogramm oder eine gerade schwere Linie an der Axe hänget. Also ist der Schwingepunkt eines Parallelogramms, in dessen Fläche die Axe lieget, oder einer geraden Linie, in einer Entfernung gele-
gen, die genau $\frac{2}{3}$ der ganzen Höhe oder vertikalen Länge beträgt; vorausgesetzet, daß die Axe am obersten Ende angebracht sei.

Zusatz

Zusatz III. Auch wenn die Breite RS, in Vergleich mit der Höhe CT, nur wenig beträgt, kann $\frac{i^2}{6h}$ ohne merklichen Fehler weggelassen, und angenommen werden $CW = \frac{2}{3} CT$.

Zusatz IV. Wenn die Axe nicht eben am Ende des Prisma, sondern höher oder niedriger, außerhalb oder innerhalb des Prisma ist, jedoch immer mit MN parallel, z. E. in M'N', so bleibet alles wie in der Auflösung, nur daß im Nenner ikh nicht mit $\frac{1}{2}h$, sondern mit AC' multipliziret wird. Es sei $AC' = e$, so kömmt

$$AW = \frac{\frac{1}{12} ikh\,(h^2 + i^2)}{ikh.\,e}$$

$$AW = \tfrac{1}{12}.\frac{h^2 + i^2}{e}$$

Zusatz V. Wenn auch die Axe der Schwingungen, wie M''N'' nicht in der Axe des Prisma lieget, sondern nur mit MN parallel ist, und wenn $AC'' = e$, so ist immer (§. 34)

$$AW' = \tfrac{1}{12}.\frac{h^2 + i^2}{e}$$

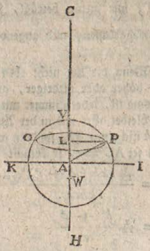
Zusatz VI. Wenn man durch W oder W' eine Axe mit MN parallel leget, so kömmt der Schwingepunkt in C, oder C', oder C'' (§. 31).

§. 41.

Aufgabe.

Den Schwingepunkt einer Kugel finden, die an einem Faden ohne Schwere hänget, oder die sich um irgend eine horizontale Axe schwinget.

(Siehe folgende Figur.)



Es sei C die Axe oder der Schwingepunkt. Es sei $AL = x$, der horizontale Durchschnitt $PO = S$, so ist S ein Zirkel, der PL zum Halbmesser hat. Es sei $1 : \pi$ das Verhältniß der Durchmessers zum Umkreise, so ist $S = PL^2\pi$. Nun ist $PL^2 = AP^2 - AL^2 = r^2 - x^2$, wenn $AP = AV = r$, folglich $S\ (= PL^2\pi) = (r^2 - x^2)\pi$. Folglich (§. 39)

$$\begin{aligned} \int S x^2 dx &= \int (r^2 - x^2)\pi . x^2 dx \\ &= \pi \int (r^2 x^2 dx - x^4 dx) \\ &= \pi \left(\tfrac{1}{3} r^2 x^3 - \tfrac{1}{5} x^5\right) \end{aligned}$$

und wenn $x = AV = r$, so kömmt

$$\begin{aligned} \int S x^2 dx &= \pi \left(\tfrac{1}{3} r^5 - \tfrac{1}{5} r^5\right) \\ &= \pi \left(\tfrac{2}{15} r^5\right) \\ &= \tfrac{2}{15} \pi r^5 \end{aligned}$$

Wegen

Wegen der vollkommenen Ebenmäßigkeit der Kugel bekommen wir den nämlichen Werth für $\int S' x'^2 dx$, für $\int S'' x''^2 dx''$, und für $\int S''' x'''^2 dx'''$, also für die ganze Kugel $\frac{8}{15}\pi r^5$

Die Solidität der Kugel ist $\frac{4}{3} r^3 \pi$. Es sei $AC = e$, so kömmt (§. 39)

$$AW = \frac{\frac{8}{15}\pi r^5}{\frac{4}{3}\pi r^3 . e}$$

$$\text{oder } AW = \frac{2}{5}\frac{r^2}{e}$$

Zusatz I. Wenn die Kugel am Ende V ihres Durchmessers angehänget wird, so ist $e = AV = r$, dann kömmt

$$AW = \frac{2}{5} r$$

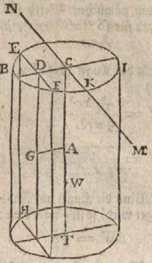
Zusatz II. Wenn eine horizontale Axe durch W geleget wird, so fällt der Schwingepunkt in C oder V, je nachdem AW für die Axe C oder V berechnet worden (§. 31).

§. 42.

Aufgabe.

Den Schwingepunkt eines geraden Zylinders finden, der sich um eine horizontale Axe drehet, welche die eine Grundfläche halbiret, oder um eine Axe, die mit der gedachten parallel ist.

Es sei MN (folg. Fig.) die horizontale Axe, $CT = h$ die Höhe des Zylinders, $CB = r$ der Halbmesser der Grundfläche. Es sei AC oder ein Theil der $AC = x$, so ist die Ebne BI, oder jeder mit ihr paralleler Durchschnitt allemal ein Zirkel, der $CB = r$ zum Halbmesser hat, und verhält sich der Durchmesser zum Umkreise wie 1 zu π,



so ist ein solcher Zirkel $= r^2 \pi = S$. Also wird hier (§. 39)

$$\int S x^2 dx = \int r^2 \pi x^2 dx$$

$$= \pi r^2 \int x^2 dx$$

$$= \frac{\pi r^2 x^3}{3}$$

und wenn $x = AC = \frac{1}{2} h$ wird, so kömmt

$$= \frac{\pi r^2 . \frac{1}{8} h^3}{3}$$

$$= \frac{\pi r^2 h^3}{24}$$

Da

Da der untere Theil des Zylinders mit dem oberen ähnlich und gleich ist, so ist $\int S' x'^2 \partial x'$ eben so groß, und beide Intregrale zusammen machen

$$\frac{\pi r^2 h^3}{12}$$

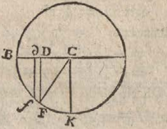
Nun sei FH ein vertikaler Durchschnitt des Zylinders, mit der Axe MN der Schwingungen parallel, und in der Entfernung $AG = CD = x''$ vor der Axe CT des Zylinders. Da $CD = x''$, so ist vermöge der Natur des Zirkels $DF \sqrt{(r^2 - x''^2)}$ daher $FE (= 2FD) = 2\sqrt{(r^2 - x''^2)}$ und da die $EH = CT = h$, so ist das Parallelogramm $FH = 2h \sqrt{(r^2 - x''^2)} = S''$. Folglich

$$\int S'' x''^2 \partial x'' = \int 2h x''^2 \partial x'' \sqrt{(r^2 - x''^2)}$$
$$= 2h \int x''^2 \partial x'' \sqrt{(r^2 - x''^2)}$$

Es sei um der Bequemlichkeit willen $x'' = y$, so haben wir zu integriren

$$2h \int y^2 \partial y \sqrt{(r^2 - y^2)}$$
oder $$2h \int y^2 \partial y \, (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Das Mittel, um den Ausdruck $y^2 \partial y \, (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$ zu integriren, fällt nicht sogleich in die Augen. Indessen wird man leicht einsehen, daß $\partial y \, (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$ oder $\partial y \sqrt{(r^2 - y^2)}$ das Differenzial des Zirkelstückes CDFK ist. Um mehrerer Deutlichkeit willen, zeichne ich hier den Zirkel besonders ab.



Wenn $CB = CK = CF = r$, und $CD = y$, so ist $DF = \sqrt{(r^2 - y^2)}$, und wenn $Dd = \partial y$, so ist das unendlich kleine Parallelogramm $Df = \partial y \sqrt{(r^2 - y^2)}$, folglich $\int \partial y \sqrt{(r^2 - y^2)} = CDFK$.

Nun laßt uns versuchen, das unbekannte Integral auf das bekannte zurückzuführen. Es sei

$$\int y^2 \partial y \, (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = Ay(r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} + Q \int \partial y (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Man differenzire beiderseits, so kömmt

$$y^2 \partial y (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = A \partial y (r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} - 3Ay^2 (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \partial y$$
$$+ Q \partial y (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Man dividire alles durch $\partial y \, (r^2 - {}^2)^{\frac{1}{2}}$, so kömmt

$$y^2 = A(r^2 - y^2) - 3Ay^2 + Q$$
$$y^2 = Ar^2 - Ay^2 - 3Ay^2 + Q$$
$$y^2 = Ar^2 - 4Ay^2 + Q$$
$$1 . y^2 + 0 = -4Ay^2 + (Ar^2 + Q)$$

Soll nun diese Gleichung, wie vorausgesetzet worden, identisch seyn, so muß seyn

$$1 = -4A$$
$$0 = Ar^2 + Q$$

Aus der ersten erhält man

$$A = -\tfrac{1}{4}$$

und wenn man diesen Werth in die zweite setzet, so hat man

$$0 = -\tfrac{1}{4} r^2 + Q$$
$$\text{oder } Q = \tfrac{1}{4} r^2$$

Also bekömmt man

$$\int y^2 \partial y (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{4} y (r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{4} r^2 \int \partial y (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= -\tfrac{1}{4} y (r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{4} r^2 \, DK$$

wo wir unter DK die Fläche $CDFKC$ verstehen, und

$$2h \int y^2 \partial y (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2} hy (r^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2} hr^2 \, DK$$

Wenn

Wenn nun y zunimmt, bis daß $y = CB = r$, so verschwindet $r^2 - y^2$ sammt dem Satze worin es als Factor ist. Hingegen wird der Raum DK zum Viertelzirkel $CKB = \frac{1}{4} r^2\pi$. In diesem Falle hat man

$$2hfy^2 \, \mathrm{d}y \, (r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} hr^2 \times \tfrac{1}{4} r^2 \pi$$
$$= \tfrac{1}{8} \pi h r^4$$

und da die linke Seite des Zylinders eben so beschaffen ist wie die Rechte, so bekömmt man für diese beide Seiten

$$\tfrac{1}{4} \pi h r^4$$

Für den untern und obern Theil haben wir gefunden, $\frac{1}{12} \pi r^2 h^3$, also bekommen wir für den ganzen Zylinder

$$\tfrac{1}{12} \pi r^2 h^3 + \tfrac{1}{4} \pi h r^4$$

Der Inhalt des Zylinders ist $r^2 \pi h$. Da nun die Entfernung AC der Axe vom Schwerpunkte $= \frac{1}{2} h$, so ist $G.e$ (§. 39) $= \pi r^2 h \times \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} \pi r^2 h^2$. Folglich ist

$$AW = \frac{\frac{1}{12} \pi r^2 h^3 + \frac{1}{4} \pi h r^4}{\frac{1}{2} \pi r^2 h^2}$$

$$= \frac{\pi r^2 h^3 + 3 \pi h r^4}{6 \pi r^2 h^2}$$

$$= \frac{h^2 + 3 r^2}{6h}$$

$$= \tfrac{1}{6} h + \tfrac{1}{2} \frac{r^2}{h}$$

folglich $CW = \frac{2}{3} h + \frac{1}{2} \frac{r^2}{h}$

Zusatz I. Wenn man durch W eine Axe mit MN parallel leget, und den Zylinder daran schwingen läßt, so ist der Schwingepunkt in C, und die Schwingungen sind mit denen um die Axe MN herum gleichzeitig (§. 31).

Zusatz II.

Zusatz II. Wenn der Zylinder sehr dünn ist, so beträgt $\frac{1}{2}\frac{r^2}{h}$ sehr wenig, und es ist beinahe $AW = \frac{1}{6}h$, oder $CW = \frac{2}{3}h$, wie bei dem sehr dünnen Prisma (§. 40, Zusatz III).

Zusatz III. Wenn anstatt der Axe MN eine andere mit derselben parallel genommen wird, in einer Entfernung $= e$ vom Schwerpunkte A, so ist (§. 39)

$$AW = \frac{\frac{1}{12}\pi r^2 h^3 + \frac{1}{4}\pi h r^4}{\pi r^2 h . e}$$

$$= \frac{\pi r^2 h^3 + 3 \pi h r^4}{12 \pi r^2 h e}$$

$$= \frac{h^2 + 3 r^2}{12 e}$$

§. 43.

Aufgabe.

Den Schwingepunkt eines Pendels finden, welches aus einer Kugel bestehet, die an einem viereckigten prismatischen Stabe hänget, vorausgesetzet, daß die horizontale Axe der Schwingungen die obere Basis des Prisma in zwei gleiche Parallelogramme theilet.

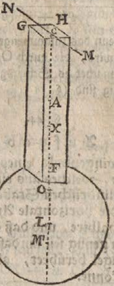
Es sei MN die Axe der Schwingungen, $CF = h$ die Höhe des Prisma, $HG = i$ die Breite, A der Schwerpunkt des Prisma, X sein Schwingepunkt, $FL = r$ der Halbmesser der Kugel, L ihr Schwerpunkt, M′ ihr Schwingepunkt, so ist

$$CA = \frac{1}{2}h$$

$$CX = \frac{2}{3}h + \frac{1}{6}\frac{i^2}{h} \text{ (§. 40)}$$

$$CL = h + r$$

Ferner



Ferner ist (§. 41) $LM' = \frac{2}{5}\frac{r^2}{CL} = \frac{2}{5}\frac{r^2}{h+r}$. Also

$$CM' = CL + LM' = h + r + \frac{2r^2}{5\,(h+r)}$$

Es sei nun O der gemeinsame Schwingepunkt des Prisma und der Kugel, so ist (§. 36)

$$CO = \frac{CA \times CX + n.CL \times CM'}{CA + n.CL}$$

wo n anzeiget, wie vielmal die Kugel schwerer ist, als das Prisma. Im gegenwärtigen Falle wird demnach

$$CO = \frac{\frac{1}{2}h.\left(\frac{2}{3}h + \frac{1}{6}\frac{i^2}{h}\right) + n.(h+r)\left(h + r + \frac{2}{5}\frac{r^2}{h+r}\right)}{\frac{1}{2}h + n.\,(h + r)}$$

oder

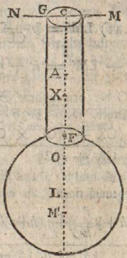
oder $CO = \frac{\frac{1}{3}h^2 + \frac{1}{12} i^2 + n(h+r)^2 + \frac{2}{5} nr^2}{\frac{1}{2}h + n(h+r)}$

Zusatz. Wenn das zusammengesetzte Pendel an einer Axe aufgehänget wird, die durch O gehet, und mit MN parallel ist, so machet es Schwingungen, die mit dem vorigen gleichzeitig sind (§. 31).

§. 44.

Aufgabe.

Den Schwingepunkt eines zusammengesetzten Pendels finden, welches aus einer Kugel bestehet, die an einem zylindrischen Stabe hänget, vorausgesetzet, daß die horizontale Axe die obere Basis des Zylinders halbire, und daß der Halbmesser des Zylinders klein genug sei, um daß seine untere Basis, welche die Kugel berühret, als eine Ebne angesehen werden könne.



Es sei MN die Axe der Schwingungen, CF $= h$ die Höhe des Zylinders, CG $= a$ der Halbmesser seiner Grundfläche, A sein Schwerpunkt, X sein Schwingepunkt für die Axe MN, L der Mittelpunkt und Schwerpunkt der Kugel, LF $= r$ ihr Halbmesser, M' ihr Schwingepunkt für die Axe MN, O der verlangte Schwingepunkt des ganzen zusammengesetzten Pendels, so ist

$$CA = \tfrac{1}{2} h$$

$$CX = \tfrac{2}{3} h + \tfrac{1}{2} \frac{a^2}{h} \text{ (§. 42)}$$

$$CL = h + r$$

$$CM' = h + r + \tfrac{2}{5} \frac{r^2}{h + r} \text{ wie bei §. 43.}$$

Da nun O der gemeinsame Schwingepunkt des Zylinders und der Kugel sein soll, so ist (§. 36)

$$CO = \frac{CA \times CX + n.\ CL \times CM'}{CA + n.\ CL}$$

wo n die Zahl ist welche andeutet, wie vielmal die Kugel schwerer ist, als der Zylinder. Im gegenwärtigen Falle ist demnach

$$CO = \frac{\tfrac{1}{2} h \left(\tfrac{2}{3} h + \tfrac{1}{2} \frac{a^2}{h}\right) + n (h + r)\left(h + r + \tfrac{2}{5} \frac{r^2}{h + r}\right)}{\tfrac{1}{2} h + n\ (h + r)}$$

$$\text{oder } CO = \frac{\tfrac{1}{3} h^2 + \tfrac{1}{4} a^2 + n\ (h + r)^2 + \tfrac{2}{5} nr^2}{\tfrac{1}{2} h + n\ (h + r)}$$

Zusatz I. Wenn man das ganze zusammengesetzte Pendel in O an einer mit MN parallelen Axe aufhänget, so ist der Schwingepunkt in C, und die Schwingungen werden mit denen g eichzeitig, die da entstehen, wenn das Pendel in C angehänget ist (§. 31).

Zusatz II. Wenn das Zylinder sehr wenig Dicke hat, und nur z. E. in einem dünnen Faden bestehet, so kann allenfalls $\frac{1}{4}a^2$ weggelassen werden. Und wenn man ebenfalls $\frac{1}{12}i^2$ in der Formel des §. 43 wegläßt, für den Fall, wo das Prisma wenig Breite hat, so werden beide Formeln einerlei, woraus man siehet, daß kein merklicher Unterschied Statt findet, es mag der sehr dünne Stab rund oder viereckigt sein.

§. 45.

Aufgabe.

Die Länge des einfachen Sekunden-Pendels bestimmen, auf eine genauere Art, als oben (§. 6.) geschehen ist.

Die angeführte Auflösung war nur beiläufig, obgleich schon ziemlich richtig. Hier ist eine noch genauere.

I) Man nehme eine Kugel von Blei oder einer andern Materie, die eine beträchtliche spezifische Schwere habe, befestige daran entweder einen bloßen Faden, oder eine dünne metallene, runde oder viereckigte Stange, und hänge das Pendel am obersten Ende des Fadens oder der Stange auf. Die Länge des Fadens und die Größe der Kugel sind willkührlich, jedoch ist es gut, daß beide nicht zu klein seien, z. E. der Faden oder die Stange könnte 3 bis 4 Fuß lang sein, und die Kugel $\frac{1}{2}$ Zoll oder mehr im Durchmesser haben. Bei dem Aufhängen muß man so viel als möglich trachten, die Reibung bei der Axe oder dem Aufhängepunkt zu vermeiden.

II) Da die Rechnungen für den leeren Raum eingerichtet sind, so lasse man sich eine hohe Glocke verfertigen, um das Pendel darunter schwingen zu lassen. Es kann entweder ein besonderes Gestelle unter der Glocke haben, oder auch oben an dem Gewölbe der Glocke hängen. Man setze das Apparat auf die Luftpumpe, und mache die Glocke so luftleer als möglich ist.

III) Man

III) Man bringe das Pendel in Bewegung, entweder, indem man die Luftpumpe etwas umkippet, oder vermittelst einer Vorrichtung, dergleichen man bei verschiedenen Experimenten hat, um von außen unter der Glocke irgend eine Bewegung zu verursachen. Man sorge aber dafür, daß die Schwingungen nur in kleinen Bögen geschehen.

IV) Man zähle die Schwingungen während einiger Zeit, z. E. einer Viertelstunde ohngefähr. Um diese Zeit genau zu bestimmen, ist es am besten, daß man den Versuch des Nachts mache, und einen Astronomen zur Hülfe nehme, welcher den Durchgang zweier merklicher Sterne durch den Meridian beobachte. Daraus läßt sich die verflossene Sternzeit berechnen, und aus dieser die mittlere Sonnenzeit. Diese Zeit berechne man in Sekunden.

V) Man suche, vermöge der gegebenen Formeln (§. 43 und §. 44), den Schwingepunkt des gebrauchten Pendels, oder die Länge des einfachen Pendels, dessen Schwingungen von der nämlichen Dauer, als die beobachteten sein würden. Hierbei wird eine genaue Ausmessung der Kugel und des Stabes oder Fadens vorausgesetzet, wie auch eine genaue Abwägung des einen und des andern, so daß man sagen könne, die Kugel ist so vielmal schwerer, als der Stab oder Faden.

VI) Wenn die Länge des einfachen Pendels gefunden worden, so sage man (§. 6):

Wie die Quadratzahl der verflossenen Sekunden sich verhält zur Quadratzahl der gezählten Schwingungen, so verhält sich die berechnete Länge zur verlangten Länge des einfachen Sekunden-Pendels.

Anmerkung I. Um sich vor allem Irrthume zu sichern, kann man den Versuch mehrmal mit verändertem Pendel und veränderter Zeit wiederholen, und dann, wenn ein geringer Unterschied gefunden wird, das Mittel zwischen den herausgebrachten Längen nehmen, indem man sie alle addiret, und durch die Anzahl der Versuche dividiret.

Anmerkung II. Da die Fallkraft etwas abnimmt, je näher man dem Aequator kömmt, so wird in südlichern Ländern das einfache Sekunden-Pendel etwas kürzer ausfallen, als in nördlichern (§. 9). Wenn aber zwei Beobachter in der nämlichen geographischen Breite den Versuch machen, so wird der etwanige Unterschied nur ganz unbeträchtlich sein, indem er fast nur von der etwas höhern oder niedrigern Lage der Oerter, oder von der mehrern oder wenigern Genauigkeit des Versuches herrühren kann.

§. 46.

Aufgabe.

Ein allgemeines Maaß bestimmen.

Man bestimme aufs allergenaueste die Länge des einfachen Sekunden-Pendels (§. 45) für einen gewissen Grad der geographischen Breite, z. E. für den 45sten Grad. Diese Länge theile man in 3 gleiche Theile, und nenne einen solchen Theil den neuen Fuß, oder den mathematischen Fuß, oder den Stunden-Fuß. Ein solcher Fuß wird etwas mehr ausmachen, als die gebräuchlichen Fußmaaße, und es wird ihn jedes Volk entweder bei sich einführen, oder wenigstens seine Längenmaaße genau damit vergleichen können. Auch wird ein jedes Volk, das nicht zu weit von 45sten Grad wohnet, allemal den neuen Fuß erhalten oder berichtigen können. Diejenigen welche zu weit vom 45sten Grade der Breite wohnen, müssen Abgeordnete dahin senden, oder ihr Fußmaaß nach demjenigen anderer Völker einrichten, die in der gedachten Breite wohnen. Auch giebt es mathematische Rechnungen, wo-

durch

durch die Länge des Sekunden-Pendels für den 45sten Grad der Breite gefunden werden kann, wenn man solche Länge nur für irgend einen andern Grad bestimmet hat.

Zusatz I. Wenn der mathematische Fuß einmal eingeführet wäre, so ließen sich auch leicht mathematische Gewichte erfinden. Man dürfte nur das Gewicht eines mathematischen Kubikfußes Regenwassers bei einer gewissen Temperatur der Luft, z. B. 10 Grad Reaumürisch, einen mathematischen Zentner, oder wie man wollte, nennen, und dann gewisse Unter-Abtheilungen davon machen, z. E. den Zentner in 100 Pfund theilen.

Zusatz II. Vermittelst des allgemeinen und mathematischen Gewichtes ließe sich auch das Gehalt der Münzen in Golde, Silber oder Kupfer genauer, als zu geschehen pfleget, und dadurch ihr innerer Werth bestimmen. Denn, den inneren Werth einer Münze angeben, heißt weiter nichts, als ansagen, wie viel Gold oder Silber oder Kupfer darin enthalten ist. Vielleicht könnten auch mehrere Völker sich entschließen, einerlei Münzarten nach dem mathematischen Gewichte prägen zu lassen.

Zusatz III. Es ist kaum nöthig, anzumerken, daß durch die Einförmigkeit des mathematischen Fußes auch Einförmigkeit in den hohlen Maaßen für körnigte und flüssige Sachen entstehen würde.

Anmerkung I. Der vornehmste Nutzen einer solchen Einförmigkeit bestehet darin, daß dadurch mühsame Vergleichungen und Berechnungen, Irrthümer, Mißverständnisse, und Betrug vermieden würden.

Anmerkung II. Da hier alles auf die Länge des Sekunden-Pendels ankömmt, so ist noch die Frage aufzuwerfen, ob diese auch unter derselbigen geographischen Breite wirklich unveränderlich ist, oder ob nicht die Wirkung der Fallkraft selbst der Veränderung unterworfen ist.

Die Möglichkeit davon kann nicht geläugnet werden. Jedoch hat man bis jetzt keine Ursache, zu vermuthen, daß eine solche Veränderung, wenigstens eine merkliche, geschehen sei, oder geschehen werde. Wenn einmal ein mathematisches Maaß allgemein eingeführet wäre, so würde sichs mit der Zeit ausweisen, ob eine solche Veränderung Statt findet, oder nicht. Unterdessen, da wir kein anderes so sicheres Mittel haben, so erfordert die Klugheit, es zu gebrauchen, und die Behutsamkeit nicht gar zu weit zu treiben.

Wenn ja eine Veränderung in der Fallkraft Statt findet, so rühret sie vermuthlich von der anziehenden Kraft der Himmelskörper, und hauptsächlich der Sonne und des Mondes her, indem diese beiden ganz merklich auf das Meer wirken, und Ebbe und Fluth verursachen. Jedoch hat man bisher nicht gefunden daß der Einfluß dieser Körper auf die Länge des Pendels merklich sei. Und wäre dieses auch, so ließen sich ja die Zeiten zu den Versuchen so wählen, daß sie in dieser Rücksicht beinahe unter den nämlichen Umständen geschehen könnten. Aber, wie gesagt, man muß die Genauigkeit hierbei nicht weiter treiben, als es für menschliche Bedürfnisse nöthig ist, sonst müßte man zuletzt bei dem geringsten Versuche mit einem schwingenden Stücke Blei, Sonne, Mond und Sterne, und überhaupt das ganze System aller existirenden Körper in Betrachtung ziehen.

§. 47.

Folgende Sätze sind die vornehmsten und nothwendigsten von denen, die im gegenwärtigen Hauptstücke bewiesen worden.

Wenn ein einfaches Pendel seine Schwingungen in kleinen Zirkelbögen verrichtet, sie mögen gleich oder ungleich sein, so können solche Schwingungen alle für gleichzeitig gehalten werden. Und da jedes zusammengesetzte

Pendel seine Schwingungen eben so machet, wie ein gewisses einfaches, welches sich allemal bestimmen läßt, so sind auch die Schwingungen jedes zusammengesetzten Pendels um eine unbewegte Axe, für gleichzeitig anzusehen, wenn das Pendel nur kleine Bögen beschreibet.

Bei einfachen Pendeln verhalten sich die Quadratzahlen der Dauern der Schwingungen, wie die Längen der Pendel, oder, welches einerlei ist, die Dauern verhalten sich, wie die Quadratwurzeln der Längen.

Hingegen in gleichen Zeiten verhalten sich die Anzahlen der Schwingungen umgekehret, wie die Quadratwurzeln der Pendel-Längen.

Wenn man demnach ein einfaches Pendel hat, welches in einer Viertelstunde eine gewisse Anzahl von Schwingungen macht, so läßt sich die Länge des Sekunden-Pendels finden, das heißt, desjenigen Pendels, welches in einer Viertelstunde 900 Schwingungen macht. Diese Länge beträgt für Paris 3 Fuß $8\frac{57}{100}$ Linien, Pariser Maaß, oder 3 Fuß 2 Zoll Rheinländisch Maaß.

Wenn an zwei Orten die Wirkungen der Fallkraft verschieden ist, so müssen sich die Pendel-Längen wie die Fallkräfte selbst verhalten, wenn die Pendeln gleichzeitige Schwingungen machen sollen. Hieraus kann das Verhältniß der Fallkraft in verschiedenen Höhen, und in verschiedenen Orten gefunden werden.

Wenn ein einfaches Pendel eine Zykloide beschreibet, so sind die Schwingungen, nicht mehr ohngefähr, sondern vollkommen gleichzeitig, sie mögen groß oder klein sein.

Wie sich der Umkreis eines Zirkels zu seinem Durchmesser verhält, so verhält sich die Dauer jeder Schwingung in der Zykloide zur Zeit des Falles längs der Axe. Oder, da es bei kleinen Schwingungen fast einerlei ist, ob der beschriebene Bogen zu einer Zykloide oder zu einem Zirkel gehöre, so verhält sich überhaupt bei einem einfachen Pendel die Dauer jeder Schwingung zur Zeit des Falles längs der halben Pendel-Länge, wie der Umkreis zum Durchmesser.

Wenn man die Länge des Sekunden-Pendels gefunden hat, so läßt sich demnach die Zeit finden, während welcher ein fallender Körper einen Weg durchläuft, der die halbe Länge des Pendels hat. Und, weil sich bei fallenden Körpern die Wege verhalten, wie die Quadratzahlen der Zeiten, so läßt sich ferner die Höhe des Falles für eine ganze Sekunde finden. Sie beträgt nach dieser Rechnungsart $15\frac{6268}{100000}$ Rheinländische Fuß.

Bei einem zusammengesetzten Pendel wird die Länge des gleichzeitigen einfachen gefunden, wenn man die Masse jedes Theilchens mit dem Quadrate seiner kürzesten Entfernung von der Axe multipliziret, und alle Produkte addiret, wenn man ferner die Summe aller Massen mit der kürzesten Entfernung des gemeinsamen Schwerpunktes von der Axe multipliziret, und wenn man jene Summe von Produkten durch dieses leztere Produkt dividiret. Jene Summe von Produkten ist der Exponent der Trägheit der ganzen Masse des zusammegesetzten Pendels, und das leztere Produkt ist das Moment der Schwere in Betreff der Axe. Also wird, um kurz zu reden, der Exponent der Trägheit in Betreff der gegebenen Axe, durch das Moment der Schwere in Betreff derselbigen, dividiret.

Wenn man den Exponenten der Trägheit für eine Axe hat, die durch den Schwerpunkt gehet, so bekömmt man ihn leicht für jede andere Axe, welche mit dieser parallel ist; man darf nur noch hinzusetzen, das Produkt aus der ganzen Masse des zusammengesetzten Pendels, und dem Quadrate der Entfernung des Schwerpunktes von der gegebenen Axe.

Will man die Lage des Schwingepunktes, vermöge seiner Entfernung vom Schwerpunkte, bestimmen, so stellet man sich eine Axe vor, die durch den Schwerpunkt gehet, und mit der gegebenen parallel ist; und man dividiret den

den Exponenten der Trägheit in Betreff dieser eingebildeten Axe, durch das Moment der Schwere in Betreff der wirklichen Axe.

Wenn der Schwinge-Punkt und der Aufhänge-Punkt vertauschet werden, so bleiben die Schwingungen von einerlei Dauer.

Wenn man den aufgehängten Körper um eine Axe drehet, die durch den Schwerpunkt gehet, und mit der gegebenen parallel ist, ohne die Entfernung der wahren und eingebildeten Axe zu verändern, oder auch, wenn man die wirkliche Axe um die eingebildete herumdrehet, ohne ihre Entfernung zu verändern, so bleiben die Schwingungen, wie vorher.

Bei einem und demselbigen Körper, wenn man zwei oder mehrere Axen versuchet, die mit einer gewissen durch den Schwerpunkt gehenden parallel sind, so verhalten sich die Entfernungen der Schwingepunkte vom Schwerpunkte umgekehret, wie die Entfernungen der Axen vom Schwerpunkte.

Wenn ein zusammengesetztes Pendel aus zwei verschiedenen Körpern bestehet, und wenn die gerade Linie, welche durch beide Schwerpunkte gehet, zugleich die Axe der Schwingungen trift, und auf dieselbe senkrecht ist; so wird der gemeinsame Schwingepunkt folgender Weise gefunden. Man multipliziret die Masse jedes Körpers, sowohl mit der Entfernung seines Schwerpunktes, als auch mit der Entfernung seines besondern Schwingepunktes von der Axe der Schwingungen. Man addiret beide Produkte. Die Summe dividiret man durch die Summe der Schweren-Momente beider Körper, in Betreff der gegebenen Axe. Wenn beide Körper von einerlei Materie sind, so fallen die Massen bei der Rechnung weg, und anstatt der Momente der Schweren, werden nur bloß die Entfernungen der Schwerpunkte von der Axe der Schwingungen genommen.

Wenn ein viereckigtes Prisma sich um eine Axe schwinget, welche eine seiner Grundflächen in zwei gleiche Parallelogramme theilet, so beträgt die Entfernung des Schwingepunktes unterhalb des Schwerpunktes den sechsten Theil der Höhe, nebst noch dem sechsten Theile der dritten Proporzional-Linie zur Höhe und zur Breite (welche auf der Axe senkrecht genommen wird); oder die Entfernung vom Schwingepunkte bis zur Axe der Schwingungen beträgt zwei Drittheile der Höhe, nebst dem gemeldeten Theile. Für jede andere Axe, die mit der gedachten parallel ist, wird die Entfernung zwischen Schwerpunkt und Schwingepunkt gefunden, wenn man zum Quadrate der Höhe das Quadrat der Breite addiret, durch die Entfernung der gegebenen Axe vom Schwerpunkte dividiret, und zuletzt noch durch 12 dividiret.

Wenn sich eine Kugel an einem Faden ohne Schwere schwinget, so wird die Entfernung des Schwingepunktes unterhalb des Schwerpunktes gefunden, wenn man nimmt zwei Fünftheile der dritten Proporzional-Linie zur Entfernung des Schwerpunktes von der Axe, und zum Halbmesser der Kugel. Und wenn die Kugel an ihrer Oberfläche angehänget ist, so lieget der Schwingepunkt um zwei Fünftel des Halbmessers niedriger, als der Mittelpunkt oder Schwerpunkt.

Wenn ein gerader Zylinder sich um eine Axe schwinget, welche die eine Basis halbiret, so beträgt die Entfernung des Schwingepunktes unterhalb des Schwerpunktes den sechsten Theil der Höhe, nebst der Hälfte der dritten Proporzional-Linie zur Höhe und zum Halbmesser der Grundfläche. Oder die ganze Länge des zustimmenden einfachen Pendels beträgt zwei Drittheil der Höhe, nebst dem gedachten Theile. Für jede andere Axe, die mit der gedachten parallel ist, beträgt die Entfernung vom Schwerpunkte zum Schwingepunkte so viel als herauskömmt, wenn man zum Quadrate der Höhe das dreifache Quadrat

des

des Halbmessers addiret, und die Summe durch die zwölffache Entfernung des Schwerpunktes von der gegebenen Axe dividiret.

Wenn eine Kugel an einem viereckigten prismatischen, oder an einem zylindrischen Stabe, oder an einem Faden hänget, so kann man in jedem einzelnen Falle die Schwingepunkte der Kugel und des Stabes oder Fadens suchen, beide Körper genau abwägen, und dann nach der kurz vorher gegebenen Vorschrift (S. 279) verfahren. Oder man kann auch die allgemeinen Formeln gebrauchen, welche in den letzten Paragraphen dieses Hauptstückes gegeben worden.

Wenn die Länge des einfachen Sekunden-Pendels mit der größten Genauigkeit bestimmet werden soll, so muß man ein zusammengesetztes Pendel im leeren Raume schwingen lassen, die Länge des zustimmenden einfachen Pendels berechnen, und dann die Rechnung so fortsetzen, wie schon vorher (S. 277) erinnert worden.

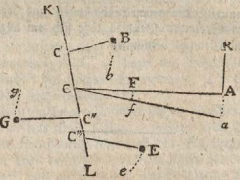
Vermittelst der genau beobachteten und berechneten Länge des Sekunden-Pendels läßt sich ein allgemeines Maaß und Gewicht bestimmen.

Sechstes Hauptstück.

Von der drehenden Bewegung.

§. 1.

Es sei, wie im vorigen Hauptstücke §. 26, KL *eine* unbewegte Axe. Es seien die kleinen Körper B, G, E ohne Schwere, und mit der Axe KL auf irgend eine Art fest verbunden. Es sei AC *eine steife Linie*, senkrecht auf



KL, und mit derselben fest verbunden, und es wirke eine Kraft R auf einem Punkt A der AC. Ist die Richtung der Kraft auf die Ebne senkrecht, worin KL und AC liegen, so verstehen wir unter R die volle und absolute Kraft; ist dieses nicht, so läßt sie sich so zerlegen, daß ein Theil

derſel-

derselben auf die gedachte Ebne senkrecht sei, und dann verstehen wir unter R diesen Theil. Sind mehrere Kräfte vorhanden, die auf das System wirken, so verstehen wir unter R die aus ihnen allen zusammengesetzte, oder, wenn diese nicht auf die gemeldete Ebne senkrecht ist, denjenigen Theil derselben, welcher senkrecht ist.

Um sich die kleinen Massen B, E, G desto leichter ohne Schwere vorstellen zu können, so stelle man in Gedanken die Axe KL vertikal auf, und lege ihre beiden Enden in kleinen festen Ringen oder in kleinen Aushöhlungen fester Körper, so daß die Axe sich drehen könne, ohne umzufallen. Hierbei muß man jedoch in Gedanken alle Reibung wegnehmen. Alsdann kann die Schwere keine Bewegung mehr verursachen, und es geschiehet alles, als wenn die Massen B, E, G ohne Schwere wären.

Ob gleich sie aber ohne Schwere sind, so haben sie doch eine Trägheit oder Inerzie, vermöge welcher sie jeder Veränderung ihres Zustandes der Ruhe oder der Bewegung widerstehen, und diese Trägheit verhält sich allemal wie die Massen selbst, folglich auch wie die Schweren (wenn diese vorhanden wären).

Man erinnere sich überhaupt, was im zweiten Hauptstücke §. 4 von der Trägheit, und im fünften §. 21 bis §. 26 von solchem Systeme ohne Schwere gesaget worden. Ich wiederhole es hier nur kürzlich, um dem Leser die Lage der Sache vor Augen zu legen.

§. 2.

In den angeführten Umständen ist bewiesen worden (H. V, §. 26), daß das System sich eben so beweget, als wenn in A, wo die Kraft wirket, eine einzige Masse vorhanden wäre, deren Größe folgender Weise ausgedrücket wird

$$\frac{B \times C'B^2 + G \times C''G^2 + E \times C'''E^2}{AC^2}$$

das

das heißt, der Bogen, welchen der Punkt A, oder die kleine Masse B, oder eine andere, oder jeder beliebige Punkt des Systemes während einer gewissen Zeit beschreibet, hat eben so viel Grade, als der Bogen, den der Punkt A oder die Linie AC beschreiben würde, wenn alle Körper des Systemes weggenommen, und in A eine solche Masse, wie der angeführte algebraische Ausdruck vorstellet, angebracht würde.

Wenn also eine solche Masse in A gedacht wird, worauf die Kraft R wirket, so wird diese Masse in der Einheit der Zeit einen Bogen Aa oder einen Winkel ACa beschreiben, von eben so viel Graden, als die Bögen Bb, Ee, Gg, welche die einzelnen Körper wirklich beschreiben, wenn in A nichts ist, und die Kraft R bloß auf die gerade AC wirket.

§. 3.

Gesetzt nun, es befinde sich in A solche Masse, wie erwähnet worden, so wird sie, vermöge der Kraft R, in der Einheit der Zeit den Weg Aa durchlaufen, der ihre Geschwindigkeit sein wird (Stat. Hauptst. II, §. 22), und, ob gleich diese Aa ein Zirkelbogen ist, so ist er doch weder länger noch kürzer, als die gerade Linie sein würde, welche die angenommene Masse in der Einheit der Zeit durchlaufen würde, wenn sie frei wäre (Hauptst. IV, §. 12). Da nun die Geschwindigkeit erhalten wird, wenn man die Kraft durch die Masse theilet (Stat. H. II, §. 32), so ist

$$\mathrm{A}a = \mathrm{R} : \frac{\mathrm{B} \times \mathrm{C'B}^2 + \mathrm{G} \times \mathrm{C''G}^2 + \mathrm{E} \times \mathrm{C'''E}^2}{\mathrm{AC}^2}$$

oder $$\mathrm{A}a = \frac{\mathrm{R} \times \mathrm{AC}^2}{\mathrm{B} \times \mathrm{C'B}^2 + \mathrm{G} \times \mathrm{C''G}^2 + \mathrm{E} \times \mathrm{C'''E}^2}$$

§. 4.

Es sei CF die Einheit, nach welcher alle Linien im Systeme gemessen werden, so beschreibet der Punkt F den Zirkel-

Zirkelbogen Ff, unterdessen, daß der Punkt A den ähnlichen Bogen Aa durchläuft. Dieser Bogen Ff ist bequemer, als jeder andere, um die Winkelgeschwindigkeit FCf oder ACa zu bestimmen, indem man Tafeln hat, worin, wenn der Halbmesser $= 1$ angenommen wird, der Winkel gefunden werden kann, der durch einen Bogen von jeder Länge bestimmet wird; und die Mathematiker bringen oft lieber einen solchen Bogen als den Winkel selbst in die Rechnung. So wollen wir es auch thun. Der Bogen Ff mag φ genannt werden, und er heiße die Winkelgeschwindigkeit des Systemes.

Da Aa schon bestimmet ist, so ist es leicht, auch Ff oder φ zu bestimmen. Nämlich es ist

$$AC : FC :: Aa : Ff$$

daher $$Ff = \frac{FC \times Aa}{AC}$$

oder, da $Ff = \varphi$, und $FC = 1$, so ist

$$\varphi = \frac{Aa}{AC}$$

$$\text{oder } \varphi = \frac{R \times AC^2}{B \times C'B'^2 + G \times C''G'^2 + E \times C'''E'^2} : AC$$

$$\text{oder } \varphi = \frac{R \times AC}{B \times C'B'^2 + G \times C''G'^2 + E \times C'''E'^2}$$

§. 5.

Lehrsatz.

Die Winkel-Geschwindigkeit eines Systemes oder Körpers ohne Schwere, welcher durch den Stoß einer Kraft um eine unbewegte Axe gedrehet wird, wird gefunden, wenn man das Moment der Kraft, in Betreff der Axe, durch den Exponenten

der

der Inerzie des Systemes oder des Körpers, in Betreff der nämlichen Axe, dividiret.

Dieser Lehrsatz gilt zugleich von einem Systeme verschiedener kleiner Körper, und auch von einem Körper, der eine merkliche Größe hat, weil dieser als ein System von unendlich kleinen Massen betrachtet werden kann. Der Lehrsatz enthält weiter nichts, als die letzte Gleichung des vorhergehenden Paragraphs. Denn der Zähler $R \times AC$ ist das Produkt aus der Kraft und ihrer senkrechten Entfernung von der Axe, also das Moment der Kraft in Betreff der Axe. Der Nenner $B \times C'B^2 + G \times C''G^2 + E \times C'''E^2$ ist die Summe aller Produkte jedes Körperchens mit dem Quadrate seiner senkrechten Entfernung von der Axe, und eine solche Summe haben wir den Exponent der Inerzie oder der Trägheit in Betreff der Axe genannt (Hauptst. V, §. 27).

Anmerkung. Ein Anfänger möchte nicht sogleich einsehen, was die Größe R der Kraft eigentlich zu bedeuten hat. Die Größe der Kraft wird überhaupt bestimmet durch das Produkt der Masse und der Geschwindigkeit. Wenn also die Kraft R im Stande ist, eine gewisse bekannte Masse M mit einer Geschwindigkeit $= g$ zu bewegen, so wird sein $R = M \times g$ (Stat. H. II, §. 30).

§. 6.

$$\text{Aus } \varphi = \frac{R \times AC}{B \times C'B^2 + G \times C''G^2 + E \times C'''E^2}$$

folget $R \times AC = \varphi \times (B \times C'B^2 + G \times C''G^2 + E \times C'''E^2)$

Das erste Glied der Gleichung ist das Moment der Kraft, in Betreff der Axe. Das zweite hat man, der Aehnlichkeit wegen, das **Moment der Inerzie** oder der **Trägheit**, genannt, welches Moment demnach ein Produkt ist aus der Winkelgeschwindigkeit in die Summe aller

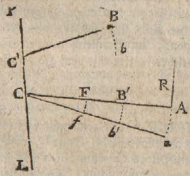
Produkte

Produkte jeder Masse mit dem Quadrate ihrer Entfernung von der Axe. Um der Kürze willen hat man diese Summe den **Exponenten des Moments der Trägheit** genannt. Da aber auch dieser Ausdruck noch ziemlich lang ist, so habe ich ihn abgekürzet, und schon im vorigen Hauptstücke immer bloß gesagt: **der Exponent der Trägheit**. Zufolge dieser Erklärungen ist demnach das Moment der Trägheit das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit und dem Exponenten der Trägheit. Ferner ist das Moment der Trägheit gleich dem Momente der Kraft.

§. 7.

Lehrsatz.

Wenn ein System oder ein Körper ohne Schwere sich um eine unbewegliche Axe drehet, so erhält man die Geschwindigkeit jedes Punktes im Systeme, wenn man die Winkelgeschwindigkeit des ganzen Systemes mit der senkrechten Entfernung des Punktes von der Axe multiplizirct, oder, welches einerlei ist, wenn man das Moment der Kraft mit gedachter Entfernung multiplizirct, und das Produkt durch den Exponenten der Trägheit dividiret.



Es sei B ein Punkt des Systemes, und die Winkel-Geschwindigkeit des ganzen Systemes sei $Ff = \varphi$. So ist schon bekannt (H. V, §. 25 und 26), daß der Punkt B sich eben so geschwinde drehet, als jeder andere, der von der Axe gleich weit entfernet ist. Es sei BC' die senkrechte Entfernung des B von der Axe KL. Man nehme auf AC die CB' = BC', so drehet sich der Punkt B' eben so geschwinde als B. Es beschreibet aber B' den Bogen $B'b'$. Nun ist

$$CF : CB' :: Ff : B'b'$$

$$\text{also } B'b' = \frac{CB' \times Ff}{CF}$$

Da nun (§. 4) $Ff = \varphi$, und $CF = 1$, so ist

$$B'b' = CB' \times \varphi$$

$$\text{oder } B'b' = C'B \times \varphi$$

und da auch (§. 4)

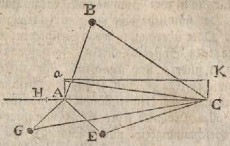
$$\varphi = \frac{R \times AC}{B \times C'B^2 + G \times C''G^2 + E \times C'''E^2}$$

$$\text{so ist } B'b' = C'B \times \varphi = \frac{R \times AC \times C'B}{B \times C'B^2 + G \times C''G^2 + E \times C'''E^2}$$

Anmerkung. Man merke wohl, daß in diesem Lehrsatze nicht von den Graden des Bogens, den ein Punkt beschreibet, die Rede ist, sondern von der Länge eines solchen Bogens, im Vergleich mit der Länge des Bogens φ, welcher letztere mit dem Halbmesser 1 beschrieben ist.

§. 8.

Es sei A (folg. Fig.) der gemeinsame Schwerpunkt der kleinen Massen ohne Schwere B, E und G, welche auf irgend eine Art mit dem Punkte C verbunden, und gezwungen sind, sich um ihn herum zu drehen. Es beschreibe in einem unend-



unendlich kleinen Zeittheilchen der Schwerpunkt A den Bogen Aa, so kann Aa als eine kleine gerade Linie betrachtet werden, die auf dem Halbmesser CA senkrecht ist. Durch a ziehe man aK mit AC gleich und parallel. Man verbinde die Punkte C und K vermittelst der geraden Linie CK. Anstatt, daß das System sich um C herumdrehet, kann man sich auch vorstellen, daß der Schwerpunkt A in der Linie Aa fortrücket, daß aber zugleich das System sich um den Schwerpunkt drehet, so daß der Punkt C, welcher in K sein sollte, wenn A in a ist, unterdessen bis C rückwärts gehet, und die Linie KC = Aa beschreibet. Denn in diesem Falle wird alles, wie vorher, erfolgen. Der Punkt C, obgleich unbefestiget, wird dennoch in C bleiben, der Schwerpunkt A wird ebenfalls Aa, oder die CA den Winkel ACa beschreiben.

Da nun in dem angenommenen Falle das System frei ist, und sich alle Theile desselben um dem Schwerpunkt A drehen, so kann man sich die Körperchen mit dem Schwerpunkt A vermittelst gerader Linien AB, AE, AG verbunden vorstellen, und das ganze System bildet eine Art eines vielarmigten Hebels. Bei einem gewöhnlichen zweiarmigten Hebel, sobald er in Bewegung geräth, sind die Quantitäten der Bewegung gleich, oder da sie entgegengesetzet sind, so ist ihre Summe null (Stat. Hauptst. VII, §. 15). Das nämliche läßt sich von vielarmigten Hebeln beweisen. Oder überhaupt, wenn verschiedene Kräfte auf die Theile eines Systemes wirken, so daß das Gleichgewicht Statt findet, und wenn man sich vorstellet, das Gleichgewicht werde gehoben, so daß die Theilchen zugleich jeder einen unendlich kleinen Raum durchlaufen, so ist die Summe aller Produkte jeder Kraft mit ihrer unendlich kleinen Geschwindigkeit null (Stat. H. VII, §. 17). Hier aber sind weiter keine Kräfte vorhanden, als die Trägheiten, welche sich nach den Massen richten. Wenn man also jede Masse mit ihrer Geschwindigkeit multipliziret, das heißt, wenn man ihre Quantität der Bewegung nimmt, so ist die Summe aller dieser Quantitäten der Bewegung = o.

Die Quantitäten der Bewegung der Körperchen B, E und G, um den Schwerpunkt B, heben sich also dermaßen auf, daß ihre Summe null ist. Nun bleibet also weiter nichts übrig, als die Bewegung des Systemes in der Linie A*a*. Die Quantität derselben beträgt bekannter Maaßen $(B + E + G) \times Aa$, und die Richtung A*a* ist auf CA senkrecht.

Da nun in dem wirklichen Falle, wo der Punkt C fest ist, alles so geschiehet, wie in dem erdichteten, so kann man auch sagen, daß, wenn ein System sich um einen festen Punkt C herumdrehet, die Bewegungen alle Theile desselben sich so einander aufheben, daß weiter nichts übrig bleibet, als eine Quantität der Bewegung, welche gleich ist der Summe der Massen, mit der Geschwindigkeit des Schwerpunktes multipliziret. Und diese Geschwindigkeit läßt sich vermöge des 7ten Paragraphs bestimmen.

Denn es sei φ die Winkel-Geschwindigkeit des Systemes, so ist (§. 7)

$$Aa = CA \times \varphi$$

Folglich

Folglich ist die gedachte Quantität der Bewegung

$$(B + E + G) \times CA \times \varphi$$

Ob nun gleich dieses seine Richtigkeit hat, und der letzte Ausdruck in der That die Größe derjenigen Bewegung ausdrücket, welche im System vorhanden ist, es mag sich diese entweder frei bewegen, unterdessen daß sich die Theile desselben um den Schwerpunkt drehen, oder es mag das System sich um den unverrückten Punkt C drehen, so ist doch leicht einzusehen, daß dieses Resultat aller Bewegungen, als eine aus vielen zusammengesetzte Kraft nicht durch den Schwerpunkt A gerichtet sein kann. Denn die von C entferntern Theile des Systemes sind gezwungen, längere Bögen zu beschreiben, als die näheren, und haben folglich mehr Bewegung. Es muß demnach die Richtung der gedachten zusammengesetzten Kraft durch einen Punkt gehen, der von C weiter als A entfernet ist. Dieser Punkt sei H, so ist das Moment der Kraft, oder der Quantität der Bewegung

$$(B + E + G) \times CA \times \varphi \times CH$$

Der Winkel φ ist schon durch die Kraft R bestimmet, welche die drehende Bewegung verursachet hat, wie auch durch ihre Entfernung von C, welche wir d nennen wollen (§. 4). Wenn nun in dem Augenblicke, wo die Kraft R in der Entfernung d auf das System wirket, um ihm eine drehende Bewegung zu geben, zugleich in der Entfernung CH eine solche Kraft entgegengesetzet würde, wie wir sie jetzt bestimmet haben, so ist nicht zu zweifeln, daß das System im Gleichgewichte bleiben würde. Deswegen ist das Moment $(B + E + G).\ CA \times CH \times \varphi$ gleich dem Momente $R \times d$. Nun ist ferner (§ 6) $R \times d = \varphi \times (B \times BC^2 + E \times EC^2 + G \times GC^2)$. Also

$$(B + E + G) \times CA \times CH \times \varphi = \varphi \times (B \times BC^2 + E \times EC^2 + G \times GC^2)$$

Woraus man erhält

$$CH = \frac{B + BC^2 + E \times EC^2 + G \times GC^2}{(B + E + G).\ CA}$$

§. 9.

Lehrsatz.

Wenn eine Kraft ein System oder einen Körper anstößt, welcher an einer unverrückten Axe befestiget ist, und die Richtung der Kraft auf die Ebne senkrecht ist, die durch die Axe und den Schwerpunkt gehet, so bekömmt das System oder der Körper eine Quantität der Bewegung, 1) welche gleich ist dem Produkte der ganzen Masse des Systemes oder Körpers mit der entstehenden Geschwindigkeit des Schwerpunktes; 2) welche, als Kraft betrachtet, eine Richtung hat, die auf der Ebne senkrecht ist, welche durch die Axe und den Schwerpunkt gehet; 3) deren Entfernung von der Axe immer die nämliche ist, ohne Bezug auf die Größe und Entfernung der anstoßenden Kraft; 4) deren Entfernung erhalten wird, wenn man den Exponenten der Trägheit durch das Moment des Körpers oder Systemes dividiret, beides in Betreff der gegebenen Axen gerechnet.

Dieser Lehrsatz ist nichts anders als die Verkürzung des ganzen Räsonnements, welches im vorigen Paragraph enthalten ist. Obgleich dort nur von einem Systeme dreier Körperchen geredet wurde, so ist leicht einzusehen, daß alles sich auf so viel Körperchen als man will, ja auf unendlich viele anwenden läßt, folglich auch auf jeden Körper, von welcher Größe man will, indem man ihn als ein System von unendlich vielen Elementen betrachten kann.

Die

Die beiden ersten Theile des Lehrsatzes sind nichts als die Wiederholung desjenigen, was in den Betrachtungen des vorigen Paragraphs schon dargethan worden. Der dritte Theil erhellet daraus, daß in der letzten Gleichung des vorigen Paragraphs, im Werthe der Entfernung CH, weder die anstoßende Kraft, noch ihre Entfernung von der Axe vorkömmt. Der vierte Theil ist nichts anders, als die wörtliche Uebersetzung der gedachten Gleichung, wobei man sich nur erinnern muß, was wir unter dem Exponenten der Trägheit verstehen (§. 6).

§. 10.

Hier finden wir die beste Gelegenheit, zu erklären, woher eigentlich die Benennungen des Momentes der Trägheit und seines Exponenten entstanden sind, und was man eigentlich für Begriffe damit verknüpfen müsse. Es sei m ein beliebiges Körperchen, was zum drehenden Systeme gehöret, oder es sei m ein materieller Punkt des drehenden Körpers. Es sei m in der Entfernung r von der Axe. Die Winkel-Geschwindigkeit des Systemes oder Körpers sei φ, so beschreibet m einen Bogen $= r\varphi$ (§. 7.) Wenn man diese Geschwindigkeit mit der Masse m multipliziret, so bekömmt man ihre Quantität der Bewegung $= mr\varphi$; dieses ist zugleich der Widerstand, welchen die kleine Masse m, vermöge ihrer Trägheit, gegen die Kraft R ausübet, durch welche das System oder der Körper in Bewegung gesetzet wird. Multipliziret man $mr\varphi$ noch mit r, so hat man $mr^2\varphi$, als das Moment des gedachten Widerstandes, in Betreff der Axe, welches man füglich das Moment der Trägheit des Körperchens m, in Betreff der Axe, nennen kann. Sind nun m', m'', m''', u. s. f. die übrigen Theilchen des Systemes oder Körpers, und r', r'', r''', u. s. f. ihre respektiven Entfernungen, so sind ebenfalls $m'r'^2\varphi$, $m''r''^2\varphi$, $m'''r'''^2\varphi$, u. s. f. ihre

Momente der Trägheit. Folglich ist das Moment der Trägheit des ganzen Systemes oder Körpers

$$= mr^2\varphi + m'r'^2\varphi + m''r''^2\varphi + m'''r'''^2\varphi + \&c.$$

oder $\varphi\,(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + m'''r'''^2 + \&c.)$

Und da, bei unverändertem Werthe des φ, die Größe dieses Moments von $(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + m'''r'''^2 + \&c.)$ abhänget, so hat man diese Summe den Exponenten des Moments der Trägheit, oder den Exponent der Trägheit genannt. Diese Benennung ist eine Nachahmung des Exponenten einer Potenz oder einer Razion. Das Wort Exponent bedeutet überhaupt eine Zahl, die eine Größe genauer angiebt oder bestimmet.

Man siehet zugleich aus dieser Erklärung, daß der Widerstand eines Körpers, dem man eine drehende Bewegung geben will, desto größer ist, je größer das Moment der Trägheit ist, und wenn man φ als unverändert annimmt, je größer der Exponent der Trägheit ist.

§. 11.

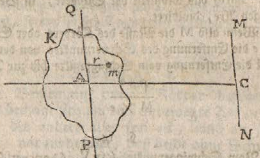
Wenn der Exponent der Trägheit, für einen einzelnen Körper, von endlicher Größe gefunden werden soll, so brauchet man die Integral-Rechnung, und dann ist $(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + m'''r'''^2 + \&c.)$ nichts anders als das Integral von mr^2 oder $\int mr^2$, vorausgesetzet, daß m unendlich klein ist, und zwischen m und r eine gewisse Gleichung Statt findet. Also ist überhaupt $\varphi\int mr^2$ das Moment der Trägheit, und $\int mr^2$ der Exponent dieses Moments, oder der Trägheit selbst.

§. 12.

In dem vorigen Hauptstücke §. 29 haben wir bewiesen, daß es hinlänglich ist, den Exponenten der Trägheit für eine

Axe

Axe zu finden, die durch den Schwerpunkt gehet, um den Exponenten für jede andere Axe zu bekommen, welche mit dieser parallel ist. Nämlich zum Exponenten der Trägheit für die Axe, die durch den Schwerpunkt gehet, wird noch addiret, das Produkt aus der Masse des Körpers mit dem Quadrate der Entfernung beider Axen.



Es sei demnach m ein beliebiges Theilchen eines Körpers K, und r die senkrechte Entfernung des m, von der Axe PQ, die durch den Schwerpunkt A gehet. Es sei MN die gegebene Axe, mit PQ parallel, und AC die Entfernung beider Axen oder die Entfernung des Schwerpunktes von der gegebenen Axe, so ist der Exponent der Trägheit in Betreff der Axe $K.AC^2 + \int mr^2$.

§. 13.

Die vorhergehenden Lehren haben ihren Nutzen bei der Untersuchung der Schlagpunkte und der Schwingepunkte. Unter dem Schlagpunkte (centre de percussion) verstehet man in einem Körper oder Systeme, welches sich um eine unbewegte Axe drehet, denjenigen Punkt, durch welchen die als Kraft betrachtete Bewegung gehet, die aus allen einzelnen Quantitäten der Bewegung aller Theilchen des Systemes oder Körpers zusammengesetzt ist. Dieser Punkt wird gefunden, wie im 9ten Paragraph gelehret worden. Nämlich er lieget in der Linie, die durch den Schwerpunkt gehet, und auf der Axe senkrecht ist, und seine Entfernung von der Axe wird gefunden, wenn man den Exponenten der Trägheit, in Betreff der gegebenen Axe, durch das Moment der Schwere, in Betreff derselbigen Axe, dividiret.

Wenn also M die Masse des Körpers oder Systemes, und e die Entfernung des Schwerpunktes von der Axe ist, so ist die Entfernung vom Schlagpunkte bis zur Axe

$$\frac{\int mr^2}{M \times e}$$

§. 14.

Vom Schwingepunkte (H. V, §. 20, u. s. w.) ist schon im vorigen Hauptstücke ausführlich gehandelt worden. Die Regel um ihn zu finden, ist genau die nämliche, welche wir eben jetzt für den Schlagpunkt angegeben haben (H. V, §. 27). Also sind beide Punkte einerlei, oder es ist derselbige Punkt, unter zwei verschiedenen Namen.

Anmerkung. Diese Identität des Schlagpunktes und des Schwingepunktes gilt jedoch nur für solche Körper, die sich um eine unbewegte Axe drehen. Denn wenn der Körper frei ist, so bekömmt er einen andern Schlagpunkt, wie wir in der Folge sehen werden.

§. 15.

Wenn ein Körper sich um eine Axe drehet (diese muß vertikal seyn, oder der Körper ohne Schwere), und man will seine Bewegung mit einmal hemmen, so muß ihm eine Kraft entgegengesetzet werden, deren Moment dem

Momente

Momente der Trägheit gleich sei. Denn da das Moment der Trägheit den ganzen Widerstand des drehenden Körpers vorstellet (§. 10), so muß die zur Hemmung der Bewegung nöthige Kraft ein Moment haben, welches dem Widerstande gleich ist. Gesetzt also, es sei F die Kraft, und D ihre Entfernung von der Axe, so muß sein

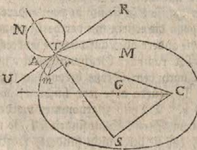
$$F \times D = \varphi \int m r^2$$

weil (§. 11) $\varphi \int m r^2$ das Moment der Inerzie ist. Wenn man F bestimmet, so ergiebt sich D, oder wenn man D bestimmet, so ergiebt sich F aus dieser Gleichung.

§. 16.

Aufgabe.

Die Bewegung zweier Körper bestimmen, wovon der eine sich um eine unbewegte Axe drehen kann, der andere aber frei ist, und an jenen anstößt, vorausgesetzt, daß beide ohne Schwere sind, oder daß die Wirkung ihrer Schwere verhindert wird, auch daß die Richtung des stoßenden Körpers auf die gestoßene Fläche senkrecht sei, und parallel mit der Ebne, die durch den Schwerpunkt gehet, und die zugleich auf der Axe senkrecht ist.



Es sei der Körper M drehbar um eine Axe, die man sich in C auf der Ebne des Papiers senkrecht vorstellen muß. Es komme ein anderer Körper N in einer Richtung TS, die bei T auf die Fläche des Körpers oder auf die berührende Ebne RU senkrecht sei, und zugleich parallel mit der in der Aufgabe gedachten andern Ebne, welche in der Figur die Ebne des Papiers ist.

Es sei V die Geschwindigkeit des N vor dem Stoße, und v seine Geschwindigkeit nach dem Stoße, so verlieret N durch den Stoß die Geschwindigkeit $V - v$, oder die Quantität der Bewegung $N(V - v)$, und der Körper M empfängt diese Quantität der Bewegung. Man fälle CS senkrecht auf TS, so ist CS die Entfernung von der Axe, in welcher gedachte Quantität der Bewegung oder Kraft wirket, folglich bekömmt M dadurch eine Winkelgeschwindigkeit (§. 4 und 10)

$$\varphi = \frac{N \times (V - v) \times CS}{\int m r^2}$$

und der Punkt T bekömmt eine Geschwindigkeit

$$CT \times \varphi = \frac{N \times (V - v) \times CS}{\int m r^2} \times CT$$

Gesetzt, der unendlich kleine Bogen Tm stelle diese Geschwindigkeit vor, so läßt sie sich in zwei andere Tr und TA zerlegen, wovon die erstere mit der berührenden Ebne RU parallel ist, die andere aber auf dieselbe senkrecht. Die Geschwindigkeit TA kann der Geschwindigkeit v nicht hindern, welche N nach dem Stoße bekommen soll. Die Geschwindigkeit Tr würde aber jene hindern, wenn Tr kleiner wäre als v. Da nun angenommen worden, daß v wirklich nach dem Stoße Statt finden soll, so muß Tr so beschaffen sein, daß sie der v nicht hindere, folglich muß sein $Tr = v$.

In

In den Dreiecken CST, Trm, sind bei S und r rechte Winkel. Ferner sind Tm und CS parallel, indem sie beide auf CT senkrecht sind. Also sind die Wechsel-Winkel TCS rTm gleich; folglich beide Dreiecke ähnlich, und es ist $CT : CS :: Tm :: Tr$

Also $$Tm = \frac{CT \times Tr}{CS}$$

Es ist aber $Tr = v$, also

$$Tm = \frac{v.CT}{CS}$$

und da Tm die Geschwindigkeit des Punktes T ist, welcher vorher durch $CT \times \varphi$ ausgedrücket wurde, so ist

$$\frac{v \times CT}{CS} = \frac{N(V-v) \times CS}{\int m r^2} \times CT$$

$$\frac{v}{CS} = \frac{N \times V \times CS - N \times v \times CS}{\int m r^2}$$

$$v.\int m r^2 = N \times V \times CS^2 - N \times v \times CS^2$$

$$v(\int m r^2 + N.CS^2) = N \times V \times CS^2$$

$$v = \frac{N \times V \times CS^2}{\int m r^2 + N.CS^2}$$

Dieses ist demnach die Geschwindigkeit des Körpers N nach dem Stoße. Setzet man diesen Werth in $\varphi = \frac{N \times (V-v) \times CS}{\int m r^2}$, so bekömmt man für die Winkel-Geschwindigkeit des drehenden Körpers

$$\varphi = \frac{N \times \left(V - \frac{N \times V \times CS^2}{\int m r^2 + N \times CS^2}\right) \times CS}{\int m r^2}$$

Wenn

Wenn man, was in der Parenthese ist, unter eine Benennung bringet, so beträgt es

$$\frac{V\int mr^2 + N\times V\times CS^2 - N\times V\times CS^2}{\int mr^2 + N\times CS^2}$$

oder $$\frac{V\times\int mr^2}{\int mr^2 + N\times CS^2}$$

Also $$\varphi = \frac{N\times\left(\frac{V\times\int mr^2}{\int mr^2+N\times CS^2}\right)\times CS}{\int mr^2}$$

Dividiret man oben und unten durch $\int mr^2$, so ist endlich

$$\varphi = \frac{N\times V\times CS}{\int mr^2 + N\times CS^2}$$

die Winkel-Geschwindigkeit des drehenden Körpers. Will man die Geschwindigkeit des Punktes S haben, so ist sie $CS\times\varphi = \frac{N\times V\times CS^2}{\int mr^2+N\times CS^2}$

also die nämliche, wie Tr oder V, welches auch sein muß, wenigstens im Anfange der Bewegung, so lange der vom Punkte S beschriebene Bogen noch als eine gerade Linie betrachtet werden kann.

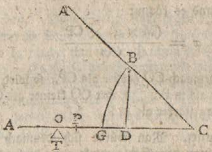
§. 17.

In allen vorhergehenden Aufgaben kömmt das Integral $\int mr^2$ vor. Wie solches bei jedem Körper gefunden wird, ist im vorigen Hauptstücke hinlänglich gelehret worden (Hauptst. V, §. 39 &c.). Wir wollen jetzt noch eine andere Betrachtung beifügen, welche einen praktischen Nutzen haben kann.

§. 18.

Aufgabe.

Eine Stange drehet sich, vermöge ihrer Schwere, in einer vertikalen Ebne, um eines ihrer Enden, und stößt zulezt auf einen unbeweglichen Gegenstand: es wird gefraget, wie stark der Schlag ist, welchen dieser Gegenstand empfängt?



Es sei CA die Stange, welche aus der Lage CA' drehend herunter fällt, und T der unbewegliche Gegenstand, auf welchen sie stößt. Man betrachte das Gewicht der Stange, als wäre es im Schwerpunkte B gesammlet. Da B durch den Bogen BG fällt, so erhält dieser Schwerpunkt B die nämliche Geschwindigkeit, als wenn er längs BD gerade herunter gefallen wäre (Hauptst. IV, §. 13). Diese Geschwindigkeit ist leicht zu berechnen (Hauptst. III, §. 12, Ex. V). Sie sei u, und es sei M die Masse der Stange, so ist $M \times u$ ihre Quantität der Bewegung. Diese Quantität der Bewegung, als Kraft betrachtet, gehet aber nicht durch den Schwerpunkt, sondern durch einen anderen Punkt (§. 9), welchen man den Schlagpunkt nennet (§. 13), und welcher mit dem Schwingepunkte einerlei ist (§. 14). Dieser Punkt sei P, so würde der Gegenstand, wenn er unter P wäre, einen Schlag bekommen, dessen Stärke ebenfalls durch $M \times u$ ausgedrücket

werden

werden müßte. Wenn die Stange keine beträchtliche Dicke, in Vergleich mit der Länge, hat, so ist $CP = \frac{2}{3}CA$ (H. V, §. 40, Zus. III, und H. V, §. 42, Zus. II.).

Lieget aber der Gegenstand unter einem anderen Punkte O, so sage man, ohngefähr wie beim Hebel,

$$CO : CP :: (M \times u) : x$$

wo x die Wirkung der Kraft $M \times u$ in der Entfernung CO ist, und es kömmt

$$x = \frac{(M \times u) \times CP}{CO}$$

Ist demnach CO größer als CP, so wird der Schlag schwächer als in P. Ist aber CO kleiner als CP, so wird der Schlag stärker als in P.

Anmerkung. Man würde sich demnach sehr irren, wenn man den Schlagpunkt eines drehenden Körpers für einen solchen hielte, wo der Schlag am stärksten ist. Nein, er ist nichts anders, als derjenige Punkt, wo der Schlag eben so stark ist, als wenn der schlagende Körper in horizontaler Lage von der Höhe BD herunter fiele, und wenn dessen Schwerpunkt gerade auf den Gegenstand träfe; oder es ist der Punkt, wo der Schlag der bloßen Quantität der Bewegung des schlagenden Körpers gleich ist (§. 13).

§. 19.

Aufgabe.

Eine Stange, die sich mit einer gewissen Geschwindigkeit um eines ihrer Enden drehet, trifft einen beweglichen Gegenstand. Es wird gefraget, welche Geschwindigkeit sowohl die Stange als der andere Gegenstand bekommen?

Gesetzt,

Gesetzt, die Stange CA drehe sich um den Punkt C, so daß das Ende A eine Geschwindigkeit u habe, es mag sein wie bei voriger Aufgabe, durch den Fall, oder aus

andern Ursachen. Diese Stange stoße gegen den Körper M,' so verlieret der Punkt A einen Theil v seiner Geschwindigkeit, und es bleibet ihm nur noch übrig die Geschwindigkeit $u - v$. Es sei G der Schwerpunkt der Stange und $CG = g$, es sei auch $CA = a$, so verhalten sich die von den Punkten A und G beschriebene Bögen wie CA zu CG. Also, wenn x die verlorne Geschwindigkeit des Punktes g ist, so ist

$$a : g :: (u - v) : x$$

$$\text{daher } x = \frac{g. (u - v)}{a}$$

und die Stange, wenn M ihre Masse ist, verlieret die Quantität der Bewegung

$$Mx = \frac{M.g. (u - v)}{a}$$

diese, als Kraft betrachtet, gehet durch den Schlagpunkt (§. 9 und 13).

Es sei P dieser Punkt und $CP = p$, so ist das Moment der verlornen Kraft

$$\frac{M.g.p. (u - v)}{a}$$

So viel Moment oder Wirkung die Stange verlieret, so viel theilet sie dem Gegenstande M' mit, indem Wirkung und

und Gegenwirkung allemal gleich sind (St. H. III, §. 10) Gesetzt also, der Gegenstand bekomme durch den Schlag eine Geschwindigkeit v', und es sei seine Entfernung $CB = b$, so ist sein Moment $M'. v'. b$. Es ist aber die Geschwindigkeit in A zur Geschwindigkeit in B, wie CA zu CB, oder $v : v' :: a : b$, daher $v' = \frac{b.v}{a}$, folglich $M'v'b = \frac{M'b^2 v}{a}$.

Also muß sein

$$\frac{Mg.p.\,(u - v)}{a} = \frac{M'b^2 v}{a}$$

oder $M.g.p.\,(u - v) = M'b^2 v$

$$M.g.p.u - M.g.p.v = M'b^2 v$$

$$M.g.p.u = (M.g.p + M'b^2)\, v$$

$$\frac{M.g.p.u}{M.g.p + M'b^2} = v$$

Dieses ist die Geschwindigkeit, die der Punkt a verlieret.

Da nun $v' = \frac{b}{a}.v$, so multiplizire man den Werth von v mit $\frac{b}{a}$, dann kömmt

$$v' = \frac{M.g.p.b.u}{a\,(M.g.p + M'b^2)}$$

Oder, es sei φ die Winkel-Geschwindigkeit der Stange, so ist die Geschwindigkeit u das Ende des $A = a\varphi$, dann kömmt

$$v' = \frac{g.p.b.M.\varphi}{(M.g.p + M'b^2)}$$

oder, wenn man oben und unten durch $M.g.p$ dividiret

$$v' = \frac{b.\varphi}{1 + \frac{M'}{M}.\frac{b^2}{g.p}}$$

§. 20.

§. 20.

Aufgabe.

Unter den Umständen der vorigen Aufgabe, soll die Stelle in der Stange oder in deren Verlängerung gefunden werden, wo der geschlagene Gegenstand die größte Geschwindigkeit bekömmt.

Wir haben gefunden, für die Geschwindigkeit des geschlagenen Körpers

$$v' = \frac{b.\varphi}{1 + \frac{M'}{M}.\frac{b^2}{g.p}}$$

Es ist klar, daß v' null wird, wenn $b = 0$, daß heißt, wenn man den Gegenstand unter dem Drehepunkt selbst leget. Ebenfalls wird $v = 0$, wenn $b = \infty$, denn in diesem Falle ist

$$v' = \frac{\infty.\varphi}{1 + \frac{M'}{M'}.\frac{\infty^2}{g.p}}$$

oder weil 1 in Betracht von ∞^2 verschwindet

$$v' = \frac{\infty.\varphi}{\left(\frac{M'}{M}.\frac{\infty^2}{g.p}\right)} = \frac{\varphi}{\frac{M'}{M}\frac{\infty}{g.p}}$$

Da hier im Nenner ein unendlich großes ist, so wird der Bruch null.

Da also die Geschwindigkeit des M′ sowohl unendlich nahe, als unendlich fern von C null wird, so muß irgendwo eine Stelle sein, wo v' am größten wird. Um diese Stelle oder die zustimmende Entfernung b zu finden, muß man die Gleichung

$$v' = \frac{b.\varphi}{1 + \frac{M'}{M}.\frac{b^2}{g.p}}$$

in Betreff der Größen v' und b allein differenziren, und das Differenzial von v' null machen. So kömmt

$$dv' = o = \frac{\left(1 + \frac{M'}{M} \cdot \frac{b^2}{g.p}\right) . \varphi . db - b\varphi . \left(\frac{2M'}{M} \cdot \frac{bdb}{g.p}\right)}{\left(1 + \frac{M'}{M} . \frac{b^2}{g.p}\right)^2}$$

Wenn man beiderseits mit dem Nenner multiplizirt, und mit φdb dividiret, so ist

$$o = 1 + \frac{M'}{M} . \frac{b^2}{g.p} - \frac{2M'}{M} . \frac{b^2}{g.p}$$

$$o = 1 - \frac{M'}{M} . \frac{b^2}{g.p}$$

$$o = M.g.p - M'b^2$$

$$M' b^2 = M.g.p$$

$$b^2 = \frac{M.g.p}{M'}$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{M.g.p}{M'}\right)}$$

Die vorletzte Gleichung giebt diese Proporzion

$$M' : M :: (g.p) : b^2$$

das heißt, wie sich die gestoßene Masse, zur Masse der stoßenden Stange verhält, so verhält sich das Produkt aus den Entfernungen sowohl des Schwerpunktes als auch des Schwingepunktes, zum Quadrate der Entfernung des Punktes, wo der Schlag die größte Geschwindigkeit erzeuget.

Zusatz. Diese Aufgabe und die vorige können auch auf andere drehende Körper als bloße Stangen angewandt werden.

An

Anmerkung. Hieraus siehet man wiederum, daß die Lage unter dem Schwerpunkte nicht die vortheilhafteste ist (§. 18, Anmerk.).

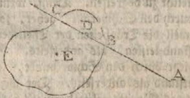
§. 21.

Bis jetzt haben wir nur von solchen Körpern geredet, die sich um eine unbewegte Axe herumdrehen. Es ist Zeit, nun auch solche zu betrachten, die ganz frei sind, und während ihrer fortlaufenden oder progressiven Bewegung, zugleich eine drehende haben.

§. 22.

Ehe wir weiter gehen, ist noch einiges, in Betrachtung der Wirkungs-Art der Kräfte auf die Körper, zu erinnern.

Wenn die Kraft ein Körper ist, der gegen einen andern stößt, so pfleget man die Kraft des stoßenden in zwei andere zu zerlegen, deren eine auf die gestoßene Fläche senkrecht ist, die andere aber mit derselben parallel (H. II, §. 9). In andern Fällen aber findet eine solche Zerlegung nicht allemal Statt.



Zum Exempel, wenn man saget, eine Kraft wirket auf dem Körper E in der Richtung AC, so kann diese Kraft den Körper, vermöge eines Fadens, von B nach A hinziehen. Sie kann auch, vermöge einer Stange oder steifen Linie AB den Körper F in der Richtung AC stoßen, wenn nur in B ein kleines Fleckchen vorhanden ist, worauf

AB senkrecht sei. Es kann auch die Kraft so beschaffen sein, daß sie die Masse durchdringe (wie die Fallkraft), und auf alle Punkte, oder einige Punkte, oder einen Punkt D in der Linie BC wirke. In allen diesen Fällen findet keine Zerlegung der Kraft Statt, sondern der Körper E empfänget ihre völlige Wirkung. Solche Wirkungs-Art der Kräfte wird man sich auch in folgenden Paragraphen vorstellen müssen, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil erinnert wird.

§. 23.

Lehrsatz.

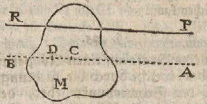
Wenn die Richtung der Kraft, die auf einen freien Körper wirket, durch dessen Schwerpunkt gehet, so gehet dieser Schwerpunkt in der Richtung der Kraft fort, und alle Theilchen des Körpers gehen mit ihm in parallelen Linien. Hingegen, wenn die Richtung nicht durch den Schwerpunkt gehet, so entstehet eine drehende Bewegung zugleich mit der progressiven, oder fortlaufenden.

Der erste Theil dieses Satzes ist schon an einem andern Orte bewiesen worden (H. II, §. 4), und der zweite ist eben so leicht zu begreifen. Denn, wenn die Wirkung der Kraft durch den Schwerpunkt gehet, so entstehet kein Drehen, weil die Trägheiten der Theilchen einerseits so viel Widerstand leisten, als anderseits. Gehet aber die Wirkung nicht durch den Schwerpunkt, so ist einerseits mehr Widerstand als anderseits. Der weniger widerstehende Theil des Körpers gehet demnach geschwinder, als der mehr widerstehende, woraus eine drehende Bewegung erfolget. Daß aber der Körper während dem Drehen auch vorwärts gehen müsse, ist daraus klar, daß die Kraft ihm wirklich vorwärts treibet, und daß das Drehen nur zufälliger Weise aus dem mangelnden Gleichgewichte der Theilchen erfolget.

§. 24.

Lehrsatz.

Wenn eine Kraft auf einen freien Körper in einer Richtung wirket, die nicht durch den Schwerpunkt gehet, so bekömmt dennoch der Schwerpunkt die nämliche Richtung und Geschwindigkeit, als wenn die Kraft unmittelbar auf ihn wirkete.

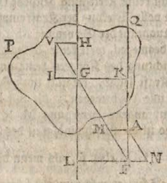


Gesetzt, eine Kraft wirke auf den Schwerpunkt C der Masse M, so daß sie in ihm die Geschwindigkeit CD hervorbringe, so giebt die Kraft dem Körper die Quantität der Bewegung $M \times CD$. Gesetzt nun, dieselbige Kraft wirke in der Richtung PR, außerhalb des Schwerpunktes, so daß keine Zerlegung geschehe (§. 22), sondern der Körper die volle Wirkung der Kraft empfange, so muß er ebenfalls die Quantität der Bewegung $M \times CD$ empfangen. Ferner, eben deswegen, weil keine Zerlegung Statt findet, so kann die Richtung des Körpers keine andere sein, als diejenige der Kraft selbst, folglich muß sich der Schwerpunkt in der Linie AB bewegen, die mit PR parallel ist. Da nun die empfangene Bewegung $M \times CD$ ist, und die Masse M, so ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes $\frac{M \times CD}{M} = CD$, eben so, als wenn die Kraft unmittelbar auf den Schwerpunkt gewirket hätte.

Da aber zugleich eine drehende Bewegung entstehet (§. 23), so möchte man einwenden, die Kraft brächte doch in der That mehr Wirkung hervor, wenn sie nicht durch den Schwerpunkt gehet. Dieser Einwendung ist aber schon im 8ten Paragraph vorgebeuget, wo bewiesen wird, daß die Summe aller Bewegungen um den Schwerpunkt herum null ist. Die drehenden Bewegungen der Theilchen des Körpers um den Schwerpunkt herum heben sich demnach von selbst auf. Eben deswegen halten sie den Schwerpunkt im Gleichgewicht, so daß er von der Richtung CB nicht abweichen kann.

§. 25.

Wenn eine Kraft auf einen Körper wirket, so daß die Ebne, welche durch die Richtung der Kraft und durch den Schwerpunkt gehet, den Körper in zwei gleiche und ähnliche Theile zerschneidet, so drehet sich der Körper um den Schwerpunkt herum, eben so als wenn der Schwerpunkt unbeweglich wäre, oder als wenn durch den Schwerpunkt eine unbewegliche Axe ginge, die auf gedachte Ebne senkrecht stände.



Es

Es sei FQ die Richtung einer Kraft, die auf den Körper P wirket, und es mag FA die Größe der Kraft vorstellen. Durch den Punkt F und den Schwerpunkt G ziehe man die gerade FV. Durch den nämlichen Schwerpunkt ziehe man IK senkrecht auf FQ und HL parallel mit derselben. Laßt uns ferner annehmen, daß die verlängerte Ebne FKG den Körper P so schneidet, daß beide Theile vollkommen gleich und ähnlich sind.

Durch A ziehe man AM mit IK und AN mit FG parallel. Ferner mache man GV = FM, und durch V ziehe man VH mit IK und VI mit GL oder HL parallel.

Dann sind die Dreiecke AFN, FAM, GHV, VGI ähnlich und gleich. Denn die beiden ersten und die beiden letzten sind die Hälften eines Parallelogramms, folglich zwei und zwei ähnlichgleich. Ferner sind △ FAM und △ GHV ähnlich und gleich, weil gemacht worden GV = FM, weil die homologen Winkel AFM und HGV gleich sind, und weil beide einen rechten Winkel haben. Also sind in der That die vier Dreiecke ähnlichgleich.

Nun ist die Kraft FA in zwei zerleget, nämlich FN und FM. Anstatt der FM kann auch GV genommen werden, die ihr gleich und in derselbigen Richtung ist. Diese GV ist wiederum in zwei zerleget, nämlich GH und GI. Also befindet sich der Körper im nämlichen Zustande, als wenn er von den drei Kräften FN, GH und GI beweget würde. Von diesen dreien ist GH der gegebenen Kraft FA gleich, und verursachet, daß der Schwerpunkt G den Weg GH = FA durchläuft, als wenn die Kraft FA unmittelbar auf ihn wirkete (§. 24). Nun bleiben noch die Kräfte GI und FN, welche zwar gleich, aber nicht in derselbigen Linie entgegengesetzet sind, und also eine drehende Bewegung verursachen müssen. Von diesen beiden verursachet FN eigentlich allein das Drehen, indem GI auf dem Schwerpunkt wirket, der, wie wir schon aus andern Gründen wissen (§. 24), nur bloß den Raum GH durchläuft;

läuft; also kann die Kraft GI nur dienen, um ihrer gleichen FN in sofern das Gleichgewicht zu halten, daß diese den Schwerpunkt nicht in der Richtung GK fortziehe, indem die Kraft GI in gerade entgegengesetzter Richtung wirket.

Also drehet die Kraft FN den Körper um den Schwerpunkt G, unterdessen daß dieser längs GH fortrücket. Das Moment dieser Kraft FN in Betrachtung des Schwerpunktes G ist $FN \times GL$.

Wäre der Schwerpunkt unbeweglich, so würde die Kraft FA den Körper auch um denselben herumdrehen, und ihr Moment würde sein $FA \times GK$.

Nun sind die Dreiecke FAM, FKG ähnlich. Also ist $FA : AM :: FK : KG$, daher

$$FA \times KG = AM \times FK$$
oder $$FA \times KG = FN \times GL$$
indem $AM = FN$ und $FK = GL$

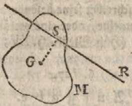
Folglich sind die Momente beider Kräfte gleich, und sie haben also gleiche Wirkung. Folglich drehet sich der Körper mit gleicher Geschwindigkeit in seinem Schwerpunkt G, es mag dieser Schwerpunkt entweder frei, oder unbeweglich sein.

Weil die Ebnen FKG, wie vorausgesetzet worden, den Körper in zwei ähnlichgleiche Theile theilet, so ist alles auf beiden Seiten der Ebnen gleich, und es ist keine Ursache vorhanden, warum der Körper schwanken sollte, so daß sich die Ebne FKG selbst verrückte. Findet aber diese Voraussetzung nicht Statt, so ist die Bewegung nicht so einfach, sondern der Körper drehet sich in verschiedenen Richtungen, welchen Fall einige große Mathematiker auch untersuchet haben. In einem Lehrbuche wie dieses ist, können wir uns mit dem ausgeführten Falle begnügen, der ziemlich häufig anwendbar ist.

§. 26.

§. 26.

Wenn demnach eine Kraft R in einer Richtung RS auf einen Körper M wirket, und wenn die Ebne RSG, die



durch die Richtung und den Schwerpunkt gehet, den Körper in zwei ähnlichgleiche Theile zerschneidet, so können die Umstände der Bewegung leicht bestimmet werden. Denn erstlich geschiehet die Bewegung des Schwerpunktes G in einer Richtung, die mit RS parallel ist, und mit einer Geschwindigkeit $= \frac{R}{M}$, wenn M die Masse des Körpers ist (§. 24). Zweitens, was die drehende Bewegung betrift, so gedenke man sich in G eine Axe auf der Ebne RSG senkrecht (§. 25), und berechne dann die Winkel-Geschwindigkeit durch die schon bekannte Formel (§. 4 u. 11)

$$\varphi = \frac{R \times GS}{\int mr^2}$$

wo m ein unendlich kleiner Theil der Masse, und r dessen senkrechte Entfernung von der erwähnten Axe G ist. Will man die Geschwindigkeit des Punktes S haben, so ist sie (§. 7).

$$SG \times \varphi = \frac{R \times GS}{\int mr^2} \times GS$$

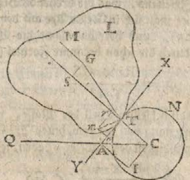
oder $SG \times \varphi = \frac{R \times GS^2}{\int mr^2}$

Anmerkung. Obgleich jeder Punkt, z. E. S um G herum einen Zirkel beschreibet, so ist doch die von ihm im unbeweglichen Raume beschriebene Linie kein Zirkel, sondern eine Zykloide oder Radlinie, indem der Mittelpunkt des Zirkels zugleich in gerader Linie fortläuft. Jeder Punkt beschreibet seine besondere Zykloide, welche entweder eine gemeine, oder eine verlängerte, oder verkürzte sein kann (Höh. Meßk. H. XV, §. 2, 3, 4).

§. 27.

Aufgabe.

Ein bewegter Körper stößt an einem ruhenden, so daß die Ebne, welche durch den Schwerpunkt des ruhenden gehet, und eine gerade Linie, die auf der berührten Stelle senkrecht stehet, den ruhenden in zwei ähnliche und gleiche Theile zerschneidet. Es sollen die Richtungen und Geschwindigkeiten beider Körper nach dem Stoße bestimmet werden.



Laßt uns annehmen, daß der Körper N gegen den Körper L laufe, in einer solchen Richtung CQ, laß im Körper

Körper L keine andere drehende Bewegung entstehen könne, als um eine einzige Axe, welche senkrecht ist auf der Ebne, die durch den Schwerpunkt G gehet, und durch die TS, welche auf der Berührungs-Ebne XY in T senkrecht ist.

Es mag CA die Geschwindigkeit des N vorstellen, so läßt sich solche in zwei andere CT und CI zerlegen, wovon die eine auf der berührenden Ebne XY senkrecht ist, die andere aber mit derselben parallel. Die leztere wirket nicht auf den Körper L, sondern nur die erstere. Diese Geschwindigkeit CT sei = V. Es sei v die Geschwindigkeit, welche N nach dem Stoße, auch in der Richtung CT oder CS übrig behalten wird. Folglich verlieret N durch den Stoß V — v an Geschwindigkeit, und N. (V — v) an Bewegung oder an Kraft. Diese Kraft gehet über in den Körper L, und wirket auf ihn in der Richtung TS. Daher bekömmt sein Schwerpunkt eine Geschwindigkeit v' in der Richtung GM mit TS parallel, so daß (§. 25)

$$v' = \frac{N. (V - v)}{L}$$

Zugleich aber bekömmt L eine drehende Bewegung, so daß der Punkt S sich mit einer Geschwindigkeit u beweget, und (§. 26)

$$u = \frac{N (V - v) \times GS^2}{\int mr^2}$$

oder, wenn wir sezen GS = D,

$$u = \frac{N. D^2. (V - v)}{\int mr^2}$$

Soll nun N die Geschwindigkeit v in der Richtung TS wirklich nach dem Stoße haben, so muß der Punkt T des Körpers L eben diese Geschwindigkeit in derselbigen Richtung haben, indem N den Punkt T in dieser Richtung vor sich wegtreibet. Wir müssen demnach die Geschwindigkeit dieses Punktes T im Körper L etwas genauer untersuchen.

Erstlich

Erstlich hat er mit allen Punkten des Körpers L die Geschwindigkeit v' des Schwerpunktes gemein. Ferner hat er vermöge der drehenden Bewegung eine Geschwindigkeit, die wir durch Tm vorstellen wollen, indem Tm ein unendlich kleiner, aus dem Mittelpunkte G beschriebener, Zirkelbogen ist, der für eine gerade, auf GT senkrechte, Linie gehalten werden kann. Durch m ziehe man mn mit TS, und mr mit TA parallel, so ist Tr die aus der drehenden Bewegung entstehende Geschwindigkeit des Punktes T in der Richtung TS. Nun sind die Dreiecke GTS, Tmr ähnlich, indem die Seiten des einen auf den Seiten des andern senkrecht sind; denn es ist Tm senkrecht auf GT, mr mit TA parallel, und folglich senkrecht auf TS, Tr senkrecht auf GS. Also

$$GT : GS :: Tm : Tr$$

daher $Tr = \frac{GS \times Tm}{GT}$

Da nun die drehende Geschwindigkeit des Punktes S um den Schwerpunkt G herum, mit u bezeichnet worden, und da sich ähnliche Bögen allemal wie ihre Halbmesser verhalten, so ist

$$u : Tm :: GS : GT,$$

also $Tm = \frac{u \times GT}{GS}$

Diesen Werth setze man in $Tr = \frac{GS \times Tm}{GT}$, so kömmt $Tr = u$. Da nun der Punkt T zugleich in der Richtung TS die Geschwindigkeit v' hat, welche allen übrigen Punkten gemein ist, so hat er überhaupt die Geschwindigkeit $v' + u$, und da, wie schon bemerket worden, diese Geschwindigkeit derjenigen v gleich sein muß, die N nach dem Stoße behält, so ist $v' + u = v$.

Wir

Wir haben demnach drei Gleichungen um die Geschwindigkeit v' des Schwerpunktes, die Geschwindigkeit v des N nach dem Stoße, in der Richtung TS, und die drehende Geschwindigkeit u des Punktes S zu bestimmen, nämlich

$$v = v' + u$$

$$u = \frac{N.D^2.(V - v)}{\int mr^2}$$

$$v' = \frac{N(V - v)}{L}$$

Wenn man in die erste die Werthe von v' und u aus der der zweiten und dritten eintauschet, so ist

$$v = \frac{N(V - v)}{L} + \frac{N.D^2(V - v)}{\int mr^2}$$

$$v.L.\int mr^2 = N.\int mr^2.(V - v) + N.D^2.L.(V - v)$$

$$v.L.\int mr^2 = N.\int mr^2 V - N.\int mr^2 v + N.D^2.L.V - N.D^2 L.v$$

$$v.L.\int mr^2 + N.\int mr^2 v + N.D.^2 L.v = N.\int mr^2 V + N.D^2 L.V$$

$$v[(L + N).\int mr^2 + N.D^2.L] = N(\int mr^2 + D^2.L).V$$

$$v = \frac{N.(\int mr^2 + D^2.L).V}{(L + N).\int mr^2 + N.D^2.L}$$

Folglich

$$V - v = V - \frac{N.V.\int mr^2 + N.V.D^2.L}{L.\int mr^2 + N.\int mr^2 + N.D^2.L}$$

$$= \frac{\left[\begin{array}{l} L.V.\int mr^2 + N.V.\int mr^2 + N.D^2.L.V \\ - N.V.\int mr^2 - N.V.D^2.L \end{array}\right]}{L.\int mr^2 + N.\int mr^2 + N.D^2.L}$$

$$= \frac{L.V.\int mr^2}{(N + L).\int mr^2 + N.D^2.L}$$

Setzet man diesen Werth von V — v in die obigen von u und von v', so kömmt

$$u = \frac{L.N.D^2.V}{(N+L).\int mr^2 + N.D^2.L}$$

$$v' = \frac{N.V.\int mr^2}{(N+L).\int mr^2 + N.D^2.L}$$

Nachdem die Geschwindigkeit v des Körpers N nach dem Stoße in der Richtung TS bestimmet worden, so muß man sie mit der Geschwindigkeit CI oder TA, welche keine Veränderung gelitten hat, zusammensetzen, um die absolute Geschwindigkeit und die Richtung des N nach dem Stoße zu bekommen.

Zusatz. Wenn beide Körper Kugeln sind, so gehet die TS allemal durch den Mittelpunkt G, und es wird GS (= D) = o. In diesem Falle wird die drehende Geschwindigkeit $u = o$, die Geschwindigkeiten v und v' werden gleich, und jede $= \frac{N.V}{N+L}$, welches mit der Regel für den geraden Stoß zustimmet (Hauptst. II, §. 6), wenn man nur bemerket, daß hier, wegen der Ruhe des L, keine Quantität der Bewegung null ist.

Anmerkung I. Wir haben stillschweigend vorausgesetzet, daß beide Körper unelastisch sind; wären sie elastisch, so würde dieser Umstand die Resultate verändern. Es ist aber nicht nöthig, daß wir uns hier in die Untersuchung dieses Falles einlassen.

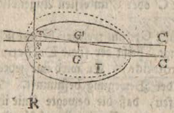
Anmerkung II. Wir haben ferner angenommen, daß der Körper L vor dem Stoße ruhend war. Wäre er in Bewegung, so müßte die Geschwindigkeit des N vor dem Stoße in zwei andere zerleget werden, deren eine mit der Geschwindigkeit des L gleich und parallel wäre. Diese würde beim Stoße ohne Wirkung bleiben. Ferner

würde

würde man die zweite so behandeln, wie vorher die CA, und dabei den L als ruhend betrachten.

§. 28.

Wenn ein Körper L, welcher frei ist, einen Stoß oder Eindruck in einer Richtung RS bekömmt, die nicht durch den Schwerpunkt G gehet, so haben wir gesehen (§. 6), daß der Schwerpunkt G in der Richtung G′G mit



RS parallel gehet, und daß unterdessen alle Punkte des Körpers sich um G drehen, daß auch dieses Drehen eben so geschiehet, als wenn in G eine feste Axe wäre, auf der Ebne senkrecht, die durch RS und G gehet, falls diese Ebne den Körper in zwei ähnlichgleiche Theile zerschneidet (§. 25). Dieses letzte wollen wir annehmen. In der gemeldeten Ebne ziehen wir eine Linie CGS durch G und auf RS senkrecht. Stellet man sich diese Linie als mit dem Körper L verbunden vor, so drehet sie sich mit ihm. Nun ist leicht einzusehen, daß in dieser Linie irgend wo ein Punkt sein muß, um welchen sie sich im ersten Augenblicke der Bewegung zu drehen anfängt. Denn gesetzet, in diesem ersten Augenblicke sei der Punkt G bis G′ vorgerücket, so würde die Linie CS sich in der Lage C′S′ befinden, wenn sie sich nicht drehete. Weil sie sich aber drehet, so ist der eine Theil derselben G′C′ unterdessen rückwärts gegangen,

von

von den beiden Winkeln CGG′ und C′G′G ist der letzte nicht mehr ein rechter, sondern er ist kleiner, als ein rechter; also muß jezt die drehende Linie ihre vorige Lage CG irgend wo in C schneiden, so daß man sich vorstellen kann, sie habe sich in diesem ersten Augenblicke um den Punkt C gedrehet. Man ziehe CC′ mit GG′ parallel, so kann man annehmen, daß der Punkt C′ von C′ bis C in einer kleinen geraden Linie, die hier die Stelle eines kleinen Zirkelbogens vertritt, zurück gegangen sei, während daß der Punkt G bis G′ gekommen ist; woraus wiederum erhellet, daß der Punkt C′ oder C im ersten Augenblicke unbewegt bleiben muß.

Dieser Punkt C, um welchen herum sich der Körper zu drehen anfängt, heißt der freie **Drehepunkt** (centre spontanée de rotation). Er wird nur jedesmal für den ersten Anfang der Bewegung bestimmet. Denn es ist leicht zu begreifen, daß die bewegte Linie ihre erste Lage CS allmählig in andern Punkten durchschneidet, und der Punkt C folglich nichts weniger als unveränderlich ist. Die Betrachtung dieses freien Drehpunktes kann demnach nur auf sehr kleine Bewegungen, oder auf den bloßen Anfang einer Bewegung angewandt werden.

§. 29.

Aufgabe.

Den freien Drehepunkt eines Körpers finden.

Man verlängere RS nach T hin, und CG′ ebenfalls bis sie die verlängerte RS in T durchschneidet, und stelle sich vor, die Linie C′S′ habe sich in die Lage CT begeben; so sind C′C, ST, kleine Zirkelbögen, die aber als gerade, auf C′S′ senkrechte Linien betrachtet werden können. Nun sind CC′G′ und TS′G′ ähnliche Dreiecke. Folglich ist

$$G'S' : G'C' :: S'T : CC'$$

oder $$GS : GC :: S'T : CG'$$

Ist

Ist nun R die in der Richtung RS wirkende Kraft, und L die Masse des Körpers, so haben wir gefunden (§. 26) die Geschwindigkeit GG′ des Schwerpunktes $= \frac{R}{L}$ und die drehende Geschwindigkeit S′T des Punktes S $= \frac{R \times GS^2}{\int m r^2}$, wo r die Entfernung jedes Pünktchens von der durch G gelegten Axe vorstellet. Folglich

$$GS : GC :: \frac{R \times GS^2}{\int m r^2} : \frac{R}{L}$$

daher $$GC = GS \times \frac{R}{L} : \frac{R \times GS^2}{\int m r^2}$$

$$GC = \frac{GS \times R \times \int m r^2}{L \times R \times GS^2}$$

$$GC = \frac{\int m r^2}{L \times GS}$$

Zusatz I. Das Integral $\int m r^2$ ist der Exponent der Trägheit, in Betreff der Axe, die durch den Schwerpunkt G gehet, und L × GS ist das Moment der Schwere, in Betreff des Punktes S. Würde also der Körper L als ein Pendel in S angehänget, so wäre C dessen Schwingepunkt (Hauptst. V, §. 30).

Zusatz II. Und da der Schwingepunkt und der Aufhängepunkt sich verwechseln lassen (Hauptst. V, §. 31), so würde S der Schwingepunkt sein, wenn man den Körper als ein Pendel in C aufhinge.

Zusatz III. Aus dem ersten Zusatze folget, daß der freie Drehepunkt C eben so gefunden wird, als der Schwingepunkt, wenn man sich in S eine Axe gedenket, um welche herum der Körper L sich vermöge seiner Schwere schwinget.

Zusatz IV. Aus $GC = \frac{\int mr^2}{L \times GS}$ siehet man, daß die Entfernung des freien Drehepunktes vom Schwerpunkte gar nicht von der Größe der Kraft R abhänget, sondern nur von ihrer Entfernung GS vom Schwerpunkte. Je größer diese Entfernung ist, desto kleiner ist GC, und je kleiner GS ist, desto größer wird GC.

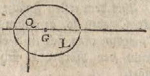
§. 30.

Wir haben gesehen, daß Körper, die sich um eine unbewegte Axe drehen, einen **Schlagpunkt** haben, das heißt, einen Punkt, wo der Schlag eines solchen Körpers gegen einen andern genau so groß ist, als das Produkt der Masse mit der Geschwindigkeit des Schwerpunktes (§. 13 und §. 18, Anmerk.). Wir haben auch gefunden, daß dieser Schlagpunkt mit dem Schwingepunkte einerlei ist (§. 14). Es läßt sich leicht begreifen, daß auch bei solchen Körpern, die sich frei drehen, ein Schlagpunkt Statt findet, das heißt, ein solcher Punkt, durch welchen die ganze Quantität der Bewegung, als Kraft betrachtet, ihre Richtung hat. Diesen laßt uns jetzt erforschen, um zu sehen, ob er bei der freien Bewegung noch eben so ausfallen wird, oder nicht.

§. 31.

Den Schlagpunkt eines Körpers finden, der sich frei drehet.

Bei der Bewegung des Körpers L heben sich die drehenden Bewegungen aller Theilchen um den Schwerpunkt



G her-

G herum einander auf, so daß die wirklich übrig bleibende Quantität der Bewegung nicht mehr beträgt, als das Produkt der Masse mit der Geschwindigkeit des Schwerpunktes (§. 8). Es sei diese Geschwindigkeit $= v$, so ist demnach die ganze Kraft des bewegten Körpers $= L \times v$. Um aber den Punkt Q zu bestimmen, durch welchen diese Kraft gehet, bedenke man, daß er so gelegen sein muß, daß, wenn in Q eine gleiche Kraft wirkete sie im Körper dieselbige Bewegung, und folglich dieselbige Winkel-Geschwindigkeit hervorbrächte. Wenn nun in Q eine Kraft $= L \times v$ wirket, so ist die daraus entstehende Winkel-Geschwindigkeit (§. 26)

$$\varphi = \frac{(L \times v).\, GQ}{\int mr^2}$$

daher $\varphi. \int mr^2 = (L \times v).\, GQ$

und $\dfrac{\varphi}{v}. \dfrac{\int mr^2}{L} = GQ$

Zusatz I. Hieraus siehet man, daß bei einer freien Bewegung der Schlagpunkt anders ausfällt, als bei der Bewegung um eine feste Axe herum. Wenn die Bewegung frei ist, so beruhet der Abstand GQ auf dem Verhältnisse $\frac{\varphi}{v}$ zwischen der Winkel-Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit des Schwerpunktes.

Zusatz II. Der Schlagpunkt ist zugleich derjenige, welchen man aufhalten muß, wenn die ganze Bewegung des Körpers aufhören soll.

Zusatz III. Wenn in $GQ = \frac{\varphi}{v}. \frac{\int mr^2}{L}$ die Winkel-Geschwindigkeit φ null wird, so wird auch $GQ = 0$, das heißt, wenn der Körper sich nicht drehet, so ist der Mittelpunkt zugleich der Schlagpunkt, welches auch natürlich ist.

§. 32.

Der kurze Inhalt der ganzen Lehre von der drehenden Bewegung ist dieser. Wenn ein Körper oder ein System von kleinen Körpern, welches mit einer unbeweglichen Axe verbunden ist, einen Stoß bekömmt, der auf der Ebne senkrecht ist, die durch die Axe und den gemeinsamen Schwerpunkt gehet, so entstehet eine Winkel-Geschwindigkeit, welche zu finden, man dividiren muß das Moment der Kraft in Betreff der Axe, durch den Exponenten der Trägheit des Körpers oder Systemes, in Betreff derselbigen Axe.

Und die Geschwindigkeit jedes Punktes im Körper oder Systeme wird erhalten, wenn man die Winkel-Geschwindigkeit mit der Entfernung des Punktes von der Axe multiplizirt.

Bei den angeführten Umständen giebt es allemal einen Punkt, wo der drehende Körper einen anderen, an welchem er stößt, mit einer solchen Kraft schlägt, die dem Produkte aus der Masse des drehenden Körpers und der Geschwindigkeit seines Schwerpunktes gleich ist. Dieser Punkt heißt der Schlagpunkt, und er ist mit dem Schwingepunkte einerlei, welcher im vorigen Hauptstücke untersuchet worden.

Wenn ein frei bewegter Körper an einen anderen stößt, der sich nur um eine gewisse Axe drehen kann, so läßt sich die Bewegung beider nach dem Stoße bestimmen.

Wenn eine Stange, die sich um eines ihrer Enden drehet, gegen einen beweglichen oder unbeweglichen Gegenstand stößt, so läßt sich ebenfalls die Wirkung des Schlages berechnen, und diese ist nicht im Schlagpunkte am größten.

Wenn ein Körper, welcher frei, und an keine Axe gebunden ist, einen Stoß oder einen Reiz zur Bewegung bekömmt, und wenn die Richtung der Kraft durch den

Schwer-

Schwerpunkt gehet, so läuft dieser Schwerpunkt in der Richtung der Kraft fort, und alle Theilchen des Körpers laufen mit ihm parallel.

Gehet aber die Richtung der Kraft nicht durch den Schwerpunkt, so läuft dennoch der Schwerpunkt eben so, als wenn die Kraft unmittelbar auf ihn wirkete. Der Körper bekömmt aber zugleich eine drehende Bewegung. Wenn es sich dabei trift, daß die Ebne, die durch den Schwerpunkt und durch die Richtung der Kraft gehet, den Körper in zwei ähnlichgleiche Theile zerschneidet, so drehet sich der Körper um eine eingebildete Axe, die durch den Schwerpunkt gehet, und auf die gemeldete Ebne senkrecht ist, eben so, als wenn diese Axe unbeweglich wäre.

Wenn zwei freie Körper, deren keiner mit irgend einer Axe verbunden ist, an einander stoßen, so lassen sich sowohl die progressiven als auch die drehenden Bewegungen, welche nach dem Stoße Statt finden, bestimmen.

Wenn ein freier Körper die Wirkung einer Kraft empfängt, deren Richtung nicht durch den Schwerpunkt gehet, so stellet man sich in demselben eine gerade Linie vor, die durch den Schwerpunkt gehet, und auf der Richtung der Kraft senkrecht ist. Diese drehet sich im Anfange der Bewegung um einen ihrer Punkte, welchen man den freien Drehepunkt nennen kann. Dieser Punkt ist der nämliche, als der Schwingepunkt des Körpers, wenn man sich einbildet, der Körper sei an demjenigen Punkte angehänget, wo die gedachte drehende Linie von der Richtung der Kraft geschnitten wird.

Ein freier Körper, der sich drehet, hat auch einen Schlagpunkt; dieser ist aber nicht wie bei solchen Körpern, die sich um eine Axe drehen, mit dem Schwingepunkte einerlei; er dependirt zum Theile von der Winkelgeschwindigkeit und von der Geschwindigkeit des Schwerpunktes.

Sieben=

Siebentes Hauptstück.

Von der Bewegung, die aus einer Zentralkraft und der Fliehkraft entstehet.

§. 1.

Eine Zentralkraft (force centripète), ist eine solche, die sich bestrebet, einen Körper, in welcher Lage er auch sei, nach einem gewissen unveränderten Punkte hin zu bringen, und diesen Punkt, wohin der Körper beständig zielet, können wir den Kraftpunkt nennen. Zum Exempel, die Fallkraft, die auf alle Körper in der Nachbarschaft der Erde wirket, und ihre Schwere verursachet, ist eine Zentralkraft, weil sie die Körper nach dem Mittelpunkte der Erde hintreibet, welcher Mittelpunkt hier der Kraftpunkt ist.

Anmerkung. Wie eigentlich die Ursache beschaffen sei, welche als Zentralkraft wirket, ob sie wie ein flüssiges Wesen wirket, das beständig dem Kraftpunkte zuströmet, oder ob sie auf eine unbegreifliche Art aus dem Kraftpunkte wirket, und das Bewegbare an sich ziehet, dieses gehet dem Mathematiker nichts an, der sich damit begnüget, daß er durch die Erfahrung und andre Gründe vom Dasein solcher Kräfte überzeuget ist. Man hat den höchsten Grad der Wahrscheinlichkeit, daß im Weltsysteme solche Zentralkraft vorhanden sei, vermittelst welcher jeder Himmelskörper alle übrigen, und hauptsächlich die Sonne alle Planeten und Kometen gleichsam an sich ziehet. Auch dienet gegenwärtige

Lehre

Lehre von Zentralkräften hauptsächlich als eine Vorbereitung zur Astronomie.

§. 2.

Wenn ein Körper, welcher vermöge einer Zentralkraft, nach einem gewissen unverrückten Punkte hingetrieben oder gezogen wird, dabei noch einen Stoß bekömmt, dessen Richtung nicht durch den Kraftpunkt gehet, so kann er nicht in der Richtung des Stoßes gerade fortgehen, sondern die Zentralkraft bieget seine Bahn beständig nach dem Kraftpunkte hin, und zwinget ihn folglich, eine krumme Linie zu beschreiben, wie z. E. ein geworfener Stein, der nicht in der Richtung des Wurfes gerade weg gehet, sondern seine Bahn nach dem Mittelpunkte der Erde zu krümmet. Sollte aber die Zentralkraft mit einmal aufhören zu wirken, so würde der Körper mit der zuletzt erhaltenen Geschwindigkeit und Richtung seinen Weg fortsetzen. Diese zuletzt erhaltene Richtung ist nichts anders, als die Verlängerung des letztern Theilchens der krummen Bahn, oder die Tangente der krummen Linie für ihren letzten Punkt. Woraus sich dann begreifen läßt, daß dasjenige, was den Körper verhindert, gerade zum Kraftpunkte zu gehen, nichts anders ist, als ein Bestreben, welches er in jedem Augenblicke äußert, in der jetzigen Richtung der Tangente seiner Bahn davon zu fliehen. Dieses Bestreben, welches vom ursprünglichen Stoße herrühret, wollen wir die **Fliehkraft** nennen (force centrifuge, force tangentielle). Denn anstatt des gedachten Bestrebens läßt sich eine besondere Kraft gedenken, die im jetzigen Augenblicke auf den Körper in der Richtung der Tangente wirket, um ihm die Geschwindigkeit zu geben, die er wirklich haben würde, wenn die Zentralkraft mit einmal vernichtet würde.

Von allen diesem kann man sich einen Begriff machen, wenn man eine Kugel, die an einem schwachen Faden gebun-

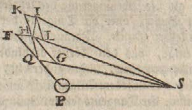
gebunden ist, so lange herum schleudert, bis daß der Faden bricht; alsdann läuft die Kugel in einer Linie fort, deren Anfang nichts anders ist, als die Tangente für den letzten Punkt des Zirkels, den sie beschrieben hat. Die Hand, welche die Kugel vermittelst des Fadens zurück hält, vertritt hier die Stelle der Zentralkraft.

§. 3.

Lehrsatz.

Wenn ein Körper sich vermittelst einer Zentralkraft und eines Stoßes beweget, so lieget seine Bahn in einer Ebne, die durch die Richtung des Stoßes und durch den Kraftpunkt gehet.

Man kann sich vorstellen, die Zentralkraft wirke nicht kontinuirlich, sondern stoßweise, in unendlich kleinen gleichen Zeiträumen.



Es sei S der Kraftpunkt, P der Körper. Dieser bekomme im Anfange des ersten Zeittheilchens einen Stoß, der ihm die Richtung und Geschwindigkeit PQ giebt. Da von gleichen Zeittheilchen die Rede ist, so können wir jeden für die Einheit der Zeit annehmen, und den in einem solchen Zeiträumchen durchlaufenen Weg die dermalige Geschwindigkeit des Körpers nennen. Nun würde der Körper, wenn nichts hinderte, während dem zweiten Zeittheilchen den Raum QF = PQ durchlaufen. Gesetzt

aber,

aber, er bekomme im Anfange des zweiten Zeittheilchens einen Stoß mit der Geschwindigkeit QG nach dem Kraftpunkte S hin, so wird er gezwungen, mit der Geschwindigkeit QH längs der Diagonal-Linie des Parallelogramms GF zu gehen. Nun hat er die Geschwindigkeit QH, und würde, sich selbst überlassen, im dritten Zeittheilchen den Raum HK = QH durchlaufen. Er bekömmt aber im Anfange des dritten Zeittheilchens einen Stoß HL nach dem Kraftpunkte S hin. Also durchläuft er die Diagonal-Linie HI des Parallelogramms LK, u. s. w.

Man verlängere die Ebne des Dreiecks PSQ, so liegt PQ in dieser Ebne, und folglich auch die Verlängerung der PQ, nämlich QF. Ferner liegt QG als ein Theil der QS auch in der Ebne SPQ. Da die drei Punkte S, Q und F in der Verlängerung der Ebne SPQ liegen, so lieget das Parallelogramm GF, und folglich dessen Diagonal-Linie QH darin. HK liegt in der verlängerten Ebne SQH, auch HL liegt darin, folglich auch das Parallelogramm LK und dessen Diagonal-Linie HI. Also liegt HI in der verlängerten Ebne des Dreiecks SQH, und dieses in der verlängerten Ebne des Dreiecks SPQ, folglich, wenn man auch unendlich viel solche Dreiecke gezeichnet hätte, so müssen sie alle in der Ebne des ersten liegen, das heißt, in derjenigen, die durch die Richtungslinie PF des ersten Stoßes, und durch den Kraftpunkt S gehet.

§. 4.

Lehrsatz.

Eine Bahn, die vermöge einer Zentralkraft und der Fliehkraft beschrieben wird, ist in allen ihren Theilen konkav, in Rücksicht auf den Kraftpunkt, und kann weder einen Biegungspunkt (point d'inflexion) noch einen Rückkehrpunkt (point de rebroussement) haben.

Die Wirkung der Zentralkraft bestehet darin, daß sie die gerade Bahn, die der Körper vermöge der Fliehkraft beschreiben würde, nach dem Kraftpunkte hin bieget, woraus eine Linie entstehen muß, die immer, in Rücksicht auf diesen Punkt, hohl oder konkav ist. Gesetzt auch, die Zentralkraft wirke bald stärker, bald schwächer, so kann es doch nie geschehen, daß der folgende Theil der Bahn, in Betreff des vorhergehenden, außerhalb der Tangente am Ende dieses vorhergehenden liege, denn sonst müßte die anziehende Kraft zurückstoßend werden, welches der Hypothese zuwider ist. Bei einem Biegungspunkt lieget aber allemal, von dem nächsten Theilchen der krummen Linie, der eine diesseits und der andere jenseits der Tangente. Also ist hier kein Biegungspunkt möglich. Auch kein Rückkehrpunkt kann Statt finden. Denn da die Fliehkraft immer vor sich weg und nicht rückwärts gehet, so ist nichts vorhanden, was die Bahn plötzlich zurück biegen könnte.

§. 5.

Lehrsatz.

Die Theile einer Bahn, welche vermöge einer Zentralkraft und der Fliehkraft beschrieben worden, sind um desto mehr gekrümmet, je mehr in einem solchen Theile die Fliehkraft von der Zentralkraft übertroffen wird.

Die gerade Bahn, welche der Körper vermittelst der Fliehkraft beschreiben würde, wird durch die Zentralkraft nach dem Kraftpunkte hin gebogen. Je größer also die Zentralkraft, in Vergleich mit der Fliehkraft ist, um desto geschwinder geschiehet die Biegung, und um desto krümmer wird die Bahn. Dieses siehet man auch an der letzten Figur. Wären die Wirkungen QG, HL der Zentralkraft größer gewesen, so würde die Linie PQHI mehr gekrüm-

gekrümmet sein; wären aber diese Wirkungen kleiner gewesen, so würde die Bahn nicht so sehr von der geraden PF abgewichen sein.

§. 6.

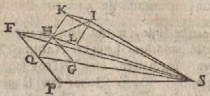
Die gerade Linie, welche vom Kraftpunkte bis zum bewegten Körper gehet, heißt der **Radius Vektor**: wir wollen, der Kürze halben, bloß **Vektor** sagen, und **Radius** weglassen. Dieser Vektor kann länger und kürzer werden. Um den Begriff des Vektors zu versinnlichen, stelle man sich ihn als einen Faden vor, woran der Körper gebunden ist, und den Kraftpunkt als einen Knauel, worauf der übrige Theil des Fadens, der nicht gerade ausgedehnet ist, aufgewickelt ist. Dieser Knauel läßt bald ein längeres Ende des Fadens frei, bald ein kürzeres, je nachdem sich der Faden auf- oder abwickelt. Oder man bilde sich eine dünne Stange vor, wovon ein Ende sich um den Kraftpunkt drehet, und auf welche der bewegte Körper aufgespießt ist, jedoch so, daß er sich dem unbeweglichen Punkte bald nähern, bald von ihm entfernen könne. Der jedesmalige Theil der Stange vom Kraftpunkte bis zum bewegten Körper wäre nun der Vektor. Indem dieser Vektor sich eine Zeitlang um den Kraftpunkt drehet, beschreibet er einen Raum, der ungefähr wie ein Zirkelausschnitt aussiehet, nur daß der äußere Bogen hier nicht allemal ein Zirkelbogen ist. Hieraus wird man verstehen, was das heißt, wenn man vom Ausschnitte spricht, den der Vektor beschreibet.

§. 7.

Lehrsatz.

In der Bahn eines und desselbigen Körpers, der durch eine Zentralkraft und die Fliehkraft bewegt wird, verhalten sich die vom Vektor beschrieben Ausschnitte allemal wie die Zeiten, während

rend welchen diese Ausschnitte oder ihre begränzenden Bögen beschrieben werden.

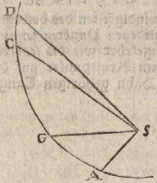


Die hier beigefügte Figur ist im Grunde die nämliche wie oben (Seite 328). Man siehet, wie der Körper im ersten Zeittheilchen, vermöge der durch den Stoß erhaltenen Fliehkraft, von P bis Q gehet. Im zweiten Zeittheilchen (sie werden alle von gleicher Dauer angenommen), gehet er von Q nach H, vermöge der zusammengesetzten Bewegung, die aus der Fliehkraft QF(= PQ) und der Zentralkraft = QG entstehet. Im dritten Zeittheilchen gehet er von H nach I, vermittelst der Fliehkraft HK(= QH) und der Zentralkraft = HL. Der Vektor beschreibet also im ersten Zeittheilchen das Dreieck PSQ, im zweiten das Dreieck QSH, im dritten das Dreieck HSI, u. s. w. Wir wollen beweisen, daß alle diese Dreiecke gleich sind.

Die Dreiecke PSQ und QSF sind gleich (am Flächen-Inhalte), weil sie gleiche Grundlinien PQ = QF, und ihre Scheitel in selbigem Punkte S haben. Die Dreiecke QSF und QSH sind wiederum gleich, weil sie auf derselbigen Grundlinie QS stehen, und ihre Scheitel in der Linie HF haben, die mit der Grundlinie QS gleichlaufend ist. Da nun $\triangle$ PSQ = $\triangle$ QSF = $\triangle$ QSH, so ist $\triangle$ PSQ = $\triangle$ QSH.

Ferner ist $\triangle$ QSH = $\triangle$ HSK, wegen der gleichen Grundlinien QH = HK, und der gemeinsamen Spitze S. Und

Und $\triangle HSK = \triangle HIS$, wegen der gemeinsamen Grundlinie HS und der Lage der Scheitel K und I, in der Linie KI, die mit HS gleichlaufend ist. Also $\triangle QSH = \triangle HSK = \triangle HIS$, oder $\triangle QSH = \triangle HSI$. Da nun $\triangle QSH = \triangle PSQ$, so ist $\triangle PSQ = \triangle QSH = \triangle HSI$. Und so kann der Beweis während der ganzen Bewegung fortgesetzet werden. Die in gleichen Zeittheilchen beschriebenen Dreieckchen sind alle am Flächen-Inhalte gleich.



Gesetzt nun, die Bewegung des Körpers von A bis G daure eine gewisse Zeit t, und die Bewegung in einem anderen Theile der Bahn, z. E. von C bis D, daure eine andere Zeit T, so verhalten sich diese Zeiten t und T wie die Anzahlen der gleichen Zeittheilchen, woraus sie bestehen. Die Flächen der Ausschnitte ASG und CSD verhalten sich wie die Anzahlen der gleichen Dreieckchen, woraus sie bestehen, und wovon jedes in einem Zeittheilchen vom Vektor beschrieben worden. Diese Anzahlen der Dreieckchen verhalten sich wie die Anzahlen der verflossenen Zeittheilchen, und diese, wie gesagt, verhalten sich wie die verflossenen Zeiten selbst. Also ist

Ausschn. ASG : Ausschn. CSD :: t : T.

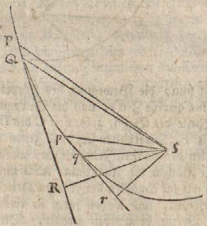
Anmerkung. Dieses Gesetz der Bewegung ist von Kepler, einem berühmten deutschen Astronomen, der von 1571 bis 1630 lebte, entdeckt worden.

Zusatz. Aus der bewiesenen Proporzion und aus dem Beweise selbst erhellet, daß in gleichen Zeiten gleiche Ausschnitte vom Vektor beschrieben werden.

§. 8.

Lehrsatz.

Die Geschwindigkeiten des bewegten Körpers, in zwei verschiedenen Punkten seiner Bahn, verhalten sich umgekehrt wie die senkrechten Linien, welche aus dem Kraftpunkte auf die zu beiden Punkten der Bahn gehörigen Tangenten gefället werden.



Es seien PQ und *pq* zwei willkührliche Theilchen der Bahn, und PSQ, *pSq* die zustimmenden Ausschnitte. Da wir

wir PQ und pq sehr klein annehmen, so können sie für gerade Linien gelten, und die Bewegung in diesen kleinen Räumen PQ und pq kann als einförmig betrachtet werden. Es sei T die Zeit der Bewegung in PQ, und t die Zeit der Bewegung in pq, G die Geschwindigkeit in PQ, und g die Geschwindigkeit in pq, so ist erstlich (§. 7)

$$T : t :: \triangle PSQ : \triangle pSq$$

Die Tangenten QR, qr sind die Verlängerungen der kleinen Seiten PQ, pq; und wenn man PQ, pq als die Grundlinien der Dreiecke PSQ, pSq betrachtet, so sind die auf die Tangenten gefällten Linien SR, Sr die Höhen der nämlichen Dreiecke, und es ist $\triangle PSQ = \frac{1}{2} PQ \times SR$, $\triangle pSq = \frac{1}{2} pq \times Sr$. Also

$$T : t :: (\tfrac{1}{2} PQ \times SR) : (\tfrac{1}{2} pq \times Sr)$$
$$T : t :: (PQ \times SR) : (pq \times Sr)$$

Ferner ist, vermöge des Gesetzes der einförmigen Bewegung, $PQ = G \times T$, und $pq = g \times t$, daher

$$T : t :: (G \times T \times SR) : (g \times t \times Sr)$$
$$1 : 1 :: (G \times SR) : (g \times Sr)$$
$$G \times SR = g \times Sr$$
$$G : g :: Sr : SR$$

wodurch unser Satz bewiesen ist.

Zusatz I. Wenn ein Körper, vermöge einer Zentralkraft und der Fliehkraft, einen Zirkel beschreibet, so ist die Geschwindigkeit in allen Punkten der Bahn gleich: denn in diesem Falle sind die gedachten senkrechten Linien alle gleich, indem sie die Halbmesser selbst sind.

Zusatz II. Je mehr sich die Bahn oder ein Theil der Bahn der Gestalt eines Zirkels oder Zirkel-Bogens nähert, wovon der Mittelpunkt im Kraftpunkte ist, desto mehr nähert sich die Geschwindigkeit der Einförmigkeit, weil

weil alsdann der Unterschied zwischen den auf einander folgenden senkrechten Linien, wovon die Rede ist, nicht viel beträgt, und also auch der Unterschied der Geschwindigkeiten nur geringe ist.

§. 9.

Wenn man die Bewegung des Vektors um den Kraftpunkt herum betrachtet, so siehet man, daß der Vektor in einer gewissen Zeit einen gewissen Winkel durchläuft, den wir den **Winkelweg** nennen wollen. Theilet man die Zeit in gleiche Theile, wovon jeder als das Maaß oder die Einheit der Zeit betrachtet wird, so ist der in solcher Zeit-Einheit beschriebene Winkel die **Winkel-Geschwindigkeit** (Hauptst. I, §. 12). Hierbei muß das Zeitmaaß kurz genug angenommen werden, um daß die allmählige Zunahme des Winkels als einförmig betrachtet werden könne. Man verwechsele diese Winkel-Geschwindigkeit nicht mit der Geschwindigkeit des Körpers selbst in seiner Bahn, wovon §. 8 geredet worden.

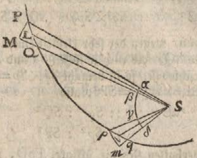
§. 10.

Lehrsatz.

Wenn ein Körper durch eine Zentralkraft und die Fliehkraft beweget wird, so verhalten sich seine Winkel-Geschwindigkeiten, in zwei verschiedenen Punkten seiner Bahn, umgekehrt, wie die Quadrate der zustimmenden Vektoren.

Es bewege sich der Körper während einer kurzen Zeit von q bis p, (folg. Fig.) und in einer andern gleichen Zeit von Q bis P. Man ziehe die Vektoren qS, pS, QS, PS. Man verlängere Sq und SQ, und aus dem Mittelpunkte S beschreibe man die Zirkelbögen pm und PM, welche als gerade auf Sq und SQ senkrechte Linien betrachtet werden können. Es sei $S\alpha$ ein beliebiger beständiger Halbmesser.

Mit



Mit diesem beschreibe man aus S, als Mittelpunkt, den Zirkel oder Zirkelbogen $\alpha\delta$. So ist.

$$SP : S\alpha :: PM : \alpha\beta$$

daher $$PM = \frac{SP \times \alpha\beta}{S\alpha}$$

Eben so ist $$Sp : S\gamma :: pm : \gamma\delta$$

daher $$pm = \frac{Sp \times \gamma\delta}{S\gamma}$$

Da die Linien PQ, pq in gleichen Zeiten beschrieben sind, so sind die Dreiecke PSQ und pSq gleich (§. 7, Zus.). Wenn nun SQ, Sq als Grundlinien angenommen werden, so sind PM, pm die Höhen, also $\triangle PSQ = \frac{1}{2} SQ \times PM$, und $\triangle pSq = \frac{1}{2} Sq \times pm$. Also

$$\tfrac{1}{2} SQ \times PM = \tfrac{1}{2} Sq \times pm$$

oder $$SQ \times PM = Sq \times pm$$

oder $$\frac{SQ \times SP \times \alpha\beta}{S\alpha} = \frac{Sq \times Sp \times \gamma\delta}{S\gamma}$$

und da $Sa = S\gamma$

$SQ \times SP \times \alpha\beta = Sq \times Sp \times \gamma\delta$

daher $\alpha\beta : \gamma\delta :: (Sq \times Sp) : (SQ \times SP)$

Weil nun, wegen der sehr kleinen Linien PQ, pq, zwischen SP und SQ, wie auch zwischen Sp und Sq kein merklicher Unterschied ist, so ist beinahe $Sq \times Sp = Sq^2 = Sp^2$, und $SQ \times SP = SQ^2 = SP^2$, also

$$\alpha\beta : \gamma\delta :: Sq^2 : SQ^2$$
$$:: Sp^2 : SP^2$$

Nun verhalten sich die Winkel PSQ, pSq, wie die Bögen $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$, Also

$$\angle PSQ : \angle pSq :: Sq^2 : SQ^2$$

Ist die angenommene Zeit, selbst Einheit der Zeit, so sind $\angle PSQ$ und $\angle pSq$ die Winkel-Geschwindigkeiten; sind sie es nicht, so werden sie doch klein genug angenommen, um daß die Winkel-Bewegung für einförmig gehalten werden könne; und in diesem Falle ist es wie bei jeder einförmigen Bewegung: bei gleichen Zeiten verhalten sich die Geschwindigkeiten wie die Wege, also auch die Winkel-Geschwindigkeiten wie die Winkelwege; also verhalten sich allemal die Winkel-Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen vom Kraftpunkte.

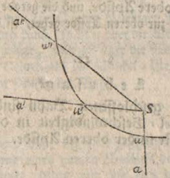
Zusatz I. Wenn man es genauer haben will, so halbire man PQ und pq in L und l. Dann wird SL nicht viel von der mittleren Proporzional-Linie zwischen SP und SQ verschieden sein, so daß man annehmen könne $SP \times SQ = SL^2$. Eben so wird man annehmen können $Sp \times Sq = Sl^2$. Man kann also noch bestimmter sagen

$$\alpha\beta : \gamma\delta :: Sl^2 : SL^2$$

Anmerkung. So lange SQ und Sq eine bestimmte Länge haben, so sind die gefundenen Proporzionen nur ohnge-

ohngefähr wahr. Sie werden aber wahr nach aller Strenge, wenn PQ und pq unendlich klein sind, oder wenn die Punkte P und Q, desgleichen p und q zusammen fallen.

Zusatz II. Wenn man die Winkel-Geschwindigkeiten eines Körpers in vielen Punkten oder kleinen Theilen seiner Bahn weiß, so läßt sich die Gestalt der Bahn darnach zeichnen.



Gesetzt, der Körper werde aus dem Kraftpunkte S nach und nach in den Richtungen Sa, Sa', Sa'' gesehen, und man beobachte seine Winkel Geschwindigkeiten u, u', u''; so nehme man willkührlich die Länge Su. Nun sage man

$$u' : u :: Su^2 : Su'^2$$

oder $\sqrt{u'} : \sqrt{u} :: Su : Su'$

Ferner $\sqrt{u''} : \sqrt{u} :: Su : Su''$

und so mit mehreren Stellen. Auf solche Art bekömmt man die Punkte u, u', u'', wodurch eine Linie gehet, die der verlangten Bahn ähnlich sein muß.

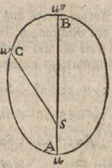
§. 11.

Je nachdem die Zentralkraft wirket, und der erste Stoß der Fliehkraft geschiehet, kann die Bahn entweder eine geschlossene Linie sein, wie z. E. eine Ellipse, oder auch ins Unendliche fortgehen, wie eine Parabel, welches in der Folge deutlicher werden wird. Ist die Bahn geschlossen, so nennet man die Punkte, wo sie dem Kraftpunkte am nächsten oder von ihm am entferntesten ist, die Apsiden; der nächste Punkt ist die untere Apside, der entfernteste die obere Apside, und die gerade Linie, welche von der unteren zur oberen Apside gehet, ist die Apsiden-Linie.

§. 12.

Lehrsatz.

In einer geschlossenen Bahn findet sich die größte Winkel-Geschwindigkeit in der unteren, und die kleinste in der oberen Apside.



Denn es sei in der unteren Apside bei A die Winkel-Geschwindigkeit u, und in der oberen bei B sei sie u''.

Ferner,

Ferner, in einem anderen Punkte C sei die Winkel-Geschwindigkeit u', so ist (§. 10)

$$SA^2 : SC^2 :: u' : u$$

Da nun S die untere Apside, und folglich SA die kleinste Entfernung vom Kraftpunkte S ist, so ist $SA < SC$, also $SA^2 < SC^2$, also auch u' kleiner als u.

Eben so ist $SB^2 : SC^2 :: u'' : u'$

Da nun $SB > SC$, folglich $SB^2 > SC^2$, so ist $u' > u''$.

Und da man für C jeden beliebigen Punkt außer den Apsiden nehmen kann, so ist u oder die Winkel-Geschwindigkeit in A größer, und u'' oder die Winkel-Geschwindigkeit in B kleiner als die Winkel-Geschwindigkeit in jedem anderen Punkte der Bahn.

§. 13.

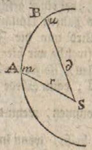
Es ist klar, daß, bei einer geschlossenen Bahn, der Vektor während eines ganzen Umlaufs des Körpers 360 Grad durchläuft. Wird nun die Zeit des Umlaufs in Stunden gerechnet, (welche wir hier anstatt jedes andern Zeitmaaßes setzen wollen), so sei die Anzahl der Stunden des ganzen Umlaufs T; dann würde auf jede Stunde ein Winkel von $\frac{360^g}{T}$ kommen, wenn die Winkelbewegung einförmig wäre, das heißt, wenn in gleichen Zeittheilen gleiche Winkel beschrieben würden. Diese Winkel-Geschwindigkeit, welche entstehet, wenn man 360 Grad durch die Anzahl der Zeittheile dividiret, wird die mittlere Winkel-Geschwindigkeit genannt, und zum Unterschiede nennet man den Winkel, den der Vektor wirklich in einem gegebenen Zeittheile beschreibet, die wahre Winkel-Geschwindigkeit.

Es ist klar, daß die mittlere Winkel-Geschwindigkeit kleiner ist als die wahre in der untern Apside, und größer als die wahre in der obern Apside, und daß sich irgend wo in der Bahn eine Stelle finden muß, wo beide Winkel-Geschwindigkeiten, die mittlere und die wahre, gleich sind. Diese Stelle kann allemal durch eine Reihe aufeinander folgender Beobachtungen gefunden werden.

§. 14.

Lehrsatz.

Das Quadrat des Vektors, in einem beliebigen Punkte der Bahn, verhält sich zum Quadrate des Vektors in dem Punkte, wo die wahre Winkel-Geschwindigkeit der mittleren gleich ist, wie die mittlere Winkel-Geschwindigkeit zur wahren, in jenem beliebigen Punkte.



Gesetzt, es sei A die Stelle, wo beide Winkel-Geschwindigkeiten, die mittlere und die wahre, gleich sind, und diese zugleich mittlere und bei A wahre Geschwindigkeit sei m. An einem andern Orte B sei die wahre Geschwindigkeit u, so wissen wir (§. 10), daß

$$SB^2 : SA^2 :: m : u$$

oder

oder wenn man sezet SB = d, und SA = r, so ist

$$d^2 : r^2 :: m : u$$

Zusaz I. Die mittlere Geschwindigkeit m (welche bei A der wahren gleich ist), wird ausgedrücket durch $\frac{360^g}{T}$ (§. 13). Also ist

$$d^2 : r^2 :: \frac{360^g}{T} : u$$

daher $$d^2 = \frac{r^2 \times 360^g}{T \times u}$$

und $$d = r \sqrt{\left(\frac{360^g}{T \times u}\right)}$$

so daß man allemal den Vektor d finden kann, wenn man nur die Zeit T des ganzen Umlaufes, den Vektor r, und und die Winkel-Geschwindigkeit für die Stelle weiß, wo der Vektor d hinzielet.

Zusaz II. Da aus dem Vektor r, nebst der Zeit t und der Geschwindigkeit u, jeder mit jedem u zustimmende Vektor gefunden wird, so läßt sich auf diese Art, wenn r willkührlich angenommen wird, oder bekannt ist, die Gestalt der Bahn finden, noch bequemer als vorher (§. 10, Zusaz II).

Zusaz III. Wenn die Winkel-Geschwindigkeit sich nur langsam verändert, so kann man sie während mehreren Stunden, z. E. 4 Stunden, als einförmig annehmen, und diese Zeit von 4 Stunden (oder so viel man festgesezet hat), zum Zeitmaaße nehmen. In diesem Falle ist die Zeit des Umlaufes nicht T in Stunden, sondern $\frac{T}{4}$, oder überhaupt ist sie $\frac{T}{t}$ in Zeittheilen von t Stunden, wo t eine kleine Anzahl von Stunden bedeutet. Als-dann wird

$$d = r \sqrt{\left(\frac{t \times 360^g}{T \times u}\right)}$$

§. 15.

Wenn die Bahn eine geschlossene Linie bildet, so läßt sich allemal ein Kreis gedenken, dessen Fläche eben so groß ist, als die Fläche der gedachten Bahn. Z. E. wenn die Bahn eine Ellipse ist, so darf man nur zwischen der halben großen und der halben kleinen Axe die mittlere Proportional-Linie suchen, und mit dieser als Halbmesser einen Kreis beschreiben. Dann sind beide Flächen-Inhalte gleich (Höhere Geometr. XI. Hauptst. §. 4. Ex. IV).

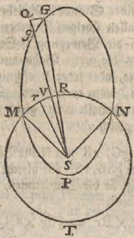
§. 16.

Lehrsatz.

Wenn die Bahn eine geschlossene Linie bildet, und wenn aus dem Kraftpunkte ein Kreis beschrieben wird, welcher am Flächen-Inhalte so groß ist, als die Bahn selbst, so ist, an den Stellen, wo die Bahnlinie von der Kreislinie geschnitten wird, die wahre Winkel-Geschwindigkeit der mittleren gleich, und je schiefer der Durchschnitt geschiehet, desto schneller geschiehet die Abweichung der wahren Winkel-Geschwindigkeit von der mittleren.

Ein Körper beschreibe um den Kraftpunkt S herum (folg. Fig.) die geschlossene Bahn PMGNP. Man stelle sich einen anderen Körper vor, der in der nämlichen Zeit den Zirkel TMRNT beschreibet, dessen Fläche der Fläche jener Bahn gleich ist, so daß sie beide ihren Umlauf zugleich anfangen und zugleich endigen. So ist schon bekannt, daß der Körper in dem Zirkel-Umkreise mit ein-

förmiger



förmiger Geschwindigkeit gehet (§. 8. Zus. I). Dauret also der ganze Umlauf z. E. T Stunden, so ist die Winkel-Geschwindigkeit für jede Stunde $\frac{360^g}{T}$. Eben dieses ist aber auch die mittlere Winkel-Geschwindigkeit des Körpers in der gegebenen Bahn (§. 13). Also ist die Winkel-Geschwindigkeit im Zirkel der mittleren Winkel-Geschwindigkeit in der andern Bahn gleich.

Gesetzt nun, der Körper in der Bahn durchlaufe in der jetzigen Stunde oder Einheit der Zeit die kleine Linie gG, und der Körper im Zirkel-Umkreise durchlaufe in der nämlichen Zeit den Zirkelbogen rR. Wir nehmen zur Bequemlichkeit des Beweises an, daß die Vektoren SR und SG in eine gerade Linie zusammen fallen, welches eben nicht nöthig ist.

Man ziehe noch die Vektoren Sr und Sg; diesen letztern verlängere man, und aus S beschreibe man den kleinen Zirkelbogen GQ.

Die Ausschnitte SgG und SrR sind gleich. Denn, wenn sie z. E. in einer Stunde beschrieben sind, so müssen die folgenden in allen übrigen Stunden gleich sein (§. 7, Zus.), und wenn die Bewegung T Stunden dauert, so bestehet beiderseits die ganze Bahn aus einer Anzahl T gleicher Ausschnitte, oder jeder Ausschnitt ist der Tte Theil der ganzen Bahn, wozu er gehöret. Da nun die Bahnen (dem Flächen-Inhalte nach) gleich sind, so sind auch ihre Tten Theile gleich.

Ferner, weil gG, rR nur kleine Bögen sind, so können die Ausschnitte gSG, rSR für gleiche Dreiecke gehalten werden, wovon Sg, Sr die Grundlinien, und GQ, Rr die Höhen sind. Also ist.

$$\tfrac{1}{2} Sr \times Rr = \tfrac{1}{2} Sg \times GQ$$

$$Sr \times Rr = Sg \times GQ$$

also $Rr : GQ :: Sg : SR$.

oder da beinahe $Sg = SG$

$$Rr : GQ :: SG : SR$$

ferner ist $GQ : RV :: SG : SR$

und wenn man die Sätze beider Proporzionen nach der Ordnung multipliziret,

$$(Rr \times GQ) : (GQ \times RV) :: SG^2 : SR^2$$

$$Rr : RV :: SG^2 : SR^2$$

$$\angle rSR : \angle VSR :: SG^2 : SR^2$$

$$\angle rSR : \angle gSG :: SG^2 : SR^2$$

In dem Punkte M, wo der Kreis die gegebene Bahn schneidet, wird $SG = SM = SR$, also $SG^2 = SR^2$, folglich auch $\angle rSR = \angle gSG$, also sind in diesem Punkte die mittlere und die wahre Winkel-Geschwindigkeit gleich. Eben so im Punkte N, denn da wird $SG = SN = SR$.

Also

Also sind in diesem Punkte die mittlere und die wahre Winkel-Geschwindigkeit wiederum gleich.

Ferner sind alle Vektoren wie SG für den Theil der Bahn, der außerhalb des Zirkels lieget, größer als SM oder SR, folglich auch, vermöge der gefundenen Proporzion, die mittleren Geschwindigkeiten größer als die wahren, oder die wahren kleiner, und sie nehmen um desto schneller ab, je schneller sich die Vektoren vergrößern, das heißt, je offener der krummlinichte Winkel RMG ist.

In dem inwendigen Theile MPN der Bahn ist es umgekehrt; alle Vektoren sind dort kleiner als SM, folglich alle Winkel-Geschwindigkeiten größer als die mittlern, und wenn man von M nach P gehet, so nehmen die Vektoren um desto mehr ab, und die Winkel-Geschwindigkeiten um desto mehr zu, je offener der Winkel PMT ist.

Wenn aber die Bahnen bei M und N nicht so offene Winkel machten, so würde in der Gegend dieser Punkte die Veränderung der Vektoren und folglich auch der Winkel-Geschwindigkeiten nicht so merklich sein.

Anmerkung. Wir haben, um die Sache sinnlicher zu machen, die Zeit einer Stunde genommen, worin Gg und Rr durchlaufen werden. Der Beweis gilt aber nur in aller Strenge, wenn die Zeit und die Räume Gg, Rr unendlich klein sind.

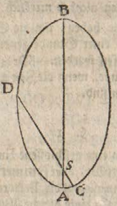
§. 17.

Wenn die Bahn eine geschlossene Linie bildet, so kann man diese Bahn regulär, oder symmetrisch, oder ebenmäßig nennen, wenn allemal die Vektoren, die auf beiden Seiten mit der Apsiden-Linie gleiche Winkel machen, auch selbst gleich sind. Z. E. wenn die Bahn eine Ellipse ist, und der Kraftpunkt in der großen Axe lieget, so befindet sich jedem Vektor gegenüber ein anderer, der ihm gleich ist, und mit der Axe, welche alsdann die Apsiden-Linie ist, einen gleichen Winkel machet. Wenn man eine gerade Linie ziehet welche durch den Kraftpunkt, und beiderseits bis zum Umfange der Bahn gehet, so sind ihre Endpunkte entgegengesezte Punkte der Bahn.

§. 18.

Lehrsatz.

In einer geschlossenen symmetrischen Bahn gehet der Körper von einer Apside zur andern, genau in der Zeit des halben Umlaufs. Ferner, wenn der Körper von einem beliebigen Punkte zum entgegengesezten gehet, so ist die erforderliche Zeit größer oder kleiner, als die halbe Zeit des Umlaufs, je nachdem der Körper durch die obere oder untere Apside gehet.



Wenn die Linie ebenmäßig ist, so ist SADBS die Hälfte des ganzen Raumes, den die Bahn einschließt. Da nun sowohl

sowohl die halbe als auch die ganze Fläche der Bahn nach und nach vom Vektor beschrieben wird, und die beschriebenen Räume sich wie die Zeiten verhalten, so beschreibet der Vektor die halbe Bahn in halb so viel Zeit, als die ganze. Er kömmt also in der ersten Hälfte seine Umlaufs-Zeit von A nach B, durch den Bogen ADB, und in der andern Hälfte zurück von B nach A, durch den Bogen BCA. Gehet der Körper von D nach C, oder von C nach D, durch die obere Apside B, vorausgesetzet, daß D und C entgegengesetzte Punkte sind, so sind die Vektoren zwischen SB und SD alle länger, als zwischen SA und SC, die Winkel BSD, ASC hingegen sind gleich, also ist der Ausschnitt BSD größer als der Ausschnitt ASC, folglich erfordert BSD mehr Zeit, als ASC (§. 7). Nun gehet von der Zeit des halben Umlaufs ACB die Zeit für den Ausschnitt ASC ab, hingegen kömmt die Zeit für den Ausschnitt BSD hinzu. Da also mehr hinzu kömmt, als abgehet, so ist die Zeit für CBD länger, als für den halben Umlauf ACB.

Gehet aber der Körper von C nach D, oder von D nach C, durch die untere Apside A, so gehet von der Zeit für den halben Umlauf BDA die Zeit für BSD ab, und es kömmt hinzu die Zeit für ASC. Da also weniger hinzu kömmt, als abgehet, so ist die Zeit für DAC oder CAD kleiner, als für den halben Umlauf ADB oder BDA.

§. 19.

Bis jetzt haben wir in diesem Hauptstücke nur überhaupt angenommen, daß, vermöge einer gewissen Zentralkraft und einer gewissen Fliehkraft, allerlei krumme Bahnen entstehen können, die gegen den Kraftpunkt konkav sind. Dieses ist auch leicht zu begreifen, wenn man bei der Vorstellung des Fadens (§. 6) bleibet. Denn während daß der Körper, vermittelst der Fliehkraft, sich bestrebet, gerade fortzugehen, kömmt es nur darauf an, daß

der

der Faden gehörigermaaßen mehr oder weniger zurückgezogen oder nachgelassen werde, um daß eine gewisse konkave Bahn entstehe. Daß sie nie konvex werden könne, ist oben bewiesen worden (§. 4).

Nun aber begreift man leicht, daß, da die Fliehkraft nicht allemal gleich stark wirket §. 7, und der Vektor mit ihrer Richtung bald diesen bald jenen Winkel bildet, auch bei einer und derselbigen Bahn der Fall eintreffen kann, daß der Faden bald mit mehr, bald mit weniger Kraft angezogen werden muß.

Und wenn man anstatt des Fadens eine andere Macht annimmt, die auf den Körper wirket, so muß sie nicht allemal während der ganzen Bewegung des Körpers gleich stark wirken, sondern sich mit dem Vektor oder der Entfernung des Körpers vom Kraftpunkte verändern. Es lieget uns demnach ob, zu untersuchen, nach welchem Gesetze die Kraft sich verändern muß, um daß der Körper eine Linie gewisser Art beschreibe. Wir halten uns bloß an den Kegelschnitten, weil sie allein in der Astronomie vorkommen, zu deren Behuf eigentlich diese ganze Lehre von Zentralkräften erfunden ist.

§. 20.

Lehrsatz.

Jede Zentralkraft muß als eine beschleunigende Kraft betrachtet werden.

Denn sie wirket nicht durch einen bloßen Stoß, sondern durch einen fortdaurenden Druck oder Zug, und in jeder Entfernung, eben so, wie die Fallkraft in der Nachbarschaft der Erde. Hätte der Körper, der durch eine Zentralkraft angezogen wird, keine Fliehkraft, so würde er sich mit beschleunigter Geschwindigkeit dem Kraftpunkte nähern.

§. 21.

§. 21.

Lehrsatz.

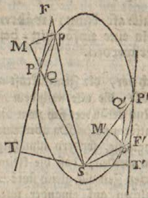
Jede Zentralkraft kann, während einer sehr kurzen Zeit, als eine einförmig=beschleunigende Kraft betrachtet werden.

Man stellet sich vor, die Zentralkraft wirke durch unendlich kleine Stöße, die alle nach dem Kraftpunkte hin gerichtet sind. Nun verändert sich zwar die Stärke dieser Stöße mit der Entfernung. Da aber eine solche Veränderung nicht sprungweise, sondern allmählig geschiehet, so kann angenommen werden, daß die kleinen Stöße während einer sehr kurzen Zeit alle gleich stark sind. Und aus unendlich viel solchen auf einander folgenden gleichen Stößen entstehet eine einförmig=beschleunigte Bewegung, wie wir bei fallenden Körpern gesehen haben (H. III, §. 10). Also wirket in der That jede Zentralkraft während einer kurzen Zeit wie eine einförmig=beschleunigende Kraft.

Zusatz I. Es gelten also für jede Zentralkraft auf eine sehr kurze Zeit alle Formeln der einförmig=beschleunigten Bewegung. Also ist $c = \frac{1}{2}pt^2$, wo c den, vermöge der Zentralkraft durchlaufenen Raum, t die dazu erforderliche Zeit in Sekunden, und p die Beschleunigung ist. Beschleunigung heißt hier so viel, als die am Ende einer Sekunde erzeugte Geschwindigkeit, oder der doppelte Raum, den der Körper in der ersten Sekunde durchläuft. (H. III, §. 2.) Und da sich die beschleunigende Kraft allemal wie dieses p verhält, so kann man das p auch die Zentralkraft nennen.

Zusatz II. Aus $c = \frac{1}{2}pt^2$ folget $p = \frac{2c}{t^2}$

Zusatz III.



Gesetzt, der Körper habe sich in einer kurzen Zeit t von P bis p beweget. Ziehe die Vektoren SP, Sp, verlängere Sp nach F hin, ziehe für den Punkt P die Tangente PF; so wäre der Körper, ohne die Zentralkraft von P nach F gegangen; die Zentralkraft hat ihn aber zugleich um den Raum Fp zurückgezogen. Ziehe pQ mit FP parallel, so ist, wegen des sehr kleinen Winkels PSF, die SF als parallel mit SP anzusehen. Man kann sich demnach vorstellen, der Körper habe sich in der Linie PF beweget, zugleich aber habe sich diese Linie, mit sich selbst parallel, und mit einförmig-beschleunigter Geschwindigkeit, von PF in die Lage Qp begeben. Der durchlaufene Raum PQ oder Fp rühret also von der in einer kurzen Zeit einförmig-beschleunigenden Zentralkraft her, und wenn die Beschleunigung in der Gegend des Bogens Pp durch p ausgedrücket wird, so ist, vermöge des vorigen Zusatzes,

$$p = \frac{2.(pF)}{t^2}$$

Nun

Nun werde in einer anderen Gegend der Bahn der Bogen $P'p'$ in der Zeit t' durchlaufen, und die Linien $P'F'$, SP', $p'F'$, $Q'p'$ wie vorher gezogen. Es sei in dieser Gegend die Beschleunigung der Zentralkraft $= p'$, so hat man ebenfalls

$$p' = \frac{2.(p'F')}{t't'}$$

Folglich ist

$$p : p' :: \frac{2.(pF)}{tt} : \frac{2(p'F')}{t't'}$$

oder $p : p' :: \frac{(pF)}{tt} : \frac{(p'F')}{t't'}$

Nehmen wir ferner an, daß die kleinen Bögen Pp und $P'p'$ in gleichen Zeiten beschrieben werden, so ist $t = t'$,

also $p : p' :: pF : p'F'$

Zusatz IV. Wenn die kleinen Zeiten t und t' nicht gleich sind, so verhalten sie sich wie die Ausschnitte $SPpS$, $SP'p'S$.

Aus S beschreibe man die Zirkelbögen pM, $p'M'$, so sind SP, SP' die Grundlinien, hingegen pM, $p'M'$ die Höhen der Dreiecke, folglich ist

$$t : t' :: (\tfrac{1}{2}SP \times pM) : (\tfrac{1}{2}SP' \times p'M')$$

$$t : t' :: (SP \times pM) : (SP' \times p'M')$$

$$t^2 : t'^2 :: (SP^2 \times pM^2) : (SP'^2 \times p'M'^2)$$

Setzet man das zweite Verhältniß anstatt des ersten $t^2 : t'^2$ in die Gleichung

$$p : p' :: \frac{pF}{tt} : \frac{p'F'}{t't'}$$

so ist $p : p' :: \frac{pF}{SP^2 \times pM^2} : \frac{p'F'}{SP'^2 \times p'M'^2}$

Zusatz V. Man verlängere die Tangenten PF, P′F′, und fälle aus S auf dieselben die senkrechten Linien ST, ST′, so sind die Ausschnitte oder Dreiecke SPpS, S$P'p'$S unendlich wenig von den Dreiecken SPFS, SP′F′S unterschieden, welche PF, P′F′ zur Grundlinie, und ST, ST′ zur Höhe haben. Also ist auch

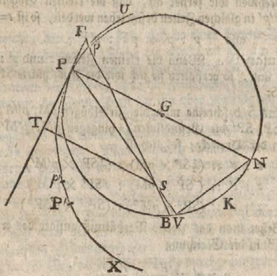
$$t : t' :: (\tfrac{1}{2}ST \times PF) : (\tfrac{1}{2}ST' \times P'F')$$

$$t : t' :: (ST \times PF) : (ST' \times P'F')$$

$$t't : t't' :: (ST^2 \times PF^2) : (ST'^2 \times P'F'^2)$$

folglich $p : p' :: \dfrac{pF}{ST^2 \times PF^2} : \dfrac{p'F'}{ST'^2 \times P'F'^2}$

Zusatz VI.



Es sei PG der Halbmesser der Krümmung für den Punkt P der Bahn. Mit diesem Halbmesser werde aus

G der

G der küssende Zirkel beschrieben. Man verlängere PG, PS, FS, bis zum Umkreise dieses Zirkels in N, V, B, so kann Pp als ein gemeinschaftlicher Theil der Bahn und des küssenden Zirkels angesehen werden, und PF berühret diesen Zirkel in P. Hingegen FB schneidet denselbigen Zirkel. Also ist, vermöge der gemeinen Geometrie, FP die mittlere Proporzional-Linie zwischen pF und FB, oder $FP^2 = pF \times FB$, daher $pF = \frac{PF^2}{FB}$. Da aber FB und PV unendlich nahe sind, so ist FB = PV, also $pF = \frac{PF^2}{PV}$.

Zur Vermeidung aller Verwirrung in der Figur habe ich nur die Bewegung an einer Stelle Pp betrachtet. Es ist aber klar, daß, wenn man für eine andere Stelle P$'p'$ auch den küssenden Zirkel beschreibet, und eine ähnliche Zeichnung machet, man ebenfalls haben werde $p'F' = \frac{P'F'^2}{P'V'}$. Setzet man diese Werthe von pF und p'F$'$ in die letzte Proporzion des vorigen Zusatzes, so bekömmt man

$$p : p' :: \frac{1}{ST^2 . PV} : \frac{1}{S'T'^2 . P'V'}$$

Zusatz VII. Die Dreiecke STP, PVN sind ähnlich. Denn STP ist ein rechter Winkel, wie auch der Winkel PVN, welcher im halben Zirkel eingeschrieben ist. Ferner sind ST, NP parallel, weil sie beide auf der Tangente PT senkrecht stehen. Sie sind von der Linie PS geschnitten. Also sind die Wechsel-Winkel PST, SPN, oder VPN auch gleich.

Also SP : ST :: PN : PV

oder SP : ST :: 2PG : PV

daher $PV = \frac{2PG \times ST}{SP}$

Und wenn an einer anderen Stelle der Figur eine ähnliche Konstrukzion angebracht wird, so ist auch dort

$$P'V' = \frac{2P'G' \times ST'}{SP'}$$

Setzet man diese Werthe von PV und P'V' in die letzte Proporzion des vorigen Zusatzes, so ist

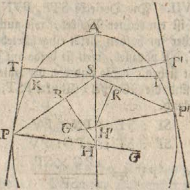
$$p : p' :: \frac{SP}{ST^3 \times 2PG} : \frac{SP'}{ST'^3 \times 2P'G'}$$

oder $p : p' :: \frac{SP}{ST^3 \times PG} : \frac{SP'}{ST'^3 \times P'G'}$

§. 22.

Lehrsatz.

Wenn ein Körper vermittelst der Fliehkraft und einer Zentralkraft einen Kegelschnitt durchlaufen soll, in dessen einem Brennpunkte der Kraftpunkt ist, so muß die Zentralkraft sich allemal umgekehrt verhalten, wie das Quadrat der Entfernung oder des Vektors.



Es

Es sei PAP′ ein Kegelschnitt; S der Brennpunkt; A der Scheitel; AH ein Theil der Hauptaxe; IK der Parameter; P und P′ zwei beliebige Stellen, worin sich der bewegte Körper in zwei verschiedenen Zeitpunkten befindet; SP, SP′ die Vektoren; PT, P′T′ die Tangenten; ST, ST′ senkrechte Linien, aus dem Brennpunkte auf die Tangenten gefället; PG, P′G′ die Krümmungsmesser, auf PT, P′T′ senkrecht; PH, P′H′ die Normalen; HR, H′R′ senkrechte Linien, von den Enden der Normalen auf die Vektoren gefället.

Nun folget aus der Natur der Kegelschnitte, daß $\frac{1}{2}IK = PR = P'R'$, und daß $PG = \frac{4PH^3}{IK^2}$, $P'G' = \frac{4P'H'^3}{IK^2}$ (siehe die Lehnsätze am Ende dieses Paragraphs).

Die Dreiecke SPT, PHR sind ähnlich, denn sie haben in T und in R rechte Winkel; ferner sind ST und HP, beide auf PT senkrecht, mit einander parallel; und also sind die Wechselwinkel PST und SPH gleich. Folglich ist

$$SP : ST :: PH : PR$$

oder

$$SP : PH :: ST : PR$$

$$SP : PH :: ST : \tfrac{1}{2}IK$$

daher ist

$$ST = \frac{SP \times IK}{2PH}$$

und

$$ST^3 = \frac{SP^3 \times IK^3}{8PH^3}$$

Auf eine ähnliche Art findet man

$$ST'^3 = \frac{SP'^3 \times IK^3}{8P'H'^3}$$

Nun wurde oben (§. 21, Zus. VII) gefunden

$$p : p' :: \frac{SP}{ST^3 \times PG} : \frac{SP'}{ST'^3 \times P'G'}$$

Wenn wir hier anstatt ST^3 und ST'^3 die herausgebrachten Werthe setzen, so ist

$$p : p' :: \frac{SP \times 8PH^3}{SP^3 \times IK^3 \times PG} : \frac{SP' \times 8P'H'^3}{SP'^3 \times IK^3 \times P'G'}$$

$$p : p' :: \frac{PH^3}{SP^2 \times PG} : \frac{P'H'^3}{SP'^2 \times P'G'}$$

Weil nun $PG = \frac{4.PH^3}{IK^2}$ und $P'G' = \frac{4.P'H'^3}{IK^2}$,

so ist $p : p' :: \frac{PH^3 \times IK^2}{SP^2 \times 4PH^3} : \frac{P'H'^3.IK^2}{SP'^2 \times 4P'H'^3}$

$$p : p' :: \frac{1}{SP^2} : \frac{1}{SP'^2}$$

$$p : p' :: SP'^2 : SP^2$$

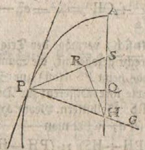
das heißt, die Beschleunigung in P verhält sich zur Beschleunigung in P', wie sich das Quadrat des Vektors SP' verhält zum Quadrat des Vektors SP, oder die Beschleunigungen verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Vektoren, oder die Wirkung der Zentralkraft verhält sich umgekehrt, wie das Quadrat der Entfernung, in welcher sie wirket.

Anmerkung. Nach aller Schärfe der mathematischen Methode sollte nun noch unser Lehrsatz umgekehrt bewiesen werden; nämlich daß die Bahn nothwendig ein Kegelschnitt sei, wenn die Wirkung der Zentralkraft sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung verhält. Indessen wäre doch dieses hier ziemlich überflüssig. Man siehet sogleich, daß der ganze Beweis

auf

auf ein Paar Eigenschaften beruhet, die nur allein den Kegelschnitten zugehören, und die in den folgenden Lehnsätzen bewiesen werden. Wo also diese Eigenschaften nicht Statt finden, kann auch die daraus hergeleitete nicht Statt finden. Folglich hat eine Bahn, die kein Kegelschnitt ist, nicht die Eigenschaft, daß die anziehenden Kräfte sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen verhalten. Sobald also diese Eigenschaft Statt findet, kann man sicher schließen, daß die Bahn ein Kegelschnitt ist.

Lehnsatz I. Wir haben vorausgesetzt, daß PR $= \frac{1}{2}$IK. Da diese Eigenschaft der Kegelschnitte nicht sehr bekannt ist, so müssen wir sie hier beweisen.



Es sei AP ein Stück einer Ellipse, die halbe große Axe sei a, die Exzentrizität e. Die Entfernung vom Mittelpunkte bis zum Punkte Q, wo die PQ aus P auf die große Axe senkrecht fällt, sei x, so ist

I) $PQ^2 = a^2 - e^2 + \frac{e^2 x^2}{a^2} - x^2$ (Höh. Geom. H. I, §16)

II) $QH = x - \frac{e^2 x}{a^2}$, (Höh. Geomet. Hauptst. II, §. 3) folglich $QH^2 = x^2 - \frac{2e^2x^2}{a^2} + \frac{e^4x^2}{a^4}$

III) $SP = a - \frac{ex}{a}$ (Höh. Geomet. H. II, §. 3)

folglich $SP^2 = a^2 - 2ex + \frac{e^2x^2}{a^2}$

IV) $SH = e - \frac{e^2x}{a^2}$ (Höh. Geom. H. II, §. 3)

folglich $SH^2 = e^2 - \frac{2e^3x}{a^2} + \frac{e^4x^2}{a^4}$

Aus den beiden ersten Gleichungen folget

V) $PH^2 = PQ^2 + QH^2 = a^2 - e^2 - \frac{e^2x^2}{a^2} + \frac{e^4x^2}{a^4}$

Nun verhält sich, vermöge der Trigonometrie, wenn HR auf SP senkrecht gezogen ist, die Summe beider Theile, PR und RS, (das heißt PS selbst) zur Summe der Seiten PH und SH, wie ihre Differenz zur Differenz der beiden Theile PR und RS (Selbstlern. Geom. H. XII, §. 6). Diese letzte Differenz sei d, so hat man

$$PS : (PH + HS) :: (PH - HS) : d$$

daher $d = \frac{(PH + HS).(PH - HS)}{PS}$

oder $d = \frac{PH^2 - HS^2}{PS}$

Die halbe Differenz nebst der halben Summe giebt bekanntermaaßen den größten der beiden Theile. Der größte der beiden Theile PR und RS ist demnach

$$\tfrac{1}{2}\left[PS + \frac{PH^2 - HS^2}{PS}\right]$$

oder

oder $$\frac{\frac{1}{2}[PS^2 + PH^2 - HS^2]}{PS}.$$

Nun ist, wie oben angezeiget worden,

$$
\begin{array}{llll}
PS^2 = a^2 - 2ex + \frac{e^2x^2}{a^2} & & & \\
PH^2 = a^2 \; - \; - \; - \frac{e^2x^2}{a^2} & - e^2 & + \frac{e^4x^2}{a^4} & \\
-SH^2 = \; - \; - \; - \; - \; - & - e^2 & - \frac{e^4x^2}{a^4} & + \frac{2e^3x}{a^2} \\
\hline
\text{Summa } 2a^2 - 2ex & - 2e^2 & - \; - \; - & + \frac{2e^3x}{a^2}
\end{array}
$$

Die Hälfte $a^2 - ex - e^2 + \frac{e^3x}{a^2}$

Man dividire durch $PS = a - \frac{ex}{a}$

$$
a - \frac{ex}{a} \left\{ \begin{array}{l} a^2 - ex - e^2 + \frac{e^3x}{a^2} \\ a^2 - ex \\ \hline \qquad\quad - e^2 + \frac{e^3x}{a^2} \\ \qquad\quad - e^2 + \frac{e^3x}{a^2} \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \end{array} \right\} a - \frac{e^2}{a}
$$

Also ist der größte beider Theile PR und RS ausgedrücket durch

$$a - \frac{e^2}{a}$$

 oder

oder $$\frac{a^2 - e^2}{a}$$

oder $$\frac{(a+e)(a-e)}{a}$$

Nun ist, wenn der halbe Parameter q genannt wird, $(a+e)(a-e) = aq$, (Höh. Geom. H. I, §. 16). Also ist gedachter größter Theil $= \frac{aq}{a} = q$ dem halben Parameter gleich, welches zu beweisen war. Daß aber dieser größte Theil PR nicht RS ist, erhellet daraus, daß wir den größten Theil beständig $= q$ gefunden haben. Er kann also nicht RS sein, weil diese Linie sich nothwendig verändert, z. E. wenn SP auf der Axe senkrecht ist, so fällt HR auf HS, und es wird RS = o.

Für die Hyperbel ist der Beweis der nämliche, nur daß die Zeichen + und — anders ausfallen. Es wäre überflüssig, ihn noch einmal auszuführen.

Was die Parabel betrift, so kann sie als eine Ellipse mit einer unendlich großen Axe betrachtet werden. Da nun PR immer dem halben Parameter gleich ist, ohne Rücksicht auf die Axe, so gilt dieser Werth auch bei unendlichen Axen.

Lehnsatz II. Das zweite, was vorausgesetzet wurde, war $PG = \frac{4 \cdot PH^3}{IK^2}$ wo IK der Parameter ist.

Wenn die Linie AP eine Ellipse ist, die ganze Hauptaxe a, der ganze Parameter p, und wenn die Abszissen vom Scheitel an gerechnet werden, so ist

$$PQ^2 = px - \frac{p}{a} x^2$$

und

und $QH = \frac{ap - 2px}{2a} = \frac{1}{2}p - \frac{p}{a}x$ (Höh. Geometrie, Hauptst. VIII, §. 2).

also $QH^2 = \frac{1}{4}p^2 - \frac{p^2}{a}x + \frac{p^2}{a^2}x^2$

oder wenn wir, der Kürze halben, annehmen $\frac{p}{a} = m$,

so ist $PQ^2 = px - mx^2$

$QH^2 = \frac{1}{4}p^2 - pmx + m^2x^2$

Nun ist $PH^2 = PQ^2 + QH^2$

$$= \frac{1}{4}p^2 + px - pmx - mx^2 + m^2x^2$$

$$= \frac{1}{4}p^2 + (1 - m)px - (1 - m)mx^2$$

oder $PH^2 = \frac{1}{4}p^2 + (1 - m)(px - mx^2)$

$$4PH^2 = p^2 + 4(1 - m)(px - mx^2)$$

$$2PH = [p^2 + 4(1 - m)(px - mx^2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$8PH^3 = [p^2 + 4(1 - m)(px - mx^2)]^{\frac{3}{2}}$$

Nun ist für die Ellipse der Halbmesser der Krümmung (Höhere Geomet. Hauptst. IX, §. 7)

$$PG = \frac{[p^2 + 4(1 - m)(px - mx^2)]^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$$

also $PG = \frac{8PH^3}{2p^2}$

oder $PG = \frac{4PH^3}{p^2}$

Für die Hyperbel ist der Beweis dem vorigen ähnlich, nur daß a, folglich auch $\frac{p}{a} = m$ allenthalben negativ wird.

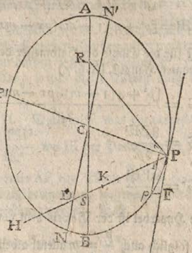
In

In der Parabel ist a unendlich, also $\frac{p}{a} = m = 0$.
Es kann also der ganze Beweis auch auf die Parabel angewandt werden, wenn man nur allenthalben die Sätze wegläßt, welche m enthalten.

§. 23.

Lehrsatz.

Je nachdem die Bahn eine Ellipse, eine Parabel, oder eine Hyperbel ist, so ist in jedem Punkte die Geschwindigkeit der Fliehkraft, entweder kleiner, oder eben so groß, oder größer als diejenige, welche der Körper erhalten würde, wenn er, vermöge der Zentralkraft, die jezt auf ihn wirket, bis zum Kraftpunkte gefallen wäre.



Die

Den kleinen Bogen Pp (vorherg. Fig.) beschreibet der Körper P in einer unendlich kleinen Zeit t, vermöge der Zentralkraft in P, die ihn mit einförmig-beschleunigter Bewegung (§. 21) von P nach I hintreibet oder ziehet, und vermöge der Fliehkraft, die ihn zur einförmigen Bewegung längs PF reizet. Um nun die Größe der Fliehkraft in P zu bestimmen, so stelle man sich vor, es sei PK die Linie, welche ein fallender Körper in der Nähe der Erde durchlaufen müßte, um nach einer gewissen Zeit T eine Geschwindigkeit zu erhalten, die hinlänglich wäre, um daß der Körper P mit derselben in der Zeit t die Linie PF einförmig durchlaufen könnte. So wissen wir schon aus den Gesetzen der einförmig-beschleunigten Bewegung, daß dieselbe Geschwindigkeit zureichend sein würde, um daß der Körper in der Zeit T mit einförmiger Bewegung 2PK durchliefe. Wenn man sich diese einförmige Bewegung in PF und 2PK mit gleicher Geschwindigkeit gedenket, so verhalten sich die Wege wie die Zeiten. Also ist

$$PF : 2PK :: t : T$$

Es sei g die Fallkraft nahe bei der Erde, und d die Entfernung von S, in welcher die auf den Körper P wirkende Zentralkraft der Fallkraft g gleich sein würde. Da die Wirkungen der Zentralkraft sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Entfernungen (§ 22), so verhält sich die Wirkung der Zentralkraft in P zur Fallkraft g, wie d^2 zu SP^2. Also wird die Wirkung der Zentralkraft in P ausgedrücket durch $\frac{d^2 g}{SP^2}$.

In sehr kurzen Zeiten werden die Zentralkräfte als einförmig-beschleunigende Kräfte betrachtet (§. 21). Also ist (§. III, §. 4) $PI = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 g}{SP^2}\right) \cdot t^2$ und $PK = \frac{1}{2} g T^2$

Folg-

Folglich $PI : PK :: \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 g}{SP^2} \cdot t^2\right) : \frac{1}{2} g T^2$

$$PI : PK :: \frac{d^2 g . t^2}{SP^2} : g T^2$$

Nun war $PF : 2PK :: t : T$

daher $PF^2 : 4PK^2 :: t^2 : T^2$

Nimmt man das erste Verhältniß anstatt des zweiten, so ist $PI : PK :: \frac{d^2 g . PF^2}{SP^2} : 4gPK^2$

daher $PI = \frac{d^2 PF^2}{SP^2 \times 4PK}$

Aus P ziehe man durch den Mittelpunkt C den Diameter PP', so ist pi eine Applikate für diesen Diameter, und Pi, iP' sind die beiden abgeschnittenen Theile dieses Diameters; NN' mit pi und PF parallel, ist der mit PP' konjugirte Diameter. Und es ist, vermöge der Natur der Ellipse, (Höhere Geomet. H. III, §. 4)

$$pi^2 = \frac{NN'^2}{PP'^2}\left(\tfrac{1}{2}PP' - Ci\right)\left(\tfrac{1}{2}PP' + Ci\right)$$

$$pi^2 = \frac{CN^2}{CP^2}(PC - Ci)(PC + Ci)$$

$$pi^2 = \frac{CN^2}{CP^2} \times Pi \times P'i$$

$$Pi = \frac{pi^2 . CP^2}{CN^2 . P'i}$$

Weil

Weil aber der Punkt i dem Punkte P unendlich nahe ist, so ist $pi = PF$, und $P'i = PP' = 2CP$, also

$$Pi = \frac{PF^2 . CP^2}{CN^2 . 2CP} = \frac{PF^2 \times CP}{2 . CN^2}$$

Man verlängere PS bis in D, wo sie dem Diameter NN′ begegnet, so ist PD = CA, wie am Ende dieses Beweises gezeiget werden soll. Ferner sind die Dreiecke PIi und PDC ähnlich, weil DC und pi beide mit der Tangente PF parallel sind. Also ist

$$PC : PD :: Pi : PI$$

oder $PC : CA :: \frac{PF^2 \times PC}{2CN^2} : PI$

daher $PI = \frac{CA \times PF^2}{2CN^2}$

Es war auch $PI = \frac{d^2 PF^2}{SP^2 \times 4PK}$

Also $\frac{d^2 PF^2}{SP^2 \times 4PK} = \frac{CA \times PF^2}{2CN^2}$

$$\frac{d^2}{2SP^2 . PK} = \frac{CA}{CN^2}$$

$$\frac{d^2}{SP^2} \times CN^2 = 2CA \times PK$$

Wenn R der andere Brennpunkt ist, und PR gezogen wird, so ist $CN^2 = PS \times PR$, wie unten bewiesen werden soll. Also ist

$$\frac{d^2}{SP^2} \times CN^2 = \frac{d^2}{SP^2} \times PS \times PR = \frac{d^2 PR}{SP}$$

Also

$$\text{Also} \quad \frac{d^2 PR}{SP} = 2CA \times PK$$

$$\text{oder} \quad \frac{d^2}{SP} \times PR = AB \times PK$$

Nun stelle man sich ferner vor, zwei Körper gehen zugleich mit einförmig-beschleunigter Bewegung, der eine von P bis S, mit einer solchen beschleunigenden Kraft, wie die Zentralkraft in P wirklich ist, aber ohne daß sie näher bei S zunehme; der andere mit der beschleunigenden Kraft g, die derjenigen gleich ist, die in der Nähe der Erde wirket, und dieser leztere durchlaufe einen Weg PH, bis daß er in H eben so viel Geschwindigkeit erhalten habe, als der vorige in S. Die wirkliche beschleunigende Kraft in P ist kurz vorher gefunden worden $\frac{d^2 g}{SP^2}$, die in S und H erhaltene gleiche Geschwindigkeit sei v, so ist, in der angenommenen Voraussetzung (H. III, §. 4)

$$PS = \frac{\frac{1}{2} v^2}{\left(\frac{d^2 . g}{SP^2}\right)}$$

$$PH = \frac{v^2}{2g}$$

$$\text{daher} \quad PH : PS :: \frac{1}{g} : \frac{1}{\left(\frac{d^2 g}{SP^2}\right)}$$

$$PH : PS :: \frac{d^2 . g}{SP^2} : g$$

also

also $PH = \frac{d^2}{SP}$

Wir hatten kurz vorher

$$\frac{d^2}{SP} \times PR = AB \times PK$$

also, weil $\frac{d^2}{SP} = PH$, so ist

$$PH \times PR = AB \times PK$$

oder $PK : PH :: PR : AB$

Hier ist PR der Vektor, der nach dem Brennpunkte hingezogen ist, wo sich der Kraftpunkt nicht befindet. AB ist die Hauptaxe. In der Ellipse ist PR allemal kleiner als AB, weil $PR + PS = AB$ (Höh. Geom. H. I, §. 14). In der Hyperbel ist PR allemal größer, als AB, weil in dieser Linie der Vektor, der nach dem entfernteren Brennpunkte gehet, die Summe desjenigen ist, der nach den näheren gehet, und der Hauptaxe (Höh. Geom. H. I, §. 23). In der Parabel ist der entferntere Brennpunkt unendlich weit, und PR und AB müssen für gleich geachtet werden.

In der Proporzion

$$PK : PH :: PR : AB$$

ist $PK < PH$, oder $PK > PH$, oder $PK = PH$, jenachdem $PR < AB$, $PR > AB$, oder $PR = AB$, das heißt, je nachdem die Bahn eine Ellipse, eine Hyperbel, oder eine Parabel ist.

Man erinnere sich jetzt, was PK und PH bedeuten. Es war PK der Raum, den ein fallender Körper (nahe bei der Erde) durchlaufen müßte, um die Geschwindigkeit zu erhalten, welche ihm die Fliehkraft in P giebt. Es bedeutet PH den Raum, den ein bei der Erde fallender Körper durchlaufen müßte, um dieselbige Geschwindigkeit zu bekommen, die der Körper P oder ein anderer haben würde, wenn er mit derjenigen beschleunigenden Kraft, die in P wirket, von P bis zum Kraftpunkte S gegangen wäre. Vermöge der Gesetze der fallenden Körper ist, wenn die Geschwindigkeit in PF oder in K mit v, und die Geschwindigkeit in S oder in H mit V bezeichnet wird (Hauptst. III, §. 4)

$$PK = \frac{v^2}{2g}$$

$$PH = \frac{V^2}{2g}$$

daher $PK : PH :: v^2 : V^2$

Je nachdem also PK kleiner, oder größer, oder eben so groß ist, als PH, so ist auch v^2 kleiner, größer, oder eben so groß, als V^2, und folglich v kleiner, größer, oder eben so groß, als V, welches also geschiehet, je nachdem die Bahn eine Ellipse, eine Hyperbel, oder eine Parabel ist; welches zu beweisen war.

Zusatz I. Da $PK : PH :: PR : AB$
und $PK : PH :: v^2 : V^2$
so ist $v^2 : V^2 :: PR : AB$

Zusatz II. Wenn die Bahn ein Zirkel und der Kraftpunkt im Mittelpunkte wäre, so wäre $PR = \frac{1}{2} AB$, also

$$v^2 : V^2 :: \tfrac{1}{2} AB : AB$$

$$v^2 : V^2 :: 1 : 2$$

$$v^2 = \frac{V^2}{2}$$

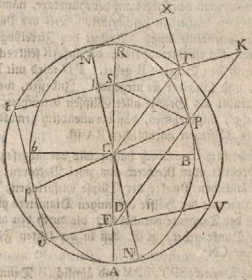
das heißt, das Quadrat der durch die Fliehkraft erzeugten Geschwindigkeit wäre nur die Hälfte des Quadrats derjenigen Geschwindigkeit, welche der Körper bekommen

würde,

würde, wenn er mit derjenigen Zentralkraft, die ihn in der Entfernung, wo er ist, reizet, bis zum Mittelpunkte fiele.

Zusatz III. Weil V^2 in allen Punkten des Zirkels einerlei ist, so ist auch die Fliehkraft in allen Punkten einerlei (§. 8, Zus. I).

Lehnsatz I. Wir haben im Beweise vorausgesetzet PD = CA, das heißt, wenn man aus einem beliebigen



Punkte P einer Ellipse den Vektor PF ziehet, und wenn man den Diameter NN′ ziehet, der mit der Tangente bei P parallel ist, so ist das abgeschnittene Stück PD des Vektors PF allemal der halben Hauptaxe CA gleich.

Man beschreibe aus dem Mittelpunkte C der Ellipse mit dem Halbmesser CA einen Zirkel. Man fälle aus S auf die Tangente PT die senkrechte Linie ST, so fällt der Punkt T allemal in den Umkreis dieses Zirkels. Denn es ist $ST = \frac{1}{2}SK$ (Höh Geom. H. II, § 2), und $SC = \frac{1}{2}SF$. Folglich sind die Dreiecke STC, SKF ähnlich. Also ist TC mit FK parallel, und $TC = \frac{1}{2}FK = \frac{1}{2}(FP + PS) = AC$ (Höh. Geom. I. H. §. 14).

Nun ist TCDP ein Parallelogramm. Also $PD = TC = CA$.

Ein ähnlicher Beweis läßt sich bei der Hyperbel führen, wenn man den Zirkel auf der Hauptaxe, nämlich zwischen beiden Scheiteln beschreibet. Bei der Parabel ist die Axe unendlich lang. Anstatt des Zirkelbogens RT bekömmt man eine gerade Linie, die auf AR senkrecht stehet, und durch den Scheitel R gehet. PD wird mit NN′ parallel, und schneidet sie nirgends. Indessen, wenn man die Parabel als Gränze aller Ellipsen betrachtet, so hindert nichts, anzunehmen, daß die unendlich gewordene PD noch die Hälfte der unendlichen RA ist.

Lehnsatz II. Noch haben wir vorausgesetzet, daß das Produkt oder Rechteck aus zwei Vektoren, die aus dem nämlichen Punkte der Ellipse entspringen, allemal dem Quadrate der Hälfte desjenigen Diameters gleich sei, der mit der Tangente parallel ist, die durch den angenommenen Punkt gehet, z. E. daß in der letzten Figur $PS \times PF = CN^2$

Die Dreiecke SPT, FPV sind ähnlich. Denn es wird angenommen, daß ST und FV beide auf der Tangente TV senkrecht sind. Ferner ist bekannt, daß $\angle SPT = \angle FPV$ (Höh. Geom. H. II, § 2, Zus. I). Also ist

$$ST : SP :: FV : FP$$

Man multiplizire den ersten und dritten Satz mit ST, den zweiten und vierten mit SP, so kömmt

$$ST^2 : SP^2 :: (ST \times FV) : (SP \times PF)$$

Die

Die vorletzte Proporzion giebt auch

$$(ST + FV) : (SP + FP) :: ST : SP$$

oder, da wegen der vollkommenen Gleichmäßigkeit beider Hälften der Figur, $FV = St$, und da auch $SP + FP = AR$,

so ist $Tt : AR :: ST\ SP$.

Ferner ist das Rechteck $CPXN$, welches von den Tangenten gebildet wird, die durch die Enden der beiden konjugirten Diameter Pp und $N'N$ gehen, allemal gleich dem Rektangel aus der großen und kleinen Axe (Höh. Geomet. H. III, §. 9). Das erste Rechteck aber wird erhalten, wenn man die Grundlinie CN mit der Höhe TI multiplizirt. Also ist

$$TI \times CN = CA \times CB$$

oder $TI : CA :: CB : CN$

oder $2TI : 2CA :: CB : CN$

oder $Tt : AR :: CB : CN$

oder $ST : SP :: CB : CN$ (Siehe oben.)

oder $ST^2 : SP^2 :: CB^2 : CN^2$

$(ST \times FV) : (SP \times PF) :: CB^2 : CN^2$ (Siehe oben.)

$(ST \times St) : (SP \times PF) :: CB^2 : CN^2$

Nun sind AR und Tt zwei Sehnen in einem Zirkel, die sich in S schneiden. Also sind die Theile, vermöge der gemeinen Geometrie, in umgekehrtem Verhältnisse, nämlich $ST : SR :: SA : St$, daher $ST \times St = SR \times SA$. In der Ellipse ist das Produkt der beiden Apsiden-Entfernungen RS und SA dem Quadrate der halben kleinen Axe gleich (Höh. Geom. I. H. §. 16, Zus. I). Also $ST \times St = SR \times SA = CB^2$. Da nun

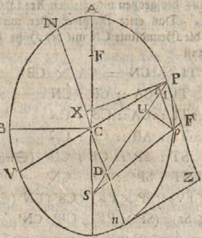
$$(ST \times St) : (SP \times PF) :: CB^2 : CN^2$$

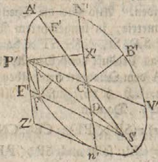
und da $ST \times St = CB^2$, so ist auch $SP \times PF = CN^2$.

Derselbige Beweis läßt sich, mit den gehörigen Veränderungen in der Figur, auf die Hyperbel anwenden. Die Folgerungen, die daraus gezogen werden, gelten ebenfalls für die Parabel, in sofern sie als eine Ellipse oder Hyperbel mit einer unendlichen Axe betrachtet wird.

§. 24.

Lehrsatz.





Wenn

Wenn zwei Körper sich in zwei verschiedenen Kegelschnitten um denselbigen Brennpunkt herum bewegen, und wenn sich die Wirkungen der Zentralkraft umgekehrt verhalten, wie die Quadrate der Entfernungen, so verhalten sich die zugleich beschriebenen Ausschnitte wie die Quadrat-Wurzeln der Parameter der Hauptaxen.

Um alle Verwirrung zu vermeiden, haben wir die Figur doppelt gemacht. Eigentlich aber muß man in Gedanken die kleinere Ellipse auf die größere legen, so daß S' in S zu liegen komme. Denn es wird angenommen, daß die Zentralkraft zu S hin, nach dem umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen, wirke. Die Buchstaben in der Figur haben meistens die nämliche Bedeutung, als in den vorhergehenden. PX ist auf Nn und pU auf SP senkrecht; und so auch in der andern Figur. Es seien q und q' die Parameter beider Ellipsen. Nun ist

$$(q.\mathrm{PI}) : (q.\mathrm{P}i) :: \mathrm{PI} : \mathrm{P}i$$
$$:: \mathrm{PD} : \mathrm{PC}$$
$$:: \mathrm{AC} : \mathrm{PC} \text{ (§. 23, Lehnsatz I)}$$

Ferner ist

$$(q.\mathrm{P}i) : (\mathrm{V}i \times \mathrm{P}i) :: q : \mathrm{V}i$$

und $(\mathrm{V}i \times \mathrm{P}i) : (pi^2) :: \mathrm{PC}^2 : \mathrm{CN}^2$

indem $pi^2 = \frac{\mathrm{CN}^2}{\mathrm{PC}^2}(\mathrm{V}i \times \mathrm{P}i)$ (Siehe Seite 366).

Die Dreiecke pIU und PDX sind ähnlich, weil sie beide rechte Winkel haben, und weil die Wechselwinkel DIp oder UIp und IDX oder PDX gleich sind; also ist

$$p\mathrm{I} : p\mathrm{U} :: \mathrm{PD} : \mathrm{PX}$$

Wenn aber die Punkte p und P unendlich nahe kommen, so ist $p\mathrm{I} = pi$, also auch

$$pi : p\mathrm{U} :: \mathrm{PD}\ \mathrm{PX}$$

daher $pi^2 : pU^2 :: PD^2 : PX^2$

oder $pi^2 : pU^2 :: AC^2 : PX^2$ (§. 23, Lehns. I.)

Nun ist das Parallelogramm $CPZnC$, welches $Cn (= CN)$ zur Grundlinie, und PX zur Höhe hat, gleich dem Rechteck aus CA und CB (Seite 373), daher

$$CN \times PX = AC \times CB$$

also $AC : PX :: CN : CB$

$AC^2 : PX^2 :: CN^2 : CB^2$

also $pi^2 : pU^2 :: CN^2 : CB^2$

Laßt uns jetzt die gefundenen Proporzionen kurz zusammen fassen

$$(q.PI) : (q.Pi) :: AC : PC$$

$$(q.Pi) : (Vi \times Pi) :: q : Vi$$

$$(Vi \times Pi) : (pi^2) :: PC^2 : CN^2$$

$$(pi^2) : (pU^2) :: CN^2 : CB^2$$

Multiplizirt man alle Sätze nach der Ordnung, und läßt man die gemeinsamen Faktoren weg, so kömmt

$$(q.PI) : (pU^2) :: (AC \times q \times PC^2) : (PC \times Vi \times CB^2)$$

Nun ist der halbe Parameter $(\frac{1}{2}q)$ die dritte Proporzional-Linie zu AC und CB, also $AC \times \frac{1}{2}q = CB^2$ oder $AC \times q = 2CB^2$, folglich

$$q.PI : pU^2 :: (2CB^2 \times PC^2) : (PC \times Vi \times CB^2)$$

oder wenn man die beiden letzten Sätze durch CB^2 und PC dividiret,

$$(q \times PI) : pU^2 :: 2PC : Vi$$

$$(q \times PI) : pU^2 :: PV : Vi$$

Nun

Nun aber, weil Pi unendlich klein ist, so ist $Vi = PV$, also auch $q \times PI = pU^2$

daher $PI = \frac{pU^2}{q}$

Auf eine ähnliche Art findet man

$$P'I' = \frac{p'U'^2}{q'}$$

Wenn wir nun die Wirkung der Zentralkraft in P mit f, und in P' mit f' bezeichnen, so verhalten sich diese Wirkungen wie PI und $P'I'$. Also

$$f : f' :: PI : P'I'$$

Es wurde aber in der Aufgabe angenommen, daß die nämlichen Wirkungen sich umgekehrt verhalten, wie die Quadrate der Entfernungen. Also

$$f : f' :: S'P'^2 : SP^2$$

Aus beiden Proporzionen folget

$$S'P'^2 : SP^2 :: PI : P'I'$$

daher $S'P'^2 : SP^2 :: \frac{pU^2}{q} : \frac{p'U'^2}{q'}$

folglich $S'P' : SP :: \frac{pU}{\sqrt{q}} : \frac{p'U'}{\sqrt{q'}}$

daher $\frac{S'P' \times p'U'}{\sqrt{q'}} = \frac{SP \times pU}{\sqrt{q}}$

oder $(SP \times pU) : (S'P' \times p'U') :: \sqrt{q} : \sqrt{q'}$

daher $(\frac{1}{2}SP \times pU) : (\frac{1}{2}S'P' \times p'U') :: \sqrt{q} : \sqrt{q'}$

Nun sind SP, $S'P'$ die Grundlinien, hingegen pU und $p'U'$ die Höhen der unendlich kleinen Dreiecke $SPpS$, $S'P'p'S'$, folglich sind $\frac{1}{2}SP \times pU$ und $\frac{1}{2}S'P' \times p'U'$ die klei-

kleinen Dreiecke oder Ausschnitte selbst, und diese verhalten sich demnach wie die Quadrat-Wurzeln der Parameter. Wenn man nun in beiden Bahnen solche Ausschnitte betrachtet, die in gleichen Zeiten beschrieben werden, so bestehen sie aus lauter unendlich kleinen Dreiecken, wovon sich jedes zu jedem, wie gesaget, verhält; also verhalten sich die ganzen Ausschnitte auch so.

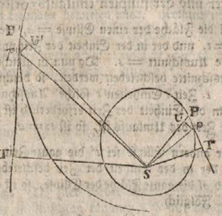
Anmerkung. Ob gleich der Beweis nur eigentlich für Ellipsen eingerichtet ist, so weiß man schon, daß alles bei der Hyperbel wie bei der Ellipse eintrift, wenn nur die Linien gehörigermaßen gezogen werden. Was die Parabel anbelanget, so ist sie eine Ellipse mit einer unendlichen Hauptaxe. Man kann also ohne Bedenken, was von der Ellipse bewiesen ist, auf die Parabel anwenden.

§. 25.

Wenn zwei Körper sich in zwei verschiedenen Kegelschnitten um denselbigen Brennpunkt herum bewegen, und wenn sich die Wirkungen der Zentralkraft umgekehrt verhalten, wie die Quadrate der Entfernungen, so verhalten sich ihre absoluten Geschwindigkeiten, wenn und wo man will, allemal gerade, wie die Quadrat-Wurzeln der Parameter, und umgekehrt, wie die senkrechten Linien, die aus dem gemeinsamen Brennpunkte auf die respektiven Tangenten gefället werden.

In unendlich kleinen Zeiten verhalten sich die absoluten Geschwindigkeiten wie die durchlaufenen Bögen Pp, $P'p'$ (folg. Fig.) Die Tangenten PT, $P'T'$ können als Verlängerungen der unendlich kleinen Seiten Pp, $P'p'$ betrachtet werden. Die Dreiecke SPT, pUP sind ähnlich, weil sie in P denselbigen Winkel, und jeder einen rechten haben, indem pU auf SP und ST auf PT senkrecht ist.

Also



Also ist $ST : SP :: pU : pP$,

daher $pP = \frac{SP \times pU}{ST}$

Eben so wird gefunden

$$p'P' = \frac{SP' \times p'U'}{ST'}$$

Also ist $pP : p'P' :: \frac{SP \times pU}{ST} : \frac{SP' \times p'U'}{ST'}$

Nun ist (§. 24) $SP \times pU : (SP' \times p'U') :: \sqrt{q} : \sqrt{q'}$

folglich $pP : p'P' :: \frac{\sqrt{q}}{ST'} : \frac{\sqrt{q'}}{ST'}$

§. 26.

Wenn die nämlichen Bedingungen, wie vorher, Statt finden, und wenn die Bahnen Ellipsen sind, so sind die Flächen derselben im zusammengesetzten festen Verhältnisse der Quadrat-Wurzeln der Parameter und der simplen Umlaufs-Zeiten.

Es sei die Fläche der einen Ellipse $= a$, die Zeit des Umlaufs $= t$, und der in der Einheit der Zeit vom Vektor beschriebene Ausschnitt $= s$. Da nun in gleichen Zeiten gleiche Ausschnitte beschrieben werden, so beschreibet der Vektor in t Zeit-Einheiten t solche Ausschnitte, zu deren jedem die Einheit der Zeit erforderlich ist; und da t die ganze Zeit des Umlaufs ist, so ist $ts = a$.

In der andern Ellipse sei t' die ganze Zeit des Umlaufs, s' der in der Einheit der Zeit beschriebene Ausschnitt, und a' die ganze Fläche der Ellipse, so ist ebenfalls $t's' = a'$. Folglich

$$a : a' :: ts : t's'$$

Nun ist aber (§. 24)

$$s : s' :: \sqrt{q} : \sqrt{q'}$$

wenn q und q' die Parameter (nämlich der Hauptaxen) sind.

Also $\quad a : a' :: t\sqrt{q} : t'\sqrt{q'}$

§. 27.

Unter den nämlichen Umständen, als vorher, und wenn die Bahnen Ellipsen sind, verhalten sich die Quadratzahlen der Umlaufs-Zeiten, wie die Kubikzahlen der Haupt-Axen.

Es sei in der einen Ellipse die große Axe $= d$, die kleine $= b$, der Parameter der großen Axe $= q$, so ist $d : b :: b : q$, also $dq = b^2$, und wenn man beiderseits mit d^2 multiplizirет, so ist $d^3 q = b^2 d^2$. Wenn in einer andern Ellipse die Axen und der Parameter mit d', b', q' bezeichnet werden, so ist ebenfalls $d'^3 q' = b'^2 d'^2$. Es seien nun a und a' die Flächen der beiden Ellipsen, so verhalten sich

diese

diese Flächen wie die Produkte beider Axen, welches im folgendem Lehnsatze bewiesen wird. Folglich ist

$$a : a' :: bd : b'd'$$

Es ist aber auch $a : a' :: t\sqrt{q} : t'\sqrt{q'}$ (§. 26), wo t, t' die Umlaufs-Zeiten sind. Also

$$bd : b'd' :: t\sqrt{q} : t'\sqrt{q'}$$

daher $b^2d^2 : b'^2d'^2 :: t^2q : t'^2q'$

Da nun $b^2d^2 = d^3q$, und $b'^2d'^2 = d'^3q'$, so ist

$$d^3q : d'^3q' :: t^2q : t'^2q'$$

oder $d^3 : d'^3 :: t^2 : t'^2$

Zusatz. Da hier weder die kleine Axe, noch der Parameter in Anschlag kommen, so gilt die Proporzion für alle Ellipsen, also auch für diejenigen, wo beide Axen und der Parameter gleich sind, das heißt, für Zirkel. In diesem Falle vermischt sich der Brennpunkt mit dem Mittelpunkte, welcher also zugleich der Kraftpunkt sein muß.

Lehnsatz. Es muß bewiesen werden, daß die Flächen der Ellipsen sich verhalten, wie die Produkte aus ihren beiden Axen. Wenn d und d' die großen, b und b' die kleinen Axen, a und a' die Flächen sind, so ist (Höh. Geomet. Hauptst. XI, §. 4, Ex. IV)

$$a = db\left(1 - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{48} - \&c.\right)$$

$$a' = d'b'\left(1 - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{48} - \&c.\right)$$

Also $a : a' :: db\left(1 - \tfrac{1}{8} - \&c.\right) : d'b'\left(1 - \tfrac{1}{8} - \&c.\right)$

oder $a : a' :: db : d'b'$

§. 28.

Von allen in diesem Hauptstücke bewiesenen Sätzen muß man hauptsächlich die folgenden im Gedächtnisse behalten, als welche in der physikalischen Astronomie ihre unmittelbare Anwendung finden.

Wenn

Wenn ein Körper ein: für allemal einen Stoß in einer beliebigen Richtung bekömmt (die nur nicht durch den Kraftpunkt gehet), und wenn er zugleich, vermöge einer Zentralkraft, nach dem Kraftpunkte beständig hingetrieben oder gezogen wird, so verhalten sich die vom Vektor beschriebenen Räume, wie die dazu gebrauchten Zeiten.

Wenn man für zwei beliebige Punkte der Bahn die Tangenten ziehet, und auf dieselben aus dem Kraftpunkte senkrechte Linien fället; so verhalten sich diese umgekehrt, wie die Geschwindigkeiten in den bemeldeten Punkten.

Die Winkel: Geschwindigkeiten aber verhalten sich umgekehrt, wie die Quadrate der Vektoren, oder der Entfernungen des Körpers vom Kraftpunkte.

Also ist die Geschwindigkeit in der größten Entfernung am kleinsten, und in der kleinsten Entfernung am größten.

Wenn die Bahn eine geschlossene Linie bildet, und wenn man aus dem Kraftpunkte einen Kreis beschreibet, der am Flächen: Inhalte eben so groß ist, als der Flächen: Inhalt der Bahn, so schneidet der Umkreis des Zirkels den Umkreis der Bahn an solchen Stellen, wo die wahre Winkel: Geschwindigkeit der mittleren gleich ist.

Wenn die Bahn geschlossen und symmetrisch ist, so erfordert der Weg von einer Apside zur andern, die halbe Zeit des ganzen Umlaufes; und die Zeit, die der Körper brauchet, um von einem beliebigen Punkte zum entgegengesetzten zu gehen, ist größer oder kleiner, als die Zeit des halben Umlaufs, je nachdem der Weg durch die obere oder durch die untere Apside gehet.

Wenn die Bahn ein Kegelschnitt ist, dessen Brennpunkt zugleich der Kraftpunkt ist, so verhält sich die Wirkung der Zentralkraft allemal umgekehrt, wie das Quadrat der Entfernung oder des Vektors.

Die Wirkung der Zentralkraft und Fliehkraft, in einem gegebenen Punkte der Bahn, kann bestimmet werden, wenn man sich vorstellet, die Zentralkraft nehme

nicht

nicht näher am Kraftpunkte zu, sondern sie bleibe unverändert, so wie sie in der gegebenen Entfernung ist, und der Körper falle, vermöge derselben, bis zum Kraftpunkte, also mit einförmig-beschleunigter Bewegung. Auf diese Art bekömmt der Körper eine gewisse letzte Geschwindigkeit, welche von der anfänglichen und fortgesetzten Beschleunigung abhängt. Diese letzte Geschwindigkeit läßt sich mit derjenigen vergleichen, welche die Fliehkraft dem Körper in dem gegebenen Punkte mittheilet. Diese Geschwindigkeit ist nun allemal in der Ellipse kleiner, als jene, und in der Hyperbel größer; in der Parabel aber sind beide gleich.

Wenn zwei Körper sich in zwei Kegelschnitten um denselbigen Kraftpunkt bewegen, der zugleich ein Brennpunkt beider Kegelschnitte ist, und wenn sich die Wirkungen der Zentralkraft umgekehrt, wie die Quadrate der Entfernungen verhalten, so beschreiben die Vektoren in gleichen Zeiten solche Ausschnitte, die sich verhalten wie die Quadrat-Wurzeln der Parameter der Haupt-Axen beider Kegelschnitte.

Ferner verhalten sich die absoluten Geschwindigkeiten beider Körper, wenn und wo man will, allemal gerade, wie die Quadrat-Wurzeln der gedachten Parameter, und umgekehrt, wie die senkrechten Linien, die aus dem Kraftpunkte auf die Tangenten zu den gewählten Punkten gefället werden.

Sind beide Bahnen Ellipsen, so stehen die Flächen der Bahnen im zusammengesetzten Verhältnisse der Quadrat-Wurzeln der Parameter und der simplen Umlaufs-Zeiten. Die Quadratzahlen der Umlaufs-Zeiten aber verhalten sich wie die Kubikzahlen der Haupt-Axen.

Achtes Hauptstück.

Von den Bewegungen der Schwerpunkte.

§. 1.

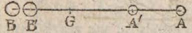
Verschiedene ruhende Körper, sie mögen verbunden sein oder nicht, haben allemal einen gemeinsamen Schwerpunkt (Stat. Hauptst. V, §. 10 bis 13). Wenn die Körper unverbunden sind, und jeder für sich eine Bewegung hat, so haben sie dennoch in jedem Augenblicke einen gemeinsamen Schwerpunkt, welcher für jede Lage der Körper bestimmet werden kann. Wenn nun in jedem unendlichkleinen Zeittheilchen ein anderer gemeinsamer Schwerpunkt Statt findet, so saget man, der gemeinsame Schwerpunkt bewege sich; ist aber der Schwerpunkt beständig an einem und demselben Orte, so ruhet er. Hier wird eine unendliche Menge nach und nach entstehender Schwerpunkte als ein einziger betrachtet, der seine Stelle verändert oder nicht.

§. 2.

Lehrsatz.

Wenn zwei Körper sich in derselbigen geraden Linie, oder in parallelen Linien, aber in entgegengesetzten Richtungen bewegen, und wenn sich die Ge-

Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Massen verhalten, das ist, wenn beide einerlei Quantität der Bewegung haben; so ruhet der gemeinsame Schwerpunkt.



Es sei G der gemeinsame Schwerpunkt der Körper A und B, so ist (Stat. Hauptst. V, §. 3)

$$GB : GA :: A : B$$

Gesetzt, beide Körper durchlaufen in entgegengesetzter Richtung und in der nämlichen Zeit die Wege AA′, BB′, mit Geschwindigkeiten, die sich umgekehrt verhalten, wie die Massen, so verhalten sich die Wege AA′, BB′ eben wie diese Geschwindigkeiten (Stat. Hauptst. II, §. 27). Also

$$BB' : AA' :: A : B.$$

Aus beiden Proporzionen folget

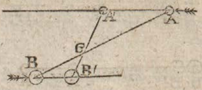
$$(GB - BB') : (GA - AA') :: A : B$$

oder $GB' : GA' :: A : B$

oder $GB' : GA' :: A' : B'$

woraus folget, daß der Punkt G wiederum der gemeinsame Schwerpunkt der Körper A und B ist, wenn sie in die Lage A′, B′ gekommen sind. Und da dieses in allen möglichen Lagen eintrifft, so bleibet der Schwerpunkt immer in G.

In der vorigen Figur waren die Richtungen in einer und derselben geraden Linie. Hier sind sie nur parallel.



Wenn G der Schwerpunkt der Körper A und B ist, so ist GB : GA :: A : B

Durch G ziehe man willkührlich A'B', so sage ich, daß, bei den vorhergehenden Bedingungen, die Körper A und B sich zugleich, der eine in A', der andere in B', befinden werden, und daß ihr gemeinsamer Schwerpunkt wiederum in G ist. Denn wegen der ähnlichen Dreiecke AGA', BGB', ist

BB' : AA' :: GB : GA :: A : B

Da sich nun die Wege AA', BB' umgekehrt verhalten wie die Massen A und B, welches der angenommenen Bedingung entspricht, so ist B in B', wenn A in A' ist. Nun ist ferner

GB' : GA' :: GB : GA :: A : B

folglich, wenn A in A', und B in B' ist, so lieget der gemeinsame Schwerpunkt wiederum in G. Und da dieses allemal gilt, man mag A'B' ziehen wie man will, (nur nicht mit AA' und BB' parallel), so bleibet der gemeinsame Schwerpunkt immer in G.

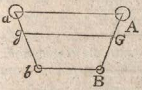
Zusatz. Da in beiden Fällen der Beweis lediglich darauf beruhet, daß sich die Geschwindigkeiten umgekehrt wie

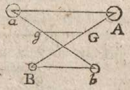
wie die Massen verhalten, und folglich wie die Entfernungen, vom Schwerpunkte in der ersten Lage der Körper; so findet er nicht mehr Statt, wenn diese Bedingung wegfällt, und dann muß der Schwerpunkt seine Lage verändern.

§. 3.

Lehrsatz.

Wenn zwei Körper mit beliebigen Geschwindigkeiten in zwei parallelen Linien laufen, so beschreibet ihr Schwerpunkt (außer dem Falle, wo er ruhet), eine gerade Linie, die mit den beiden übrigen parallel ist.





Gesetzt, es bewegen sich einförmig A und B, so daß zugleich A in a und B in b komme, und daß Aa, Bb parallele Linien sind. Ziehe AB, ab, und bestimme den Punkt G, so daß GB : GA :: A : B, so ist bekanntermaaßen G der gemeinsame Schwerpunkt beider Körper, in ihrer ersten Lage. Durch G ziehe eine gerade Linie, mit Aa und Bb parallel, so schneidet sie ab irgend wo in g. Wenn nun zwei gerade Linien von drei parallelen geschnitten werden, so sind die abgeschnittenen Theile proporzionirt (Selbstlernende Geomet. Hauptst. III, §. 26). Also ist $gb : ga$ :: GB : GA :: A : B :: $a : b$, mit einem Worte $gb : ga :: a : b$. Folglich ist der Schwerpunkt in g,

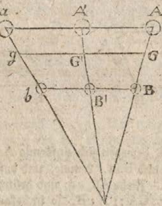
 wenn

wenn die Körper in a und b sind. Und auf solche Art kann für jeden Augenblick der Bewegung bewiesen werden, daß der Schwerpunkt sich immer in derjenigen Linie befindet, die mit beiden Wegen parallel ist, und durch die erste Lage des Schwerpunktes gehet. Also beschreibet der gemeinsame Schwerpunkt diese Linie.

§. 4.

Lehrsatz.

Wenn zwei Körper sich in parallelen Linien einförmig bewegen, so ist die Bewegung des gemeinsamen Schwerpunktes auch einförmig.



Gesetzt, die parallelen Wege AA', BB' werden in gleichen Zeiten von den Körpern A und B durchlaufen, und der Schwerpunkt G durchlaufe zugleich GG', welche mit AA' und BB' parallel ist (§. 3). Verlängere AB und A'B', bis daß sie sich in S schneiden. Verlängere auch AA', GG', BB'. Nimm $B'b = BB'$, so wird der ein-

einförmig gehende Körper, wenn er im ersten Zeittheile BB' zurückgeleget hat, im zweiten B'b zurücklegen. Durch b und S ziehe Sa, so ist

$B'b : A'a :: SB' : SA' :: BB' : AA'$

oder $B'b : BB' :: A'a : AA'$

Da nun $B'b = BB'$, so ist auch $A'a = AA'$

Da sich A ebenfalls einförmig beweget, so muß dieser Körper im zweiten Zeittheile eben solchen Raum zurücklegen, wie im ersten, und sich demnach in a befinden, wenn der andere in b ist.

Der gemeinsame Schwerpunkt wird nun in g sein (§. 3).

Nun ist $BB' : GG' :: SB' : SG' :: B'b : G'g$

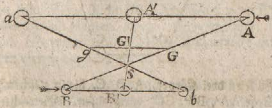
Also $BB' : GG' :: B'b : G'g$

oder $BB' : B'b :: GG' : G'g$

und da $BB' = B'b$, so ist $GG' = G'g$.

Also leget auch der gemeinsame Schwerpunkt in gleichen Zeiten gleiche Wege zurück, das heißt, seine Bewegung ist einförmig, wenn sich die in parallelen Linien gehenden Körper einförmig bewegen.

In der Figur wurde vorausgesetzet, daß sich beide Körper nach einerlei Gegend hin bewegen. Der Beweis bleibet aber der nämliche, wenn sie nach entgegengesetzten Gegenden hingehen. Nur daß keine Verlängerung der Linien AB, A'B' nöthig ist.



Hier wird ebenfalls $B'b = BB'$ genommen, und durch S und b wird ab gezogen.

Dann ist $B'b : A'a :: SB' : SA' :: BB' : AA'$

oder $B'b : BB' :: A'a : AA'$

und da $B'b = BB'$, so ist $A'a = AA'$

Ferner $BB' : GG' :: SB' : SG' :: B'b : G'g$

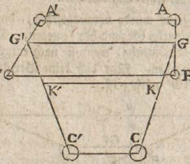
oder $BB' : B'b :: GG' : G'g$

und da $BB' = B'b$, so ist $GG' = G'g$.

§. 5.

Lehrsatz.

Wenn mehrere Körper, z. E. drei, vier, u. s. w. gerade und parallele Linien beschreiben, so beschreibet ihr gemeinsamer Schwerpunkt auch eine gerade Linie, die mit den übrigen parallel ist; und wenn die Körper sich einförmig bewegen, so ist die Bewegung des gemeinsamen Schwerpunktes ebenfalls einförmig.



Es seien drei Körper, A, B, C, die in gleichen Zeiten die Wege AA', BB', CC' durchlaufen. Betrachtet man fürs erste nur die beiden Körper A und B, so gehet ihr gemeinsamer Schwerpunkt G von G nach G', so daß GG'

mit

mit AA′ und mit BB′ parallel ist (§. 3), und wenn die Räume AA′, BB′ mit einförmigen Geschwindigkeiten zurückgeleget werden, so gehet auch der Schwerpunkt längs GG′ mit einförmiger Geschwindigkeit (§ 4).

Um nun in jedem Augenblicke der Bewegung die Lage K des gemeinsamen Schwerpunktes aller drei Körper zu bekommen, muß man die Linie GC in K so theilen, daß (Stat. Hauptst. V, §. 9 und 10)

$$(A+B) : C :: KC : KG$$

und ebenfalls am Ende der Bewegung muß sein

$$(A'+B') : C' :: K'C' : K'G'$$

woraus man siehet, daß die jedesmalige Lage, und folglich der Gang des Schwerpunktes K, eben so bestimmet wird, als wenn die Körper A und B in ihrem gemeinsamen Schwerpunkte wie eine einzige Masse vereiniget wären, und den Weg GG′, welcher mit AA′ und BB′ parallel ist, durchliefen. Wäre nun dieses, so würde, vermöge des vorhergehenden, der gemeinsame Schwerpunkt K der Masse (A+B) und der Masse C eine gerade Linie KK′ durchlaufen, die mit CC′ und GG′, also auch mit AA′ und BB′ parallel wäre (§. 3), und liefe die Masse (A+B) längs GG′, wie auch C längs CC′ einförmig, so würde auch der Punkt K die KK′ einförmig durchlaufen (§. 4). Folglich hat unser Lehrsatz für drei Körper seine völlige Richtigkeit. So läßt sich der Beweis fortsetzen, wenn mehrere Körper vorhanden sind, indem man die drei ersten, A, B, C, als in K vereiniget ansiehet, und den vierten dazu nimmt, u. s. w.

Zusatz. Es könnte sich auch treffen, daß der gemeinsame Schwerpunkt K in Ruhe bliebe, wenn z. E. von den drei Körpern in der Figur die beiden A und B rechts, hingegen der dritte C links gingen, und wenn sich dabei die

Massen (A+B) und C umgekehrt verhielten, wie die Geschwindigkeiten GG′ und CC′ (§. 2).

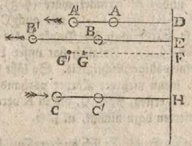
Anmerkung. Der Lehrsatz und der Beweis gelten auch für den Fall, wo die Parallelen nicht alle in einer Ebne liegen.

§. 6.

Lehrsatz.

Wenn sich verschiedene Körper in parallelen Linien und mit einförmigen Geschwindigkeiten bewegen, so wird die Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunktes gefunden, wenn man die algebraische Summe aller einzelnen Quantitäten der Bewegung durch die arithmetische Summe aller Massen dividiret.

(Die algebraische Summe enthält positive und negative Größen, wenn einige Richtungen den anderen entgegengesetzet sind. Die arithmetische Summe aber enthält nichts als positive Größen.)



Gesetzt, es durchlaufen die Körper A, B, C und der Schwerpunkt G in derselbigen Zeit t, mit den einförmigen

gen Geschwindigkeiten v, v', v'' und x, die Räume AA′, BB′, CC′, GG′, so ist

$$AA' = v.t$$
$$BB' = v'.t$$
$$CC' = v''.t$$
$$GG' = x.t$$

und die Geschwindigkeit x des Schwerpunktes ist die hier zu bestimmende unbekannte Größe.

Die Linien AA′, BB′, CC′, GG′ sind parallel; es ist aber nicht nöthig, daß sie in einer Ebne liegen (§. 5, Anmerk.). Man lege eine Ebne DH, so daß sie alle die gedachten parallelen Linien, oder deren Verlängerungen, senkrecht durchschneide, so ist, vermöge der Lehren der Statik (Stat. Hauptst. V, §. 12 und 13)

$$GF = \frac{A \times AD + B \times BE + C \times CH}{A + B + C}$$

und ebenfalls, wenn die Körper in A′, B′ C′ sind, der Schwerpunkt aber in G′, so ist

$$G'F = \frac{A \times A'D + B \times B'E + C \times C'H}{A + B + C}$$

Von dieser Gleichung ziehe man die vorige ab, so ist

$$G'F - GF = \frac{\left[\begin{array}{c} A \times (A'D - AD) + B \times (B'E - BE) \\ + C \times (C'H - CH) \end{array}\right]}{A + B + C}$$

Nun ist $G'F - GF = GG'$, $A'D - AD = AA'$, $B'E - BE = BB'$, $C'H - CH = - CC'$. Also

$$GG' = \frac{A \times AA' + B \times BB' - C \times CC'}{A + B + C}$$

 oder,

oder, weil $GG' = xt$, $AA' = v.t$, $BB' = v'.t$, $CC' = v''.t$, so hat man

$$x.t = \frac{A.vt + B.v't - C.v''t}{A + B + C}$$

oder, wenn man alles durch t dividiret,

$$x = \frac{Av + Bv' - Cv''}{A + B + C}$$

Hier sind Av, Bv', Cv'' die Produkte der Massen mit den Geschwindigkeiten, folglich die Quantitäten der Bewegung (Stat. Hauptst. II, §. 31), und die lezte Gleichung bedeutet nichts anders, als unsern Lehrsaz.

Daß wir anstatt drei Körper, mehrere hätten annehmen können, ist leicht einzusehen.

Zusaz I. Wenn es sich trift, daß in der algebraischen Summe der Bewegungen die positiven Größen den negativen gleich sind, so wird $x = 0$, das heißt, der Schwerpunkt bleibt unbeweglich. Betragen die negativen Bewegungen mehr, als die positiven, so wird x negativ, und der Schwerpunkt beweget sich rückwärts, in der Richtung der negativen Bewegungen.

Zusaz II. Wenn die Linien AA', BB', CC' u. s. f. alle in einer Ebne sind, so ist auch die Bahn GG' des Schwerpunktes in derselbigen Ebne, oder wenigstens liegt er darin, wenn er sich auch nicht bewegen sollte.

§. 7.

Lehrsaz.

Wenn verschiedene Körper, vermöge verschiedener Kräfte, deren jede auf jeden wirket, mit einförmigen Geschwindigkeiten gerade und paralleie Linien durchlaufen, so beweget sich der Schwerpunkt

punkt eben so, als wenn alle Massen in ihm vereiniget wären, und als wenn alle Kräfte zusammen auf ihn wirkten (jede in ihrer eigenen Richtung oder mit derselben parallel).

Denn wir haben gefunden, daß sich der Schwerpunkt mit einer Geschwindigkeit x beweget, so daß

$$x = \frac{Av + Bv' - Cv''}{A + B + C}$$

Nun drücken die Produkte Av, Bv', und Cv'' nicht nur die Quantitäten der Bewegung aus, sondern zugleich die Kräfte, welche diese Bewegungen verursachen (Stat. Hauptst. II, §. 30). Wäre aber ein einziger Körper vorhanden, dessen Masse $= A + B + C$, und würde dieser durch eine Kraft $= Av + Bv' - Cv''$ beweget, so würde man, um seine Geschwindigkeit zu finden, die Kraft durch die Masse theilen müssen (Stat. Hauptst. II, §. 32); also wäre die Geschwindigkeit ebenfalls

$$x = \frac{Av + Bv' - Cv''}{A + B + C}$$

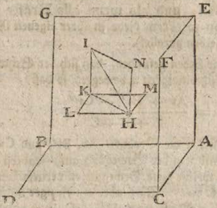
folglich in beiden Fällen einerlei.

§. 8.

Lehrsatz.

Jede Bewegung, Kraft, oder Geschwindigkeit kann in drei andere zerleget werden, die mit drei gegebenen Linien parallel sind, deren jede auf die beiden übrigen senkrecht ist, oder, welches einerlei ist, die auf drei Ebnen senkrecht sind, deren jede auf die beiden übrigen senkrecht ist. Nur ist der Fall ausgenommen, wo die gegebene Kraft schon an sich selbst mit einer oder zwei der gegebenen Ebnen parallel ist.

Es



Es seien gegeben die drei Linien AB, AC, AE, deren jede auf die beiden übrigen senkrecht ist, wie z. E. die drei Linien, die in jedem körperlichen Winkel eines Würfels zusammen laufen. Oder es seien gegeben die drei Ebnen AF, AD, AG, wovon ebenfalls jede auf den beiden übrigen senkrecht stehet. Es sei auch gegeben die Linie HI, welche irgend eine Kraft, Bewegung oder Geschwindigkeit vorstellet, und weche in ganz willkührlicher Richtung gezogen werden kann. Lege durch H eine Ebne ML von unbestimmter Größe, mit der einen gegebenen AD parallel. Aus I fälle eine senkrechte Linie IK auf diese Ebne, und ziehe in derselben HK. Ziehe noch HN mit IK, und IN mit HK parallel, so ist die Kraft HI in zwei andere HK und HN (=IK) zerleget, deren eine HN auf ML, folglich auch auf AD senkrecht, und mit AE parallel ist.

In der unbestimmten Ebne ML, welche wie AD auf AF senkrecht ist, ziehe HL und KM auf dieselbige AF senkrecht. Ebenfalls, da auch die unbestimmte Ebne ML wie AD auf AG senkrecht ist, so ziehe ebenfalls in der Ebne ML die Linien HM und KL auf AG senkrecht, so hast du

das

das Parallelogramm HMKLH, und die Kraft HK ist in zwei andere HL und HM zerleget, wovon die eine HL auf AF senkrecht, und mit AB parallel, die andere HM aber auf AG senkrecht, und mit AC parallel ist.

Folglich ist die Kraft HI in drei andere zerleget, nämlich HN mit AE, HL mit AB, und HM mit AC parallel; oder HN auf AD, HL auf AF, und HM auf AG senkrecht.

Zusatz I. Träfe es sich, daß die gegebene Kraft schon mit der einen Ebne parallel wäre, so ließe sie sich nur in zwei zerlegen, oder man müßte die dritte = o annehmen. Wäre z. E. HK die gegebene Kraft, so würde sie sich bloß in die beiden HL und HM zerlegen; die dritte HN müßte = o angenommen werden.

Zusatz II. Träfe es sich, daß die gegebene Kraft zugleich mit zwei der gegebenen Ebnen parallel, oder, welches einerlei ist, mit der einen parallel, und auf eine andere senkrecht wäre, so ließe sie sich gar nicht zerlegen, oder man müßte annehmen, daß die beiden übrigen null wären. Wenn z. E. HL die gegebene Kraft wäre, so würde HN = o und HM = o.

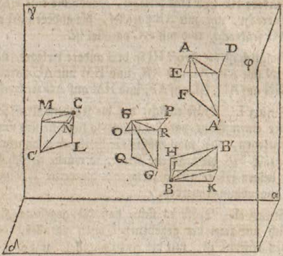
§. 9.

Lehrsatz.

Wenn sich verschiedene Körper in beliebigen Richtungen mit einförmigen Geschwindigkeiten bewegen, so beweget sich der Schwerpunkt eben so, als wenn alle Körper in ihm vereiniget wären, und als wenn alle einzelne Kräfte in ihren eigenen Richtungen (oder eigentlich parallel mit denselben) zugleich auf ihn wirketen.

(Folgende Figur.)

Gesetzt



Gesetzt, die drei Körper A, B, C bewegen sich in den Richtungen und mit den Geschwindigkeiten AA′, BB′, CC′, so zerlege diese Geschwindigkeiten, nach Anleitung des vorigen Paragraphs, jede in drei andere, die auf den drei Ebnen $\alpha\delta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\varphi$ senkrecht seien. Die Ebnen selbst werden nach Belieben gestellet, nur so, daß jede auf den beiden übrigen senkrecht sei.

Man betrachte nur erstlich die Bewegungen, in sofern sie in parallelen Linien geschehen, die auf $\alpha\delta$ senkrecht sind, so bekömmt, vermöge derselben, der Schwerpunkt G eine Geschwindigkeit GQ, so daß (§. 6)

$$GQ = \frac{C \times CL + A \times AF - B \times BH}{C + B + A}$$

Ver-

Vermöge der Bewegungen, die auf $\alpha\varphi$ senkrecht sind, eine Geschwindigkeit

$$GP = \frac{A \times AD + B \times BK - C \times CM}{A + B + C}$$

Vermöge der Bewegungen, die auf $\alpha\gamma$ senkrecht sind, entstehet die Geschwindigkeit

$$GO = \frac{A \times AE + C \times CN - B \times BI}{A + B + C}$$

Mit den Seiten GP und GO mache man das Parallelogramm PO, und ziehe die Diagonal-Linie GR, so ist GR die aus GP und GO zusammengesetzte Geschwindigkeit. Mit den Seiten GR und GQ mache man das Parallelogramm RQ, so ist die Diagonal-Linie GG′ die aus GQ und GR, oder aus GQ, GP und GO zusammengesetzte Geschwindigkeit, und folglich die Geschwindigkeit und Richtung des Schwerpunktes.

Gesetzet nun, die Massen A, B, C, würden im Schwerpunkte G vereiniget, und die Kräfte mit sich selbst parallel dahin versetzet, so ließe sich jede Kraft ebenfalls in drei zerlegen, die auf $\alpha\delta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\varphi$ senkrecht wären. Z. E. die Kraft $A \times AA'$ würde zerleget werden können in $A \times AF$, $A \times AD$ und $A \times AE$, und so die übrigen. Nähme man alle einzelne auf $\alpha\delta$ senkrechte Kräfte zusammen, so entstünde daraus eine einzige Kraft

$$C \times CL - B \times BH + A \times AF$$

und da diese die zusammengesetzte Masse $C + B + A$ zu bewegen hätte, so wäre die Geschwindigkeit

$$GQ = \frac{C \times CL - B \times BH + A \times AF}{C + B + A}$$

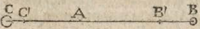
Eben so wird bewiesen, daß auch die beiden übrigen Geschwindigkeiten GP und GO, und folglich die zusammengesetzte GG′ die nämliche sein müßten, und auch in der nämlichen Richtung, als im wirklichen Falle. Also muß im wirklichen Falle und im gedachten die Bewegung des Punktes G ganz auf einerlei Art geschehen.

Zusatz. Da es sich treffen kann, daß die Kräfte, wenn sie unmittelbar auf den Schwerpunkt wirketen, einander aufheben würden, so kann auch die Geschwindigkeit des Schwerpunktes null werden, das heißt, es kann sich treffen, daß er unverrücket bleibe, während daß die Körper sich bewegen.

§. 10.

Lehrsatz.

Wenn man annimmt, daß zwei Körper, einer auf den andern, eine anziehende Kraft ausüben, deren Wirkung sich verhält, gerade wie die anziehenden Massen, und umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen, so bleibet ihr gemeinsamer Schwerpunkt unbewegt.



Es sei A der gemeinsame Schwerpunkt der Massen B und C, so ist

$$AB : AC :: C : B$$

Gesetzt, in einer unendlich kleinen Zeit durchlaufe C die CC′, vermöge der anziehenden Kraft des B, und B durchlaufe BB′ vermöge der anziehenden Kraft des C, so verhalten sich diese Räumchen wie die Wirkungen der anziehenden Kraft, und diese, wie vorausgesetzet worden, verhalten sich gerade wie die Massen der anziehenden Körper,

Körper, und umgekehrt wie die Entfernungen. Nun entstehet BB' aus der anziehenden Kraft des C, in der Entfernung CB, und CC' aus der anziehenden Kraft des B, in der Entfernung BC. Also ist

$$BB' : CC' :: \frac{C}{CB^2} : \frac{B}{BC^2}$$

oder, da $CB^2 = BC^2$

$$BB' : CC' :: C : B$$

Da nun auch $AB : AC :: C : B$

so ist $(AB - BB') : (AC - CC') :: C : B$

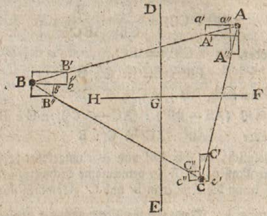
oder $AB' : AC' :: C : B$

Folglich, da sich AB' und AC' umgekehrt verhalten wie die Massen, so ist der gemeinsame Schwerpunkt noch in A, wenn die Körper in B' und C' gekommen sind.

Zusatz I. Wenn sich die Wirkungen der anziehenden Kraft gerade wie die anziehenden Massen, und umgekehrt wie jede beliebige gleiche Potenz der Entfernung verhalten, so bleibet der Beweis der nämliche, und die Lage des Schwerpunktes wird nicht verrücket; denn, wenn man im vorigen Beweise BC^3, BC^4, u. s. f. anstatt BC^2 setzet, so verschwinden jene Potenzen so gut als BC^2.

Zusatz II. Wenn sich auch die Wirkung der anziehenden Kräfte nicht umgekehrt, sondern gerade wie irgend eine Potenz der Entfernung verhielte, so würde dennoch der Schwerpunkt unbewegt bleiben. In diesem Falle hätte man anstatt des gemeinschaftlichen Divisors BC^2 oder BC^3 &c. einen gemeinschaftlichen Multiplikator, welcher ebenfalls aus der Proporzion verschwinden würde.

Zusatz III. Wenn mehrere Körper, die in einer Ebne liegen, eine anziehende Kraft ausüben, die sich gerade wie die anziehenden Massen, und gerade oder umgekehrt wie eine gleichnamichte Potenz der Entfernungen verhält, so bleibt auch dann der Schwerpunkt in Ruhe.



Es sind A, B, C drei Körper. B erhält durch die Anziehung des A die Geschwindigkeit BB′, und A durch die Anziehung des B die Geschwindigkeit AA′. Ferner, B und C erhalten durch ihre wechselseitige Anziehung die Geschwindigkeiten BB″, CC″. Endlich, A und C erhalten durch ihre Wirkung auf einander die Geschwindigkeiten AA″, CC′, und es ist (§. 10 im Beweise)

$$\begin{aligned} AA' &: BB' :: B : A \\ CC'' &: BB'' :: B : C \\ CC' &: AA'' :: A : C \end{aligned}$$

Durch den Schwerpunkt G lege man eine Ebne DE, senkrecht auf diejenige, worin die Körper liegen, oder man ziehe bloß eine Linie DE in der Ebne der Körper. Jede der angeführten Geschwindigkeiten zerlege man in zwei, deren eine mit DE parallel, die andere aber auf DE senkrecht sei, so sind die Dreiecke Aa′A′ und Bb′B′ ähnlich, weil

weil jedes einen rechten Winkel hat, und weil die Wechselwinkel bei A und B gleich sind. Aus ähnlichen Gründen ist $\triangle Bb''B'' \backsim \triangle Cc''C''$ und $\triangle Cc'C' \backsim \triangle A'a''A''$. Daraus folget

$$Aa' : Bb' :: AA' : BB' :: B : A$$
$$Cc'' : Bb'' :: CC'' : BB'' :: B : C$$
$$Cc' : Aa'' :: CC' : AA'' :: A : C$$

läßt man die mittleren Verhältnisse weg, und macht man die Produkte der äußeren und mittleren Sätze, so ist

$$A \times Aa' = B \times Bb'$$
$$C \times Cc'' = B \times Bb''$$
$$C \times Cc' = A \times Aa''$$

Wenn man jetzt nur bloß diejenigen parallelen Bewegungen betrachtet, welche auf DE senkrecht sind, so ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes G (§. 6)

$$\left[\frac{A \times Aa' - B \times Bb' + C \times Cc'' - B \times Bb'' + A \times Aa'' - C \times Cc'}{A + B + C}\right]$$

Da nun hier im Zähler jede negative Größe der vorhergehenden positiven gleich ist, so wird die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, in Betrachtung der Ebne DE, null, das heißt, er kömmt nicht aus dieser Ebne.

Durch den Schwerpunkt G stelle man noch eine Ebne, auf der DE und auf der, worin die Körper liegen, senkrecht, oder man ziehe bloß in der Ebne der Körper durch G die FH auf DE senkrecht, so wird sich auf eine ganz ähnliche Art beweisen lassen, daß die Geschwindigkeit des Schwerpunktes auch in Betrachtung der FH null ist, und daß er folglich unbeweget bleibet.

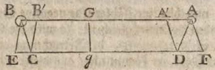
Zusatz IV. Endlich, wenn auch die Körper nicht in einer Ebne liegen, und das Gesetz der anziehenden Kraft wie vorher bleibet, so wird der Schwerpunkt durch das

Anziehen nicht beweget. In diesem Falle leget man durch den Schwerpunkt drei Ebnen, deren jede auf die beiden übrigen senkrecht ist. Man beweiset für jede Ebne insbesondere, wie für die Ebne DE geschehen, daß der Schwerpunkt in derselben bleibet, und schließt, daß er nicht anders in allen dreien bleiben kann, als indem er seinen Ort gar nicht verändert.

§. 11.

Lehrsatz.

Wenn zwei Körper, die in beliebigen Richtungen geworfen sind, sich einander anziehen, und wenn die Wirkung der anziehenden Kraft sich gerade wie die anziehende Masse, und gerade oder umgekehrt wie eine Potenz der Entfernung verhält, so beweget sich der Schwerpunkt eben so, als wenn die anziehende Kraft gar nicht vorhanden wäre.



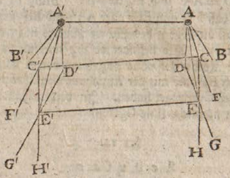
Gesetzt, die Körper A und B werden mit den Geschwindigkeiten und in den Richtungen AF, BE geworfen, und wenn diese Bewegungen allein Statt fänden, beschriebe der Schwerpunkt die Linie Gg. Gesetzt ferner, die anziehende Kraft gebe ihnen zugleich die Geschwindigkeiten AA′ und BB′, so beschreiben die Körper die Diagonal-Linien AD, BC. Man stelle sich vor, die Körper seyen wirklich in F und E gekommen, sie werden aber durch ihre wechselseitige Anziehung nach D und C zurückgebracht, so so daß FD = AA′ und EC = BB′. Nun ist bewiesen worden, daß FD und EC, oder AA′ und BB′ sich so verhalten, daß die Lage *g* des Schwerpunktes nicht verrücket wird (§. 10). Also befindet er sich wirklich in g, es mögen die Körper sich ohne Anziehung von A nach F und von B nach E, oder mit der Anziehung von A nach D und von B nach C beweget haben. In beiden Fällen durchläuft er die nämliche Linie *Gg*.

§. 12.

Lehrsatz.

Wenn zwei Körper einander anziehen, nach dem Verhältnisse der anziehenden Masse und einer Potenz der Entfernung, wenn diese in einer Ebne geworfen werden, und wenn sie außerdem zugleich in parallelen Richtungen, nach einerlei Gegend hin, gleiche Geschwindigkeiten bekommen, so haben sie in jedem beliebigen Zeitpunkte die nämliche relative Lage, als wenn sie diese parallele Geschwindigkeiten nicht bekommen hätten.

Gesetzt, die Körper A und A′ (folg. Fig.) sind in den Richtungen AB, A′B′ geworfen, so daß sie in einem unendlich kleinen Zeittheile AB und A′B′ durchlaufen würden. Gesetzt ferner, daß sie, vermöge ihrer anziehenden Kraft, von diesen Linien AB, A′B′ abweichen und wirklich AC, A′C′ beschreiben, so wäre ihre relative Lage am Ende des ersten Zeittheilchens durch die Richtung und die Länge der CC′ bestimmet. Laßt uns aber annehmen, daß sie zugleich die gleichen und parallelen Geschwindigkeiten AD, A′D′ bekommen (wobei der gedachte unendlich kleine Zeittheil als Einheit der Zeit betrachtet wird), so werden sie die Diagonal-Linien AE, A′E′ der Parallelogramme CD, C′D′ beschreiben. Da in denselben CE mit AD, und C′E′ mit A′D′ gleich und parallel sind, und da AD, A′D′ selbst



gleich und parallel sind, so sind auch CE, C'E' gleich und parallel; folglich sind CC', EE', die ihre Enden verbinden, gleich und parallel. Also sind beide Körper in E und E' in derselbigen relativen Lage, als wenn die Geschwindigkeiten AD, A'D' nicht vorhanden gewesen wären, und die Körper sich in C und C' befunden hätten.

Laßt uns jetzt betrachten, was im folgenden Zeittheilchen geschiehet. Man verlängere AC, DE, CE, so daß die Verlängerungen CF, EG, EH den Linien selbst gleich werden, und ebenfalls auf der anderen Seite mache man C'F' = A'C', E'G' = D'E', E'H' = C'E'. Wären die parallelen Geschwindigkeiten nicht vorhanden, so würden die Körper in C, C' durch die erhaltene Bewegung sich bestreben, die Linien CF, C'F' durchzulaufen, sich aber zugleich, vermittelst der anziehenden Kraft, einander nähern. Da aber die parallelen Geschwindigkeiten anfangs gewirkt haben, so sind die Körper in E und E' im selbigen Zustande, als wenn sie mit den Geschwindigkeiten AE, A'E' beweget würden, oder der eine mit AC und AD, und der andere mit A'C' und A'D', oder der eine mit DE und CE und der andere mit D'E' und C'E', oder der eine mit EG und EH und der andere mit E'G' und E'H', wozu noch

noch beiderseits die Wirkung der anziehenden Kraft kömmt. Da nun EH und E'H' als die Verlängerungen von CE und C'E' gleich und parallel sind, so wird, wie kurz vorher bewiesen, die respektive Lage durch diese Geschwindigkeiten nicht verändert, sondern sie dependirt nur von den Geschwindigkeiten EG und E'G' und von der anziehenden Kraft.

Nun ist EG mit CF gleich und parallel, weil DE und AC gleich und parallel sind. Eben so ist E'G' mit C'F' gleich und parallel. Es ist auch EE' mit CC' gleich und parallel.

Es ist demnach alles in FCC'F' eben so wie in GEE'G'. Die nämliche Veränderung der Lage also, die in der Entfernung CC' vermittelst der Geschwindigkeiten CF und C'F' und der anziehenden Kräfte entstehen würde, muß auch in der gleichen Entfernung EE' durch die Geschwindigkeiten EG, E'G' und durch die anziehenden Kräfte entstehen. Folglich werden sich am Ende des zweiten Zeittheilchens die Körper in derselbigen relativen Lage befinden, es mögen die parallelen Geschwindigkeiten AD, A'D' vorhanden sein oder nicht.

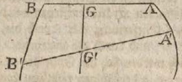
Und so kann der Beweis für die folgenden Zeittheilchen fortgesetzet werden.

Zusatz. Man kann den Lehrsatz noch allgemeiner machen, nämlich: Wenn überhaupt so viel Körper, als man will, sich auf welche Art man will, bewegen, und wenn sie alle zugleich parallele und gleiche Geschwindigkeiten in einerlei Richtung bekommen, so wird ihre relative Lage dadurch in keinem Augenblicke verrücket. Denn wenn die Körper nur diese parallelen Geschwindigkeiten hätten, so würden sie ihre relative Lage behalten. Diese Geschwindigkeiten haben also keinen Einfluß auf die Veränderung der gegenseitigen Lage. Nur das ganze System rücket fort, indem alle Theile desselben ihre relative Bewegung behalten.

§. 13.

Lehrsatz.

Wenn zwei Körper, die in einer Ebne mit beliebigen Geschwindigkeiten und Richtungen geworfen sind, einander wechselsweise anziehen, und wenn die anziehende Kraft sich verhält, gerade wie die anziehende Masse, und umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung, so bestreben sich beide Körper, sich dem gemeinsamen Schwerpunkte zu nähern, mit solchen Kräften, die sich umgekehrt verhalten, wie die Quadrate der Entfernungen vom selbigen Schwerpunkte.



Gesetzt, die Körper A und B sind geworfen worden, und ziehen einander an, so daß sie, vermöge der Kraft des Wurfes und der anziehenden Kraft, die krummen Linien AA', BB' beschreiben, so wissen wir schon, daß die Bahn GG' des gemeinsamen Schwerpunktes durch die anziehende Kraft nicht geändert wird (§. 11). Er beweget sich demnach, als wenn beide Körper bloß vermöge der Wurfkräfte beweget würden, folglich eben so, als wenn diese Wurfkräfte unmittelbar auf ihn gewirket hätten (§. 9); also in gerader Linie und einförmig (Stat. Hauptst. III, §. 3). Jedoch, wenn die Richtungen der Würfe entgegengesetzet sind, so kann seine Geschwindigkeit auch null werden, so daß er ruhend bleibe (§. 9, Zusatz). Der folgende Beweis gilt für beide Fälle, indem die Punkte G' und G auf einander fallen können.

Der Schwerpunkt sei demnach, wie angenommen worden, in G, wenn die Körper in A und B sind; er sei aber in G', wenn die Körper in A' und B' gekommen sind. So

So ist $A : B :: BG : AG$
daher $(A+B) : B :: (BG+AG) : AG$
oder $(A+B) : B :: AB : AG$

Aus derselbigen Ursache ist

$$(A+B) : B :: A'B' : A'G'$$

also ist $AB : A'B' :: AG : A'G'$
und auch $AB^2 : A'B'^2 :: AG^2 : A'G'^2$

Wenn wir nun die anziehenden Kräfte, die auf den Körper A in den Lagen A und A' wirken, mit F und *f* bezeichnen, so ist, vermöge der Voraussetzung,

$$F : F' :: \frac{B}{AB^2} : \frac{B'}{A'B'^2}$$

oder $$F : F' :: \frac{1}{AB^2} : \frac{1}{A'B'^2}$$

oder $$F : F' :: A'B'^2 : AB^2$$

Da nun $A'B'^2 : AB^2 :: A'G'^2 : AG^2$, so hat man

$$F : F' :: A'G'^2 : AG^2$$

Folglich verhalten sich die Wirkungen der anziehenden Kraft in A und A' in der That umgekehrt wie die Quadrate der jedesmaligen Entfernungen des Körpers vom gemeinsamen Schwerpunkte.

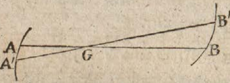
Auf eine ähnliche Art läßt sich das nämliche vom anderen Körper B beweisen.

Zusatz. Wir haben das umgekehrte Verhältniß der Quadrate der Entfernungen für das Gesetz der Anziehung angenommen. Nicht minder würde der Beweis bestehen, wenn die anziehende Kraft in geradem Verhältnisse der anziehenden Massen, und im geraden oder umgekehrten Verhältnisse einer beliebigen Potenz der Entfernung wirkete; dann müßte allenthalben im Lehrsatze und im Beweise diese Potenz anstatt des Quadrats gesetzet werden.

§. 14.

Lehrsatz.

Wenn zwei Körper in einer Ebne in beliebigen Richtungen geworfen sind, und wenn sie einander anziehen, nach dem geraden Verhältnisse der anziehenden Masse und dem umgekehrten des Quadrates der Entfernung, und wenn dabei die Würfe so geschehen sind, daß der gemeinsame Schwerpunkt unverrücket an seinem Orte bleibet, so beschreiben beide Körper ähnliche Kegelschnitte, die ihren gemeinsamen Brennpunkt im gemeinsamen Schwerpunkte haben.



Es seien die Körper A und B in dem angenommenen Falle, dessen Möglichkeit im Anfange des vorigen Paragraphs dargethan worden. So ist eben (§. 13) bewiesen worden, daß die anziehenden Käfte in A und A′ sich umgekehrt verhalten, wie die Quadrate der Entfernungen AG und A′G, und folglich muß der Körper A einen Kegelschnitt AA′ beschreiben, dessen Brennpunkt oder Nabel in G ist (Hauptst. VII, §. 22, Anm.). Aus der nämlichen Ursache beschreibet der Körper B einen Kegelschnitt BB′, dessen Nabel ebenfalls in G ist.

Ferner folget aus der Eigenschaft des gemeinsamen Schwerpunktes, daß

$$A : B :: BG : AG$$
$$A : B :: B'G : A'G$$
also $$BG : AG :: B'G : A'G$$

Da

Da also die Vektoren BG und B′G allemal mit den gegenüberstehenden AG und A′G in gleichem Verhältnisse sind, so ist die Linie BB′ der AA′ ähnlich, nur werden beide in entgegengesetzten Richtungen beschrieben.

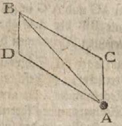
Zusatz. Wenn auch der Schwerpunkt mit einförmiger Bewegung fortrücket, so beschreiben dennoch beide Körper ähnliche Kegelschnitte, die aber auch mit der Geschwindigkeit des Schwerpunktes fortrücken. Denn man stelle sich vor, daß alle Punkte der Ebne, worin die Bewegung geschiehet, zugleich mit dem Schwerpunkte in parallelen Richtungen fortrücken, so werden, vermöge des vorhergehenden Beweises, in dieser Ebne zwei ähnliche Kegelschnitte beschrieben, die aber mit der Geschwindigkeit des Schwerpunktes fortrücken.

§. 15.

Wenn verschiedene Körper in Bewegung sind oder gesetzet werden, und wenn sie auf einander wirken, es sei durch Verbindungen, oder anziehende Kräfte, oder überhaupt wie man will, so kann man sich vorstellen, daß diese wechselseitige Wirkungen mit einmal aufhören, alle Körper vollkommen frei werden, und nun jeder seinen Weg mit der letzten Geschwindigkeit, und in der Richtung, die er zuletzt hatte, fortsetzet. Dieses wollen wir seine freie Bewegung nennen. Hingegen soll diejenige Bewegung, die jeder Körper, vermöge des Einflusses der übrigen auf ihn, in der That erhält, indem die wechselseitige Wirkung nicht aufhöret, die wirkliche Bewegung genannt werden.

Nun läßt sich ferner jede Bewegung in zwei zerlegen, deren eine einer gegebenen gleich ist, die im nämlichen Punkte ihren Anfang nimmt. Z. Ex. es seien gegeben die Bewegungen $A \times AB$ und $A \times AC$. Man ziehe CB und vollende das Parallelogramm CD, so ist die Bewegung $A \times AB$ in zwei andere $A \times AC$ und $A \times AD$ zerleget, deren erste mit der gegebenen $A \times AC$ gleich ist.

Es



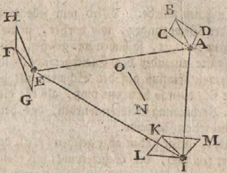
Es wird sich demnach jede freie Bewegung in zwei andere zerlegen lassen, deren eine mit der wirklichen einerlei ist, deren andere wir aber die verlorne nennen wollen.

§. 16.

Lehrsatz.

Wenn verschiedene Körper, die auf irgend eine Art auf einander wirken, in Bewegung sind, oder in Bewegung gesetzet werden, und wenn man die freie Bewegung jedes Körpers in die wirkliche und in die verlorne zerleget, so sind die verlornen Bewegungen so beschaffen, daß alle Körper in Gleichgewicht bleiben müßten, wenn bloß diese verlornen Bewegungen den Körpern eingedrücket würden.

Gesetzt, daß die Körper A, E und I (folg. Fig.) entweder verbunden sind, oder sonst auf einander wirken, es sei durch Anziehen, Zurückstoßen, oder irgend eine andere Wirkungsart. Sie durchlaufen in einem beliebigen Zeittheilchen die kleinen Linien AC, EG, IM. Wären sie aber im Anfange dieses Zeittheilchens frei geworden, so hätten sie die Linien AB, EF, IK beschrieben. Auf den Diagonalen AB, EF, IK, und mit den Seiten AC, EG, IM, mache man die Parallelogramme CD, GH, ML, so kann man sich vorstellen, im Anfange des Zeittheilchens wurden die Körper, jeder von zwei Kräften gereizet, so daß nämlich



lich die Kräfte A×AC und A×AD auf den Körper A wirketen, E×EG und E×EH auf E, I×IM und I×IL auf I. Da es sich aber findet, daß die Körper nur allein den Kräften A×AC, E×EG, I×IM gehorchen, und die übrigen A×AD, E×EH und I×IL ohne Wirkung bleiben, so müssen diese letzten einander aufheben, und folglich so beschaffen sein, daß sie ein Gleichgewicht verursachen würden, wenn sie allein wirketen.

§. 17.

Lehrsatz.

Wenn verschiedene Körper auf einander wirken, oder mit einander verbunden sind, und wenn diese Körper, wie man will, beweget werden, so beweget sich der gemeinsame Schwerpunkt eben so, als wenn die Körper alle frei wären, vorausgesetzet, daß das ganze System selbst frei sei, und nicht gezwungen werde, um einen unveränderten Punkt oder eine Axe zu drehen.

Gesetzt, es sei in der vorigen Figur NO der Weg, den der gemeinsame Schwerpunkt der Körper A, E und I, wenn sie frei wären, vermöge der Kräfte A×AB, E×EF, I×IK, IXIK, nehmen würde. Wird nun jede dieser freien Kräfte oder Bewegungen, wie vorher, in die wirkliche und verlorne zerleget, so haben wir gesehen, daß die verlornen Kräfte einander das Gleichgewicht halten, und folglich keinen Einfluß auf den Schwerpunkt haben, so daß dieser sich eben so bewegen muß, als ehe diese Kräfte durch die Verbindung verloren wurden, das heißt, eben so, wie im freien Zustande.

Zusatz I. Wir haben aber gesehen (§. 9), daß, wenn die Körper frei sind, der Schwerpunkt sich eben so bewegt, als wenn alle Kräfte, jede in ihrer eigenen Richtung, auf den gemeinsamen Schwerpunkt wirketen; oder, als wenn eine einzige, aus allen zusammengesetzte, auf ihn wirkete. Folglich findet das nämliche Statt, wenn auch die Körper verbunden sind, oder sonst eine wechselseitige Wirkung haben.

Zusatz II. Dieser allgemeine Lehrsatz bestätigt dasjenige, was schon oben (§. 11) auf eine andere Art bewiesen worden, daß sich nämlich der gemeinsame Schwerpunkt zweier geworfener Körper, die sich wechselsweise anziehen, eben so beweget, als wenn keine anziehende Kraft Statt fände.

Zusatz III. Eben dieser Lehrsatz bestätiget auch, was schon vorher (Hauptst. VI, §. 24) auch auf eine andere Art bewiesen worden, nämlich, daß, wenn ein freier Körper einen Stoß empfängt, der nicht durch den Schwerpunkt gehet, dieser sich dennoch eben so beweget, als wenn er den Stoß unmittelbar empfangen hätte. Denn ein jeder Körper kann als ein System von unendlich viel Körperchen betrachtet werden, die mit einander verbunden sind.

§. 18.

Um nun dasjenige, was die Bewegungen der Schwerpunkte betrift, kurz zusammen zu fassen, so wollen wir uns an diesen wenigen Sätzen halten.

Wenn

Wenn zwei oder mehrere ganz freie Körper sich in beliebigen Richtungen (parallel oder nicht) bewegen, so beweget sich der gemeinsame Schwerpunkt eben so, als wenn alle bewegende Kräfte (die durch die Quantitäten der Bewegung vorgestellet werden können) unmittelbar auf ihn wirketen, und als wenn alle Massen in ihm vereiniget wären. Es kann sich treffen, daß die in den Schwerpunkt versetzten Kräfte oder Bewegungen einander das Gleichgewicht halten. In diesem Falle ruhet der gemeinsame Schwerpunkt, ob gleich die einzelnen Körper in Bewegung sind.

Wenn zwei oder mehrere Körper sonst durch nichts beweget werden, als dadurch, daß sie sich wechselsweise anziehen, nach dem geraden Verhältnisse der anziehenden Masse und dem umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung, so ruhet ihr Schwerpunkt, unterdessen daß sie sich einander nähern.

Wenn aber solche Körper zugleich in beliebigen Richtungen geworfen werden, so beweget sich ihr Schwerpunkt eben so, als wenn sie einander gar nicht anzögen.

Hingegen bestreben sie sich, dem gemeinsamen Schwerpunkte näher zu kommen, mit solchen Kräften, die sich umgekehrt verhalten, wie die Quadrate der Entfernungen von demselben.

Sind die Würfe so geschehen, daß der gemeinsame Schwerpunkt ruhen müsse, so beschreiben beide Körper Kegelschnitte, die einen gemeinsamen Brennpunkt im gemeinsamen Schwerpunkte haben. Und wenn sich auch der Schwerpunkt beweget, so beschreiben sie dennoch dieselbigen Kegelschnitte, aber auf einer bewegten Ebne.

Wenn verschiedene Körper oder Punkte sich in ihren Bewegungen hindern, es sei durch ihre Verbindung, oder durch ihre anziehende Kraft, oder auf welche Art man will, und wenn diese Körper wie man will, zur Bewegung gereizet werden, so beweget sich ihr Schwerpunkt als wenn sie frei wären, das heißt, als wenn alle bewegende Kräfte unmittelbar auf ihn wirketen, vorausgesetzet, daß das ganze System frei sei, und nicht gezwungen, sich um irgend einen Punkt oder eine Axe zu drehen.

Hiermit endigen wir die Lehre von der Bewegung der Schwerpunkte, und zugleich die Dynamik. Es ließe sich freilich noch vieles von Kräften und Bewegungen sagen; aber alles, was zu einer Wissenschaft gehöret, schicket sich deshalb nicht immer in ein Lehrbuch.

Ende.

Berichtigungen zu den Grundlehren der Hydrostatik.

Bisher habe ich in gegenwärtiger Dynamik keine Druckfehler bemerket. Jedoch, im Kolumnentitel, Seite 316, stehet V. Hauptstück, anstatt VI. Hauptstück.

Für die Hydrostatik habe ich noch folgende Druckfehler und Versehen anzuzeigen. Sie sind mir von einigen gütigen Lesern angezeiget worden.

Seite 26, Zeile 12 von unten; UT, muß heißen VT.
Seite 29, Zeile 5; Propfen, muß heißen Pfropfen.
Seite 32, Zeile 7 von unten; der, muß heißen das.
Seite 40, Zeile 5; einem, lies einen (zweimal in derselbigen Zeile).
Seite 67, Zeile 5; Windeltreppe, lies Wendeltreppe.
Seite 103, Zeile 10 von unten; leide, soll seyn leidet.
Seite 167, Zeile 8 von unten; stehet homogener, statt homogener.
Seite 150, Zeile 4. Man streiche das h weg im Worte Athmosphäre.
Seite 151, Zeile 8 von unten. Eben so.
Seite 173, Zeile 7 von unten. Anstatt athmosphärischer, schreibe man atmosphärischer.
Seite 204, Zeile 8 von unten, ist wiederum ein h zu viel in der Atmosphäre. Dieser orthographischen Sünde bin ich erst bei den letzten Bögen gewahr geworden, in welchen allemal Atmosphäre und atmosphärisch ohne h stehet.
Seite 225, Zeile 3; das ganze Volumen, lies die ganze Länge.
Seite 279, Zeile 9; – g, lies *l* – g.

Nun folgen noch einige Anmerkungen und Berichtigungen, die mir erst nach dem Drucke der Hydrostatik beigefallen sind.

Hauptst. VI. §. 11. Hier wird gesaget, daß die Stricke und Fäden sich durch die Feuchtigkeit der Luft verlängern. In andern Büchern findet man, daß sie sich verkürzen. Beides ist wahr; aber mit Unterschied. Wenn der Strick frei hänget oder lieget, ohne durch ein Gewicht gezogen zu werden, so pfleget er sich durch das eindringende Wasser zu verkürzen, indem er sich in der Dicke ausdehnet. Hänget aber ein hinlängliches Gewicht daran, so kömmt es auf die Beschaffenheit des Strickes an. Ist er kreuzweise geflochten, so verkürzet er sich ebenfalls und aus derselbigen Ursache; ist er aber nur gedrehet, so pfleget er sich zu verlängern, indem er sich losdrehet. Jedoch scheinet es, daß sich einige Materien nicht bloß durch das Losdrehen, sondern durch die Erschlaffung ihrer Kohärenz ausdehnen, als z. E. Häute, Darmsaiten, u. s. w.

Im IX. Hauptstücke, §. 3, habe ich gesagt, daß die Art, welche Lana vorschlug, große hohle metallene Kugeln luftleer zu machen, nicht ausführbar ist. Er wollte nämlich, daß man die Kugeln mit Wasser füllete, und das Wasser unten durch eine Röhre ablaufen ließe,

ließe, da dann, nach seiner Meinung, der vom Wasser verlassene Raum luftleer bleiben müßte. Möglich wäre dennoch diese Methode, wenn nur die Röhre über 32 oder 33 Fuß lang, und unten in Wasser getauchet wäre. In diesem Falle würde das Wasser bis zur gemeldeten Höhe sinken, und die Kugel leer lassen. Man könnte sie, so bald dieses geschehen wäre, mit einem Hahne verschließen. Wenn man Quecksilber anstatt Wasser gebrauchte, so wäre eine Röhre von 27 bis 28 Zoll, oder etwas mehr, hinlänglich.

Hauptst. IX, §. 13. **Feuersgefahr bei den Montgolfier'schen Luftbällen.** Davon hat man ein neues Beispiel an dem Balle, welcher am 15. Julli 1790 in Paris, bei Gelegenheit des Verbündungsfestes, durch Feuer steigen sollte. Das Feuer ergriff die Hülle, und 12 Personen wurden beschädiget.

Im nämlichen Paragraph wird von Fallschirmen geredet. Seit der Zeit hat es ein Mensch gewaget, sich, mit Hülfe dieses Instruments, von einem hohen Thurme herunterzulassen. Es war der Mechanikus Murray in Portsmuth. Sein erster Versuch am 14. März 1790 ging gut von Statten. Hingegen bei dem zweiten, am 14. April desselbigen Jahres, hinderte der Wind die Wirkung des Schirmes, und der Künstler beschädigte sich durch einen harten Fall, jedoch ohne Lebensgefahr.

Hauptst. IX, §. 19. Hier wird von Schwingungen geredet, die der Ball oben in der Luft verrichtet, bevor er in einer gewissen Höhe schwebend bleibet. Nach einer genaueren Prüfung glaube ich, daß solche Schwingungen in diesem Falle nicht Statt finden sollten, weil die Geschwindigkeit allmählig abnimmt, und zuletzt null wird. Freilich haben die ersten Luftschiffer solche Schwingungen bemerket; sie konnten aber von anderen Ursachen herrühren, hauptsächlich von der Veränderlichkeit des Feuers, welches unter dem Balle bald stärker, bald schwächer brannte. Bei Hrn. Blanchards Luftfahrt in Berlin habe ich dergleichen Schwingungen nicht bemerket, da ich seinen Ball in der größten Höhe mit einem guten Fernrohre beobachtete.

An den Buchbinder. Die auf gegenwärtigem Bogen abgedruckten Stücke müssen also auf einander folgen: 1) Titel, 2) Nachricht, 3) Vorrede, 4) Inhalt. Die Berichtigungen werden ganz am Ende des Buches angehänget.