[illegible]

[illegible]

Gedanken
über den
gegenwärtigen Zustand
der
Mathematik
und
die Art
die Vollkommenheit und Brauchbarkeit
derselben zu vergrößern.

Ein Versuch,
den Mathematikern und Philosophen zur Prüfung
und Ergänzung vorgelegt
von

Johann Andreas Christian Michelsen,
Professor der Mathematik und Physik am vereinigten Berlinischen
und Cölnischen Gymnasium.

Berlin,
bey Siegismund Friedrich Hesse und Compagnie.
1789.

Dem

Hochgebohrnen Herrn

Herrn

Johann Christian von Woellner,

Seiner Königlichen Majestät von Preußen wirklichen Geheimen Etats- und Justiz-Minister,

Chef des geistlichen Departements, Obercuratoren der Universitäten rc. rc.

Meinem gnädigsten Herrn

Hochgebohrner Herr
Hochgebietender Herr Geheime
Etats- und Justiz-Minister
Gnädigster Herr

Ew. Excellenz verstatten gnädigst, Denenselben zur Bezeugung meiner unterthänigsten Ehrfurcht gegenwärtigen Versuch zu überreichen.

Er enthält einige tadelnde Gedanken, die nicht aus Stolz geflossen sind, nebst einigen Vorschlägen, die wenigstens nicht zu den unausführbaren gehören. Lobreden schienen mir überflüssig, wo unerreichbare Vorzüge hellglänzend ins Auge stralen.

Aus gleichem Grunde schweige ich hier von Ew. Excellenz erhabenen Verdiensten um den Staat und die Wissenschaften; und erwähne bloß die bewundernde und tiefe Ehrfurcht, mit welcher ich verharre

Hochgebohrner Herr
Hochgebietender Herr Geheime
Etats- und Justiz-Minister
Gnädigster Herr
Ew. Excellenz

Berlin,
den 20sten Februar
1789.

unterthänigstgehorsamster
Johann Andreas Christian Michelsen.

Vorrede.

Ich weiß nicht, ob es Entschuldigung bedarf, daß ich, bey der Betrachtung des gegenwärtigen Zustandes der Mathematik, mein Augenmerk mehr auf die dieser Wissenschaft hie und da noch anklebenden Mängel, als auf die großen Vorzüge gerichtet habe, welche dieselbe vor allen übrigen Disciplinen hat. Hätte ich das letztere thun wollen, so würde ich allerdings einen viel reichhaltigern und angenehmern Stoff zu bearbeiten gehabt haben; allein von jenen Mängeln in der Absicht zu reden, um zu zeigen, wie leicht ihnen abgeholfen werden könne, schien mir nützlicher, zumal da die Vollkommmenheit der Mathematik im Ganzen genommen, von jedermann zugestanden wird.

Der Hauptgesichtspunkt, aus welchem ich die Mathematik betrachtet habe, ist der, daß ich die reine Mathematik als Wissenschaft, die durchaus den Beystand der Erfahrung entbehren kann, oder als reine Vernunftwissenschaft aus der Construktion der Begriffe angesehen. Durch diese Erklärung Herrn Kants wird das Wesen der Mathematik besser als durch jede andere definirt, und es schien mir daher der Mühe nicht unwerth zu seyn, sie durchaus zum Grunde zu legen, und ihre Entwickelung zu versuchen.

Wenn Kenner meine Gedanken eines prüfenden Blickes, und mich ihrer Belehrung würdigen, so habe ich meine Absicht erreicht. Was ich sonst hier noch sagen könnte, schien mir einen schicklichern Platz in einer Nachschrift zu bekommen, und so theile ich nur, um die Uebersicht zu erleichtern, noch den Inhalt ausführlich mit.

Inhalt.

Inhalt.

Einleitung.

Erster Abschnitt.

Ueber den gegenwärtigen Zustand der Mathematik.

Erste Abtheilung.

Von der Beschaffenheit der Erklärungen, Forderungen, Grundsätze und Sätze.

1. Von den Erklärungen.

Zweyte

Zweyte Abtheilung.

Von der Mathematik und ihren Haupttheilen, im Ganzen betrachtet.

β. Um-

Dritte Abtheilung.

Von der Mathematik in Ansehung ihres Einflusses auf die Erhöhung der Verstandeskräfte, und von dem Verhältnisse derselben zur Philosophie und den übrigen Wissenschaften.

2. Von

Zweyter Abschnitt.

Von der Art, die Vollkommenheit und Brauchbarkeit der Mathematik zu vergrößern.

Erste Abtheilung.

Von dem was zur Vergrößerung der Vollkommenheit der Mathematik nöthig ist.

Zweyte Abtheilung.

Von dem, was zur Vergrößerung der Brauchbarkeit der Mathematik erforlich ist.

Gedanken

Gedanken
über den
gegenwärtigen Zustand
der
Mathematik
und
die Art
die Vollkommenheit und Brauchbarkeit
derselben zu vergrößern.

Einleitung.

Auch der Reiche thut wohl, wenn er von Zeit zu Zeit den Zustand seines Vermögens untersucht; selbst dem Könige, dessen Schatz nie versiegende Quellen hat, ist eine genaue Kenntniß dieses Schatzes nicht überflüssig: wie könnte sonst die weiseste Anwendung desselben erhalten, und jenen Quellen ihre Ergiebigkeit gesichert werden? Darf man überhaupt Gelehrsamkeit mit Reichthum vergleichen, so verdient die Mathematik, sowohl wegen der Menge, als wegen der Wichtigkeit und innern Vollkommenheit ihrer Lehren, den Namen eines königlichen

 lichen

lichen Schatzes: sollte sie etwa, weil schon die Alten die Benennung Wissenschaft ihr ausschließungsweise beygelegt haben, nicht von Zeit zu Zeit einer prüfenden Untersuchung bedürfen? Nur erst vor wenig Tagen fand ich in Herrn Eberhard's philosophischen Magazine *) folgende Aeußerungen: „Es ist eine Sonderbarkeit, die mir merkwürdig scheint, daß man einen Euler, Kästner, Klügel, Lichtenberg, wohl gründliche, tiefsinnige, aber schwerlich aufgeklärte Mathematiker nennt. Man sagt, daß sie weit umfassende Kenntnisse und Einsichten in ihrer Wissenschaft besitzen; es ist aber nicht gewöhnlich, von einer aufgeklärten Geometrie und Analysis zu reden." — „Die mathematischen Wissenschaften bedürfen zu ihrer Vervollkommnung nichts anders als die Vermehrung deutlicher und tiefsinniger Kenntnisse; Irrthümer und Vorurtheile können sich in ihrem Gebiete nicht festsetzen; das ist kein Feind, den sie zu besiegen haben, wenn sie ihre Grenzen erweitern, und ihr Licht über einen weitern Horizont verbreiten wollen; was sie wissen, das wissen sie entweder recht oder gar nicht." — „Zu den Ursachen, warum die Mathematik nie, wie alle andere Wissenschaften, von ihrem Entstehen an, durch Irrthümer ist entstellt worden, von denen sie durch den Scharfsinn ihrer Verbesserer hätte müssen gereinigt werden,

*) Im ersten Stücke, in der Abhandlung über wahre und falsche Aufklärung. S. 33, f.

den, kann man, glaube ich, mit Recht auch die rechnen, daß sie auf allen Stufen ihrer Vollkommenheit nothwendig immer zu den gelehrten Kenntnissen gehören mußte; daß sie also immer das ausschließende Eigenthum derjenigen bleiben konnte, die ihre Neigung, ihre Talente, und ihr geübter Verstand zu ihrer Bearbeitung geschickt machte. Das kam daher, daß ihr Bedürfniß nie allgemein war, wie das Bedürfniß der Religion, der Sittenlehre, der Naturlehre; die Unfähigkeit des rohern und unwissendern Theils der Menschen konnte daher nie, wie auf den übrigen Feldern der menschlichen Erkenntniß das Unkraut der Irrthümer und Vorurtheile ausstreuen. Davon war eine natürliche Folge, daß die Anbauer ihres Feldes nur seine Grenzen durch neue Anflanzungen zu erweitern hatten." — „Der letzte Charakterzug, den uns die Vergleichung der mathematischen Wissenschaften mit den übrigen Kenntnissen des Menschen sichtbar macht, liegt in der Beglaubigung ihrer Wahrheiten. In der Mathematik ist diese Beglaubigung keine andere als die vollständigste, strengste Demonstration, die von der Wissenschaft, der man sie nur noch immer unvollkommen hat nachahmen können, den Namen der mathematischen erhalten hat. Die Lehren der reinen Mathematik haben entweder mathematische Gewißheit, oder sie haben gar keine; wir sind entweder durch Demonstration überzeugt oder gar nicht. Autorität des Lehrers, überredende Gründe, die die Einbildungskraft, die Neigungen und die Leidenschaften für eine Lehre gewinnen, können hier nicht angebracht werden.“ Wenn man zu diesen Lobsprüchen die Behauptungen Herrn Kant's *) setzt: daß die Mathematik das glänzendste Beyspiel einer sich, ohne Beyhülfe der Erfahrung, von selbst glücklich erweiternden reinen Vernunft gebe; und daß sie, indem sie alle ihre Begriffe auf Anschauungen a priori bringe, so zu reden, Meister über die Natur werde: so scheint es freylich, als ob die Regel, Zweifeln ist der Anfang zur Weisheit, bey der Mathematik eine Ausnahme leide; und daß man bey der Erlernung dieser Wissenschaft, obgleich nichts aufs Wort des Lehrers glauben, doch zum voraus hoffen dürfe, unter ihren Sätzen nie irrige Behauptungen, und unter ihren Beweisen nie Scheingründe zu finden. Auch darf diese Vollkommenheit der Mathematik nicht fehlen, wenn sie, nach Plato's Ausspruche, die Kraft haben soll: das Organ der Seele, welches durch die übrigen Beschäftigungen des Lebens ausgelöscht und geblendet ist, wieder zu reinigen und zu beleben. Allein hier kommt es nicht auf das an, was möglich ist und seyn sollte; den wirklichen Zustand der Mathematik müssen unsere Aussprüche treffen, oder wir weiden unsern Blick an eben so vergänglichen als reizenden Gestalten der Einbildungskraft. Daß diese Wissenschaft sich

*) In der 2ten Auflage der Critik der reinen Vernunft, S. 8, 740; 752.

sich über alle andere auf eine unerreichbare Art emporgeschwungen habe, ist etwas allgemein zugestandenes; daß sie gleichwohl eines noch höhern Grades der Vollkommenheit und Brauchbarkeit fähig sey, und zugleich von manchen Fehlern gereiniget werden müsse, wird vielleicht nicht eben so von jedermann eingeräumt; allein es läßt sich zeigen. Entschuldigen thue ich den Tadel nicht, den das Folgende enthält. Die Mathematik kennt keinen königlichen Weg, also auch kein Ansehen der Person: und meine am Ende angezeigte Absicht mag mich rechtfertigen, wenn solches nöthig ist. Aber der Titel dieser Abhandlung verspricht weiter nichts als einen Versuch; hierauf bitte ich gütige Rücksicht zu nehmen.

Erster Abschnitt.

Ueber den gegenwärtigen Zustand der Mathematik.

Erste Abtheilung.

Von der Beschaffenheit der Erklärungen, Forderungen, Grundsätze und Sätze.

1. Von den Erklärungen.

Nach dem, was so viele und so große Männer in der Mathematik geleistet haben, kann nicht viel mehr übrig seyn, um dieser Wissenschaft den möglich höchsten Grad der Vollkommenheit zu geben, und ihr alle in der Einleitung angeführte Lobsprüche mit vollem Rechte zuzueignen. Allein einiges ist allerdings noch zurück, und dieses darzuthun die Absicht des gegenwärtigen Abschnitts.

Die

Die Mathematik kann ihrem Wesen nach durchaus von Erklärungen anfangen, die entweder Definitionen im vollkommensten Verstande *) sind, oder doch auf Construktionen führen, bey deren Gebrauche selbst unvollständige Beschreibungen nicht irre leiten können. Wo dergleichen zum Grunde liegen, entsteht kein Mangel an Uebereinstimmung, noch weniger ein nicht zu hebender Widerspruch; bey reiflichem Nachdenken wird alles leicht und helle. Verhält es sich allenthalben auf diese Art in der Mathematik, so wie sie jetzt ist?

Die königliche Akademie der Wissenschaften gab selbst, noch im Jahr 1784, die Frage auf: „Der Nutzen, welchen die Mathematik leistet, die Ursach, warum man sie hochschätzt, und die ehrenvolle Benennung der völlig genauen Wissenschaft, welche ihr mit so vielem Rechte gegeben wird, beruhen auf der Klarheit ihrer Grundsätze, auf der Schärfe ihrer Beweise, und auf der Genauigkeit ihrer Lehrsätze. Um diese herrlichen Vorzüge einem so vortreflichen Theile unserer Erkenntnisse auf immer zu sichern, fordert die Akademie: Eine deutliche und genaue Theorie über das in der Mathematik sogenannte Unendliche. Es ist bekannt, daß die höhere Meßkunst sich beständig der unendlich großen und unendlich kleinen Größen bedient,

*) Man sehe Herrn Kant's Critik der reinen Vernunft, 2te Aufl. S. 755.

Indeß haben die ältern Meßkünstler, ja die Analysten selbst sorgfältig alles das vermieden, was sich dem Unendlichen nähert; und die größten neuern Analysten versichern, daß der Ausdruck, unendliche Größe, einen Widerspruch enthalte. Die Akademie wünschet daher, daß man erkläre, wie es möglich gewesen, so viele wahre Lehrsätze aus einer widersprechenden Behauptung zu ziehen, und daß man einen sichern, deutlichen, und mit einem Worte wahrhaftig mathematischen Grundsatz angebe, der an die Stelle des Unendlichen gesetzt werden könne, und dennoch die Untersuchungen, so durch dieses Mittel geschehen, weder erschwere noch verlängere. Die Akademie verlangt, daß dieser Gegenstand mit der nur immer möglichen Allgemeinheit, Genauigkeit, Klarheit und Einförmigkeit abgehandelt werde.„ Der unsterbliche Euler sagt in seinen Institutionibus Calculi differentialis *): Haec autem Infiniti doctrina magis illustrabitur, si, quid sit infinite parvum Mathematicorum, exposuerimus. Nullum autem est dubium, quin omnis quantitas eousque diminui queat, quoad penitus evanescat, atque in nihilum abeat. Sed quantitas infinite parva nihil aliud est nisi quantitas evanescens, ideoque revera erit = 0. Consentit quoque ea infinite parvorum definitio, qua dicuntur omni quantitate assignabili minora: Si enim quantitas tam fuerit parva, ut omni

*) Im dritten Capitel des ersten Theils §. 83.

omni quantitate assignabili sit minor, ea certe non poterit non esse nulla; namque nisi esset $= 0$, quantitas assignari posset ipsi aequalis, quod est contra hypothesin. Quaerenti ergo, quid sit quantitas infinite parva in Mathesi, respondemus, eam esse revera $= 0$; neque ergo in hac idea tanta Mysteria latent, quanta vulgo putantur, et quae pluribus calculum infinite parvorum admodum suspectum reddiderunt. Dagegen finde ich in den Leçons elémentaires de Calcul infinitésimal des Hrn. *Raymond-Roux* gleich im Anfange: La différentielle ou la fluxion d'une quantité x sera une partie de x assez petite pour devoir s'évanouir en comparaison de la quantité dont elle fait partie; c'est-a-dire, que la fluxion de x n'est autre chose que x divisée par l'unité, suivie d'un assez grand nombre de zeros, pour que le quotient soit negligeable en comparaison du dividende, ou fluxion de $x = \frac{x}{1000\ldots\ldots0}$, fluxion de $y = \frac{1}{1000\ldots\ldots0}\, y$; &c. Um nicht die Auszüge ohne Noth zu häufen, will ich aus Hrn. Karstens Abhandlung vom Mathematisch-Unendlichen *) eine Stelle hersetzen, in welcher er einen Einwurf vorträgt, der wider seine vorhergehenden Erklärungen gemacht werden konnte.

*) In seinen 1786 zu Halle erschienenen mathematischen Abhandlungen S. 23.

„Das alles, wird man vielleicht erwiedern, könnte man gelten lassen, wenn die Mathematiker ihr Spiel mit dem Unendlichen nicht weiter trieben. Man findet aber in ihren Schriften nicht allein unendlich große, sondern auch unendlich kleine Größen, und wenn man ihren Versicherungen trauen darf, so kann ein unendlich großes doch unendlichemal kleiner seyn als ein anderes unendlich großes, und ein unendlich kleines unendlichemal größer als ein anderes unendlich kleines. Ueberhaupt haben die Mathematiker so viele unendlich große und unendlich kleine als endliche Größen, sie haben sogar unendlich viele Ordnungen unendlich großer und unendlich kleiner Dinge: ja wenn ein unendlich großes schon wer weiß wie viele mal auf einander gehäuft ist, so soll es doch wieder so viel als Nichts gegen ein anderes Unendliches seyn. Das heißt doch recht dem menschlichen Verstande Gewalt anthun. Entweder sie reden mit Fleiß eine geheimnißvolle Sprache, wie die Alchymisten, damit ein Ungeweihter sie nicht verstehe, oder sie lehren das ungereimteste Zeug, was wider allen gesunden Menschenverstand ist.„ Wo ist hier die Uebereinstimmung, die Helligkeit und Leichtigkeit, welcher die Mathematik ihrer Natur nach doch allerdings fähig seyn muß? Und dabey kommt es hier auf Grundbegriffe des wichtigsten und erhabensten Theils der Mathematik an! Allein vielleicht verweiset man mich hier auf das, was von Hrn. Karsten in der so eben angeführten Abhandlung geleistet worden, und noch mehr auf die gekrönte Schrift des Hrn. *L'Huilier*: Exposition élémentaire des principes des Calculs Superieurs. Es sey fern von mir, die Verdienste großer Männer zu verkennen, und noch ferner, sie zu verkleinern; auch wage ich kein Urtheil über eine Schrift, von der mir nicht bekannt ist, ob ihr die Königl. Akademie der Wissenschaften als einer guten, und die aufgegebene Frage erschöpfenden, oder nur als der besten unter den eingesandten den Preis zuerkannt hat. Ganz aufs reine gebracht scheint mir dieser Gegenstand noch nicht zu seyn, die nur immer mögliche Allgemeinheit, Genauigkeit, Klarheit und Einförmigkeit, welche die Königl. Akademie gefordert hat, und mit vollem Rechte fordern konnte, finde ich nicht; ja ich kann selbst das Urtheil noch nicht zurücknehmen, welches ich schon im Jahr 1784 in einer meiner Schriften geäußert habe: daß das Verlangte schwerlich bey dem Unendlichen würde zu Stande gebracht werden können, so lange solches noch nicht allenthalben bey dem Endlichen geschehen sey. Doch hiervon vielleicht nachher noch einiges.

Auch folgenden Einwurf muß ich erwarten: Eine Theorie, welche zu erfinden ein Newton und Leibnitz erfordert wurden, kann den Grad der Leichtigkeit nicht haben, dessen die Mathematik in den übrigen Theilen allerdings fähig ist? Wenn nicht von Mathematik die Rede wäre, so ließe sich diesem Einwurfe vielleicht nichts

wich-

wichtiges entgegen setzen: da indeß seine Widerlegung in der Folge einen schicklichern Platz bekommen kann, so will ich lieber zu den Erklärungen der gemeinen Mathematik fortgehen, denn auch da scheint noch einiges übrig zu seyn. So lange nemlich in der Arithmetik bloß die absoluten Zahlen betrachtet, und in der Geometrie alles bloß geometrisch untersucht wird, stößt man auf keine Schwierigkeit: allein sobald in jener von positiven und negativen und von concreten Größen die Rede ist, reichen die gewöhnlichen Erklärungen jenseits der Subtraction nicht mehr aus; und wenn die Arithmetik auf die Geometrie angewandt werden soll, bleibt es noch weniger helle. Ich will von einer Menge hieher gehöriger Beyspiele nur einige anführen. Wenn ein mathematischer Gegenstand durch eine Definition gegeben ist, so ist in der Geometrie durchaus nichts mehr willkührlich, und in der Arithmetik sind solches bloß die Bezeichnungen der Bestandtheile der Größen und der einfachen arithmetischen Operationen. Was hat man also für ein Recht zu fordern, daß bey der Multiplication, wenn man dieselbe als Erfindung einer vierten Proportional-Größe vorstellt, die Einheit allemal positiv angenommen werden solle? Und zugegeben, daß die Einheit allemal positiv angenommen werden müsse, und dabey die gewöhnlichen Begriffe von positiven und negativen Linien beybehalten; wie soll man die Secanten der Bogen eines Kreises betrachten, als positiv oder als negativ, da doch jede Se-

cante

cante mit einem Halbmesser oder einer Einheit auf einer Seite, und demjenigen Halbmesser, den man durch jenes Verlängerung erhält, auf der entgegengesetzten Seite liegt? Wie kann die Secante eines spitzigen Winkels positiv, und die Secante der Summe von ihm und zwey rechten Winkeln negativ seyn, da beyde Secanten genau zwischen einerley und denselben Punkten liegen? Wer ferner zur Arithmetik die Ueberzeugung mitbringt, daß sie eine allgemeinere Wissenschaft sey als die Geometrie, und durch das Studium der reinen Geometrie nach Euclideischer Methode gewöhnt worden ist, das Besondere aus dem Allgemeinen durch bloße Zusetzung dessen, was die specifische Differenz oder die hinzugekommene Bedingung nothwendig macht, abzuleiten; muß der sich nicht wundern, wenn ihn dieser Weg schon bey der Multiplication verläßt? Er soll z. B. zwey gerade Linien mit einander multipliciren. Die erste Frage, die sich ihm aufdringt, ist: Was heißt das? Aber anstatt durch entwickelndes Nachdenken sich helfen zu können, wie es ihm sonst möglich war, wenn er allgemeine Erklärungen für besondere Gegenstände abzuändern hatte, sieht er sich genöthiget, die Antwort bey andern zu suchen. Er wendet sich also zu Herrn Karstens Schriften, und findet in der Abhandlung desselben über die verneinten und unmöglichen Wurzelgrößen *) folgende Stelle: „Die Aus-

*) In den schon vorhin angeführten mathematischen Abhandlungen S. 229 f.

Ausdehnung der arithmetischen Begriffe, welche die Wörter Multipliciren, Dividiren nach ihrer ursprünglichen Bedeutung ausdrücken, auf geometrische Construktionen, und der darauf gegründete Gebrauch algebraischer Rechnungen in der Geometrie, rührt, wie es sehr bekannt ist, vornemlich vom Hrn. Descartes her, oder wenigstens hat seine im Jahr 1637 zuerst in französischer Sprache herausgegebene Geometrie es vornemlich veranlaßt, daß man sich nach der Zeit kein Bedenken weiter darüber machte, die Theorie von den krummen Linien mit Hülfe algebraischer Rechnungen zu erleichtern. Wenn es also darauf ankommt, den algebraischen Sprachgebrauch festzusetzen, so ist Hrn. Descartes Geometrie ein classisches Werk." — „Diesemnach ist es dem Cartesianischen Sprachgebrauch ganz genau gemäß, daß algebraische Produkte gerader Linien in einander, also auch Potenzen, wovon die Wurzel eine gerade Linie ist, nichts anders als gerade Linien vorstellen. Vieta beobachtet diesen Sprachgebrauch noch nicht, bey ihm sind $a.b$, so wie a^2, Flächen, $a.b.c$, a^3, sind körperliche Räume. Das Produkt und jeder Faktor sind bey ihm heterogen und darum auch Dividendus und Divisor. Allein Cartesens Geometrie ist der eigentliche Grund, auf welchem das ganze Gebäude der neuen Geometrie ist aufgeführet worden: also leidet es keinen Zweifel,

daß

daß der von ihm festgesetzte Sprachgebrauch beybehalten werden müsse, wenn man nicht alles wieder in Verwirrung bringen will.“

Folglich wäre hier nur vom Sprachgebrauch die Rede? Also soll doch der Mathematiker seine Vernunft unter das Joch der Autorität beugen? Wer hat nun Recht, Herr Karsten, dessen Verdienste um die Mathematik jeden Liebhaber dieser Wissenschaft seinen zu zeitigen Tod bedauren ließen? oder Herr Eberhard, wenn er nach den in der Einleitung angeführten Worten behauptet: Von den Lehren der Mathematik ist man entweder durch Demonstration überzeugt, oder gar nicht. Autorität des Lehrers, überredende Gründe, u. d. gl. können hier nicht angebracht werden? Doch Herr Karsten fügt kurz nachher S. 243 hinzu: „Nachdem wir im Jahr 1734 die vortreflichen Elementa Matheseos des Herrn Hausen erhalten haben, worin die Elementarbegriffe von positiven und negativen Größen gleich Anfangs im vollkommensten Lichte dargestellt werden, hat sich der ehemalige der Sache allerdings nicht recht angemessene Sprachgebrauch nach und nach aus den später erschienenen Lehrbüchern immer mehr und mehr verloren. Hierzu haben überdem auch die Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie des Herrn von Segner sehr vieles beygetragen. Diese beyden Schriften haben die Elemente der Analysis mit den Grundsätzen der Cartesianischen algebraisch-

ana-

analytischen Geometrie in die genaueste Verbindung gebracht.“ Eine solche Versicherung von einem solchen Manne kann wenigstens verleiten, ihm so lange zu folgen, bis man an seiner eigenen Vernunft eine sicherere Führerin findet, und also das Wort Multiplication in der Geometrie in dem bekannten uneigentlichen Sinne zu gebrauchen. Aber wenn man nun die Produkte aus geraden Linien nie anders als gerade Linien betrachten will, auf was für einem ermüdenden Wege muß man sich dann zur völlig deutlichen Einsicht in die Natur der durch algebraische Gleichungen ausgedruckten Curven hinwinden? Wenn sonst spätere Lehren bey frühern Gegenständen benutzt werden, so ist eine größere Kürze der Bewegungsgrund, wie z. B. wenn bey dem Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes die Lehre von der Ähnlichkeit der Dreyecke zu Hülfe genommen wird; allein hier ereignet sich das gerade Gegentheil! Und wenn man dieses nicht achten will, aus was für einem Grunde kann Herr Euler, wenn die Produkte aus geraden Linien nur gerade Linien seyn können, im Anfange des 18ten Capitels des zweyten Buchs seiner Einleitung in die Analysis des Unendlichen behaupten: In omni aequatione pro Linea curva, praeter Coordinatas orthogonales x et y, inesse debent quantitates constantes, vel una vel plures, uti a, b, c, etc., quibus Lineae constantes designantur, et quae cum variabilibus x et y ubique eundem Linearum dimensionum numerum constituunt: Si

enim

enim in uno termino extet productum ex n Lineis in se multiplicatis, necesse est, ut in singulis reliquis terminis totidem Lineae in se invicem multiplicentur, quoniam alias quantitates *heterogeneae* inter se comparari deberent, quod fieri non potest. Doch ich will so weit nicht gehen, und noch weniger hier von den transcendenten Größen dasjenige hersetzen, was ich nachher besser zu einer andern Absicht brauchen kann; aber dagegen sey es mir erlaubt, noch ein Paar leichtere Fälle hinzuzufügen.

Wenn man zwey Größen x und y finden soll, deren Summe, s, und Produkt, p, gegeben sind, so erhält man durch die Algebra:

$$x = \tfrac{1}{2}s \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}s^2 - p)} \text{ und } y = \tfrac{1}{2}s \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}s^2 - p)}$$

und man kann also beyde Größen auf einmal bekommen. Ist hingegen die Differenz, d, und das Produkt gegeben, so wird

$$x = \tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + p)} \text{ und } y = -\tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + p)}.$$

Man nehme zum voraus $x = 10$ und $y = 6$ an, so wird $d = 4$ und $p = 60$; und diese Werthe geben, in die erste Formel gesetzt, 10 und -6, in der zweyten aber gebraucht, -10 und 6. Hier ist doch schon die Abweichung, daß man nach der ersten Formel das Zeichen $-$, welches man gar nicht suchte, mit erhält, und nach der zweyten solches selbst bey der Zahl findet, welcher es nicht zukommt. Nun nehme man das Wort Summe algebraisch, so daß es die arithmetische Differenz zugleich mit in sich begreift. Alsdann hat man allgemein

$$sx - x^2 = p$$

und daraus für die geometrische Construktion dieser Aufgabe nach den gewöhnlichen Grundsätzen in Ansehung der anzunehmenden Einheit:

$$+1 : +x = +(s - x) : +p$$
$$+1 : -x = -(s - x) : +p$$
$$+1 : +x = -(s - x) : -p$$
$$+1 : -x = +(s - x) : -p$$

vorausgesetzt, daß alle mögliche Fälle untersucht werden sollen. Allein da die Einheit hier eine gerade Linie seyn muß, und es bey geraden Linien gleich seyn soll, nach welcher Seite hin der positiven Richtung angenommen werde: so wird hierdurch die doppelte Annahme der Einheit, als positiv und als negativ, im Grunde völlig wieder frey, und man hat also acht Fälle anstatt der vier vorhergehenden. Auch lassen sich wirklich so viel von einander in der Lage verschiedene Paare mittlerer Proportionallinien, deren Summe oder Differenz gegeben ist, zwischen zwey andern geraden Linien geometrisch darstellen; und es führen daher auch hier die gewöhnlichen Vorstellungen von den entgegen gesetzten Größen und von der Multiplication, wenn gleich nicht auf unwiderlegliche, doch auch nicht auf ganz unbeträchtliche Schwierigkeiten.

Wenn man bey der Erfindung algebraisch-geometrischer Formeln von einzelnen geometrischen Construktionen ausgeht, so ist bekannt, daß sich jene Formeln bald weiter, bald nicht so weit erstrecken, als die zum Grunde gelegte geometrische Construktion, und öfters auch mit dieser völlig gleichen Umfang haben. Das erste findet z. B. statt, wenn man aus den drey Seiten eines Drey-ecks die Stücke bestimmen will, in welche eine Seite von der aus der Spitze des gegenüber stehenden Winkels auf sie senkrecht herabgefällten geraden Linie getheilt wird; das andere kann sich bey der logarithmischen Linie ereignen; und das dritte nimmt man allemal wahr, so oft es, weder bey der zum Grunde gelegten, noch bey den aus der gefundenen algebraischen Formel abzuleitenden geometrischen Construktionen, auf Lagen ankommt, die durch die Zeichen + und — ausgedruckt werden müßten; oder, wenn dies ist, keine positive oder negative Größen, sondern lauter absolute, in jener Formel als Faktoren vorkommen. Diese Bedingung kann, gehörig betrachtet, allein schon auf die Quelle der Regeln führen, nach welchen man jedesmal zum voraus und mit voller Gewißheit zu beurtheilen im Stande ist, welcher von den gedachten drey Fällen statt finden werde. Allein so lange diese Regeln nicht vollständig und allgemein bekannt sind und gebraucht werden; so lange man sich begnügt, a posteriori, entweder einzuschränken oder zu erweitern, was man gefunden hat: so lange fehlt es da, wo man dieses thut, einem reizenden Theile der Mathematik an dem wichtigsten und der Mathematik eigenthümlichen Vorzuge. Wie es in diesem Stück stehe, kann man aus Herrn Kästners Beantwortung der Frage: Unde plures insint radices aequationibus sectiones angulorum definientibus? *) lernen. Und wo findet man die positiven und negativen Größen als die beyden Untergattungen der Art der Größen vorgestellt, welche den absoluten Größen entgegenstehe, und daher denn auch den wirklich statt findenden Unterschied zwischen absoluten und positiven Zahlen beobachtet? Gleichwohl ist diese, ich weiß nicht, aus was für einem Grunde, gering geschätzte und vernachläßigte, Genauigkeit die Quelle, aus welcher sich in der Lehre von den Logarithmen die neuen Sätze ungesucht und von selbst darbieten, mit welchen ich vor kurzem diese Theorie, theils in meinen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra, theils in den Zusätzen zu meiner Uebersetzung der Einleitung in die Analysis des Unendlichen von Herrn Euler, erweitert habe, und welche mir noch immer unentbehrlich scheinen, um in der Lehre von den Logarithmen der nicht absoluten Zahlen, nach so viel vergeblichen Versuchen, endlich zur Gewißheit zu gelangen.

*) Göttingen, 1756.

2. Von

2. Von den Forderungen und Grundsätzen.

Hr. Kästner erklärt sich über die Forderungen und Grundsätze in seinen Anfangsgründen der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie auf folgende Art: „Aus den Erklärungen fließen Grundsätze, deren Wahrheit man einsieht, sobald man sie versteht. Sie werden von allen Menschen gebraucht, und oft ohne daß diese daran denken, aber nur auf einzelne Gegenstände angewandt; daher man sie gemeine Begriffe nennt. Sie sind von zweyerley Art. Wenn sie bloß Wahrheiten behaupten, so kann man ihnen diesen Namen im engern Verstande lassen. Wenn sie fordern, daß man eine Sache verrichten könne, ohne die Art, wie es geschehen soll, zu zeigen, weil solche vielleicht zu offenbar in die Augen fällt, als daß sie dürfte gezeigt werden; so nennt man sie Heischesätze, Forderungen. Sie nehmen also eine Sache als möglich an, ohne die Möglichkeit umständlich darzuthun.“ Desgleichen: „Es giebt Grundsätze, die man der Rechenkunst insgemein vorzusetzen pflegt. Die natürliche Arithmetik lehrt sie jeden Menschen in besondern Fällen brauchen, wo er sie nöthig hat, ihr allgemeiner Ausdruck aber giebt ihnen für den Schüler der Rechenkunst ein geheimnißvolles Ansehen. — Damit aber doch der Rechenkunst und den Gründen der ganzen übrigen Mathematik nicht etwas so wichtiges zu fehlen scheine, so sind sie hier.“ In Hrn. Lamberts neuem Organon findet man die Grundsätze durch Urtheile, wo zu dem Bewußtseyn, daß das Prädicat dem Subjecte zukomme oder nicht zukomme, weiter nichts als die bloße Vorstellung dieses Subjects und Prädicats erfordert wird; und die Forderungen durch Fragen, auf ihre einfachste Form gebracht, und von der Beschaffenheit, daß sowohl die Auflösung als der Beweis einleuchtend ist, erklärt. Hr. Kant gedenkt in seiner Critik der reinen Vernunft bloß der Axiomen, wenn er S. 754 behauptet: daß die Gründlichkeit der Mathematik auf Definitionen, Axiomen und Demonstrationen beruhe, und erklärt S. 760 die Axiome durch synthetische Grundsätze a priori; ein Grundsatz aber ist ihm ein solcher, der so wie er den Grund von andern Sätzen enthält, so auch in keinem andern gegründet ist. Wider die Richtigkeit von diesem allen ist nichts einzuwenden; aber es frägt sich: ob dadurch die ganze Beschaffenheit der Forderungen und Grundsätze dargelegt sey? Diese Frage ist um so wichtiger, da unbefriedigende Vorstellungen darüber die Erlernung der Mathematik erschweren, und es sehr natürlich ist zu vermuthen, daß eine Wissenschaft, die durchaus nach deutlichen Gründen verfährt, und alles Folgende auf das Vorhergehende baut, auch insbesondere bey dem Ersten wichtige Absichten haben müsse. Soll zu Grundsätzen weiter nichts gehören, als daß man ihre Wahrheit versteht, so ist es leicht, die Euclideischen mit einer nicht unbeträchtlichen Anzahl anderer zu vermehren, die auf keine Weise verdienen, unter sie aufgenommen

men zu werden; und da man sich auf diese Art von den Neuern hier verlassen sieht, vermuthlich, weil auch dieser Gegenstand ihnen zu geringfügig schien, kann es verarget werden, wenn man sich zu den Alten, namentlich zum Euclides wendet, der überdem allgemein anerkanntes, aber desto weniger nachgeahmtes, Muster der wahren mathematischen Methode ist? Genau weiß ich es nicht mehr, wie ich zuerst auf die Muthmaßung gekommen bin, denn sie ist bereits so alt, daß sie schon seit geraumer Zeit zur vollen Gewißheit aufgestiegen ist; aber Muthmaßung war es anfänglich bey mir, daß vielleicht im Euclides die Forderungen zur Erfindung der Figuren und der Hülfslinien, und die Grundsätze zur Erfindung der Beweise und Auflösungen dienen sollten. Euclid's Elemente in der Hand prüfte ich, und glaubte Gründe zu entdecken; um gewisser zu werden, richtete ich meinen Unterricht in den ersten Anfangsgründen der Geometrie nach der angeführten Vorstellung ein, und der Erfolg meiner Versuche, selbst bey bloßen Anfängern, entsprach immer mehr meinem Wunsche. Ohne Plato's Kunst in der Socratik zu besitzen, bin ich dahin gekommen, durch den Gebrauch der Euclideischen Forderungen und Grundsätze nach obigem Gesichtspunkte, jedem Anfänger die Euclideischen Elemente eben so abzufragen, als Plato in seinem Menon den Socrates einem Sclaven den Satz abfragen läßt, daß die Seite des doppelt so großen Quadrats die Diagonale des einfachen sey. Vorzüglich bemerkenswerth scheint mir hierbey das, daß sich auf diesem Wege die Euclideischen Sätze genau in eben der Ordnung, und dabey eben dieselben Hülfslinien, Beweise und Auflösungen darbieten, die in Euclid's Elementen selbst angetroffen werden; und daß der Schüler desto lernbegieriger wird, je weiter er kommt, und alles auf einmal mit voller Deutlichkeit und Gewißheit einsehen lernt. Aber ich habe nicht nöthig hierbey stehen zu bleiben. Ohne mich darüber in einen Streit einzulassen, ob die Mathematik reine Vernunftwissenschaft aus der Construktion der Begriffe sey, wie Hr. Kant es behauptet; Vernunftwissenschaft aus der Construktion der Begriffe ist sie gewiß. Also muß es Regeln geben, nach welchen man die mathematischen Begriffe construiren kann, und wornach man, wenn dieses geschehen, die Constructionen so abzuändern im Stande ist, daß man daran die Eigenschaften der durch sie vorgestellten Gegenstände wahrnehmen kann; es müssen Vorschriften da seyn, nach welchen sich die Seele bey dieser Wahrnehmung zu richten hat. Und da die Wahrheiten der Mathematik allgemeine Sätze und nothwendige Urtheile sind und seyn sollen, und folglich nicht von der Erfahrung erhalten werden können: so müssen jene Regeln auch nicht von der Erfahrung entlehnt zu werden brauchen, sondern in der Seele selbst geschrieben stehen. Aus diesem Gesichtspunkte aber die Forderungen und Grundsätze der Geometrie betrachtet, und wenn wir an ihnen nicht

jene

jene Regeln haben, woher sollen wir dergleichen nehmen? in was für einem wichtigen Lichte erscheinen sie dann? Hr. Kant wirft in seiner Critik der reinen Vernunft die Frage auf: Wie ist reine Mathematik möglich? Wird diese Frage auf die reine Geometrie eingeschränkt, und die Forderungen und Grundsätze des Euclides, in dem erklärten Sinne, als bekannt vorausgesetzt, so ist die Antwort darauf folgende. Man fange vom Einfachen an, und gehe stufenweise zu dem Zusammengesetzten fort; man denke sich jeden Begriff vor allen Dingen nach seinem ganzen Umfange deutlich, construire darauf denselben, und verändere die gemachte Construktion stufenweise nach eben diesen Forderungen. Ist dieses geschehen, so betrachte man die Construktion, nach jeder Veränderung, nach Anleitung der Grundsätze, und fahre auf diesem Wege so lange fort, bis man zu Behauptungen kommt, die man sich an der unveränderten Construktion deutlich denken kann. Sobald dieses ist, hat man einen Lehrsatz, oder eine Aufgabe gefunden, und der Beweis von jenem, und die Auflösung von dieser erfordert bloß die Ueberdenkung dessen, was man gedacht und gethan hat. Setzt man dieses Verfahren bey jedem Gegenstande so lange fort, bis man, nach den Forderungen, die Construktion nicht mehr verändern, und, nach den Grundsätzen, bey den veränderten Constructionen nichts mehr wahrnehmen kann; so findet man, insbesondere wenn man bey erweiterten Einsichten die Gegenstände, worauf diese angewandt werden können, von neuem betrachtet, und zugleich alle gefundenen Aufgaben bey den fernern Untersuchungen wie anfänglich die Forderungen, und die Lehrsätze wie die Grundsätze gebraucht, nach und nach die Elemente, dann die Anfangsgründe, und endlich den vollständigen Lehrbegriff der reinen Geometrie. Ich habe vorhin gesagt, was ich beym ersten Unterrichte in der Geometrie thue und auszurichten pflege. Hier ist der Plan, nach welchem ich mich richte, das einzige Gesetz, welches ich dabey befolge, in wenig Worten: Ich lehre meine Schüler nicht, ich leite sie nur, die angeführten Vorschriften auszuüben; möglich muß auf diese Art die reine Geometrie wohl seyn, denn sie wird dabey im Verstande wirklich. Wie ich aber, auch die Erklärungen finden, und die Grundsätze und Forderungen einen jeden in seiner Seele selbst wahrnehmen lasse? das gehört theils nicht hieher, theils werde ich den schon öfters eingeschlagenen Weg in der zweyten ganz umgearbeiteten Auflage meiner Versuche in Socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie, davon das erste Stück Ostern 1789 erscheinen wird, ausführlich darlegen.

Dieses vorausgesetzt, so ist, da ich hier den gegenwärtigen Zustand der Mathematik betrachte, und jetzt von den Forderungen und Grundsätzen rede, meine erste Anmerkuhg folgende: Man hat den Sinn, und folglich auch

auch die Wichtigkeit und ungemeine Brauchbarkeit der Forderungen und Grundsätze in der Mathematik verkannt, den Schimmer für das Gold genommen, und so wie es bey den Werken des Geschmacks mit Recht geschieht, so kann man auch in der Mathematik klagen, daß das Studium der Alten zum Schaden der Wissenschaft vernachläßiget werde. Die Folgen davon sollen den Gegenstand meiner übrigen hierher gehörigen Anmerkungen ausmachen.

So wie die Geometrie Vernunftwissenschaft aus natürlichen Construktionen der Begriffe ist, so ist die Arithmethik, dies Wort in seinem ausgedehntesten Umfange genommen, Vernunftwissenschaft aus willkührlichen Construktionen: und wenn gleich die Arithmetik einige Grundsätze mit der Geometrie gemein hat, so müssen ihr aus dem angeführten Grunde doch auch eigenthümliche Forderungen, und außerdem noch eigenthümliche Grundsätze zukommen. Was man von dieser Art in der Arithmetik hat, ist mir bekannt; allein die Frage ist hier: Ob sich die Arithmetik in diesem Stücke mit der Geometrie vergleichen, oder vielmehr mit ihr um den Vorzug streiten kann? Man hat über die Philosophen gelacht, die durch den Gebrauch der Worte: Erklärung, Grundsatz, Lehrsatz, die mathematische Methode nachzuahmen glaubten; allein wenn es die Arithmetik mit der Geometrie nicht in Ansehung der Forderungen und Grundsätze

sätze aufnehmen kann, so ist sehr zu befürchten, daß in der Arithmetik die mathematische Methode, wenigstens nicht in einer viel bessern Gestalt, anzutreffen seyn werde, als in jener Philosophie. Auf die Frage: Wie verhält es sich wirklich? muß ich mit einer andern Frage antworten. Ist das, was in unsern arithmetischen Lehrbüchern die Stelle der Forderungen und Grundsätze vertreten soll, so beschaffen, daß man, dasselbe vorausgesetzt, einmal die Buchstabenrechnung und gemeine Algebra, dann die Anwendungen der Arithmetik auf die Geometrie, ferner die Differential- und Integral-Rechnung, und vorher noch die unbestimmte Analytik, endlich die höhere Mathematik, in so fern sie noch nicht unter dem vorhergehenden begriffen ist, nach eben den kurz vorher angeführten Regeln, jedem, der die gemeine Geometrie gefaßt, und zwar auf die Art abfragen könnte, daß er alles mit eben der Leichtigkeit und Gewißheit begriffe, als solches bey der gemeinen Geometrie möglich ist? Den Vorwurf befürchte ich nicht, daß dieses zu viel gefordert sey; nach dem, was in der Mathematik bereits geleistet ist, darf man solche Forderungen thun; denn auch bey Wissenschaften läßt sich anwenden: Wem viel gegeben ist, von dem wird man viel fordern. Noch weniger kann ich glauben, daß jemand die Meinung hegen werde, als kennte ich nicht und übersähe daher die Nothwendigkeit vervollkommter Denkfähigkeiten, wenn die höhern Theile der Mathematik getrieben werden sollen.

Die

Die Arithmetik kann freylich nur für den, der durch das Studium der Geometrie nach der wahren mathematischen Methode; und die Differential- und Integral-Rechnung nur für den, der durch das Studium der ganzen gemeinen Algebra, auf eben die Art, seinen Denkkräften die erforderliche Ausdehnung und Stärke gegeben hat, den Grad der Leichtigkeit haben, der in dem vorhergehenden beschrieben worden ist: und so setzt überhaupt jeder höhere Theil der Mathematik das zweckmäßigste Studium aller niedrigern Theile voraus. Allein so wie beym Aufsteigen auf einer Leiter der Schritt von der vorletzten Stufe auf die oberste dem, der auf der vorletzten steht, nicht schwerer wird, als der von der untersten und ersten Stufe auf die zweyte: so können und müssen auch in der Mathematik alle zum Fortrücken nöthige Schritte den ersten gleichen; und wer den wahren Weg zur höhern Analysis gegangen ist, der kann und muß, bey der dann ihm möglichen Stärke seiner Denkkraft, den Weg durch diese Wissenschaft nicht schwerer finden, als ihm anfänglich der in der gemeinen Geometrie war. Doch ich kann nachlassen, und folgende Bedingung wird sicher nicht übertrieben scheinen, so wie sie es auch nicht ist: daß nemlich der Schüler der Differential-Rechnung, wenn auch nicht mit eben der Leichtigkeit, doch mit eben der Gewißheit und Deutlichkeit von den allerersten Lehren dieser Wissenschaft müsse überzeugt werden können, als solches bey den ersten Lehren der Geometrie möglich ist.

Hier ist es nun leicht, ihn dahin zu bringen, daß er aus Gründen erkennt und beurtheilt, welche unter mehrern verschiedenen Vorstellungen die richtigste und beste ist; dagegen in der Differential-Rechnung noch immer Uneinigkeit über den eigentlichen Begriff der Differentialien statt findet, der auch wahrscheinlich, um nicht mehr zu sagen, weder durch des Herrn *L'Huilier* Exposition &c. noch durch Herrn Schulzens in Königsberg neuern und noch fortzusetzenden Versuch einer genauen Theorie des Unendlichen aus dem Wege geräumt werden wird; denn dies ist nur durch Erfindung oder vielmehr Kenntlichmachung solcher Forderungen und Grundsätze möglich, als die Euclideischen für die ebene Geometrie sind. Diese Forderungen und Grundsätze sind bereits wirklich da, man handelt selbst häufig darnach; allein ihre Wichtigkeit und ihren ganzen Gebrauch kennt man nicht, und sucht daher in der Ferne, was nahe und gleichsam vor den Füßen liegt.

Anstatt die Forderungen und Grundsätze aller übrigen Theile der Mathematik aufzusuchen, sie als solche aufzustellen, und ihren wahren und so weit sich erstreckenden Gebrauch zu empfehlen, beschäftiget man sich mit andern Fragen, die allerdings wichtiger seyn sollen. Man untersucht z. B. wie der eilfte Grundsatz des Euclides unter die Grundsätze gekommen, und bemüht sich, die Wahrheit desselben evident zu machen; aber, ver-

muth-

muthlich, weil ein anderer Weg zu gemein wäre, ohne sich erst zu fragen, was eigentlich und vollständig bestimmt ein Grundsatz sey, und ohne eine andere als die etymologische Bedeutung dieses Worts zu kennen. Vor zehn Jahren gab es noch einen Mathematiker, der die mathematische Welt zu belehren vorhatte, daß alle Mathematiker, vom Euclides an, ihre Wissenschaft auf lauter Trugschlüsse gebauet hätten; und das lediglich durch eine genaue Betrachtung und Würdigung dieses Grundsatzes. Hätte er nicht, es ist ungewiß, ob aus Unwillen über seine Zeitgenossen, welche die Weisheitskörner, die er ausstreuete, nicht aufnahmen und pflegten, oder aus andern Ursachen? hätte er aber nicht mit eigener Hand sein Werk dem Feuer übergeben, so dürfte ich ihn hier nennen. Doch wie viel ist seit kurzen von neuem über den gedachten Grundsatz geschrieben worden! Wenn auf dem, was man hier nöthig findet, Euclid's Ehre und die Festigkeit der Geometrie beruht, warum untersucht man nicht z. B. auch, wie Euclides die 27ste Erklärung nicht nur vor dem 16ten Satze, sondern selbst vor allen Sätzen hat mittheilen können, da doch, diese Erklärung ganz zu verstehen, der 16te Satz eben so nöthig ist, als zum 11ten Grundsatze der 13te? Oder sind etwa die Erklärungen willkührlich, und nur die Grundsätze nothwendig? Doch genug hiervon! ich eile zur letzten Nummer dieser ersten Abtheilung fort.

3. Von den Sätzen.

Unter den Sätzen der reinen Mathematik sollen sich, wenn man den Versicherungen mehrerer Philosophen trauen darf, keine Vorurtheile und Irrthümer, und unter ihren Beweisen keine Scheingründe finden; sondern jene sollen lauter Wahrheit enthalten, und diese lauter Demonstrationen im strengsten Sinne seyn. Was man in der Mathematik weiß, das soll man entweder durch mathematische Demonstration und recht, oder gar nicht wissen. Dieses soll ferner daher kommen, weil die Mathematik auf allen Stufen ihrer Vollkommenheit nothwendig immer zu den gelehrten Kenntnissen habe gehören müssen; daß sie also das ausschließende Eigenthum derjenigen habe bleiben können, die ihre Neigung, ihre Talente und ihr geübter Verstand zu ihrer Bearbeitung geschickt machte. — Es wäre in der That das auffallendste und sonderbarste Phänomen, wenn der menschliche Verstand, bey seiner Eingeschränkheit, weswegen er sonst allenthalben, in den sinnlichen Kenntnissen und in den Wissenschaften, den Irrthümern unvermeidlich ausgesetzt ist, in der Mathematik allein unfehlbar seyn sollte; da wir doch in der Mathematik eben die Augen, und eben die Urtheils- und Schließungskraft gebrauchen müssen, bey welchen wir sonst so häufig uns täuschen. Oder stellen sich uns etwa die mathematischen Gegenstände, und zwar alle ohne Ausnahme, beym ersten Blicke, den wir auf sie werfen, in ihrem ganzen Umfange, und von allen

ihren

ihren Seiten, und in allen nur möglichen Verbindungen dar? Daß dieses keinem endlichen verständigen Wesen, und also auch dem Menschen nicht, möglich ist, und daß dagegen Einseitigkeit in den Begriffen und Urtheilen von der Eingeschränktheit jedes endlichen Verstandes lange unzertrennlich ist; darauf gründet Herr Sulzer in seiner Abhandlung über die Glückseligkeit endlicher verständiger Wesen *) den Beweis des Satzes: daß wir nicht anders, als durch verschiedene Zustände des Irrthums und des Leidens, zum Besitze vollkommener Wahrheit und Glückseligkeit gelangen können. Wollen wir uns nicht unleugbaren Widersprüchen gegen die Geschichte aussetzen, so werden wir gestehen müssen, daß die Mathematik, so wenig als jede andere Wissenschaft, von Irrthümern und Fehlern frey geblieben sey; und alles, was wir behaupten dürfen, ist: daß man in der Mathematik sich mehr vor Fehlern hüten, und die begangenen leichter entdecken und verbessern könne, als in irgend einer andern Wissenschaft. „Die Unfähigkeit des rohern und unwissendern Theils der Menschen hat in der Mathematik nie, wie auf den übrigen Feldern der menschlichen Erkenntniß, das Unkraut der Irrthümer und Vorurtheile ausstreuen können," wenn man Herrn Eberhard glaubt. Um die Probe zu machen, dürfte man also jede mathematische

Schrift,

*) In seinen vermischten philosophischen Schriften, in der Abhandlung: Ueber die Glückseligkeit endlicher verständiger Wesen.

Schrift, welche man wollte, nehmen? „Die Mathematik ist nie, wie alle andere Wissenschaften, von ihrem Entstehen an, durch Irrthümer entstellt worden, von denen sie durch den Scharfsinn ihrer Verbesserer hätte gereiniget werden müssen." Soll dieses Urtheil von der ganzen reinen Mathematik in ihrem jetzigen Umfange gelten, und wozu wäre es sonst gefällt worden? so ist dabey ohnstreitig mit zu vieler Güte von dem erkannten Theile aufs unbekannte Ganze geschlossen. — Um nicht zu weitläuftig zu werden, will ich von wirklich irrigen Behauptungen nur ein Paar Beyspiele, eins aus der Arithmetik, und das andere aus der algebraisch-analytischen Geometrie anführen, die beyde aus Herrn Eulers Schriften genommen seyn sollen; und dann von den Quellen, woraus nothwendig mehrere entspringen müssen, ein Paar Worte hinzufügen.

Die Theorie der Logarithmen der negativen und imaginären Größen, über welche bekanntermaßen zwischen Herrn von Leibnitz und Herrn Bernoulli ein Streit gewesen, von den bey ihr statt findenden Schwierigkeiten zu befreyen, schrieb Herr Euler die in den Memoires der Königlichen Akademie der Wissenschaften vom Jahr 1749 befindliche Abhandlung: De la controverse entre Mrs. *Leibnitz* et *Bernoulli* sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires; und suchte darin den Satz zu beweisen, daß jeder gegebenen Zahl unendlich viel Logarithmen zukommen; oder, daß y, wenn $y = lx$ gesetzt wird,

wird, unendlich viel Werthe habe. Dieser Satz ist nach der Zeit auch von andern Mathematikern als ein Lehrsatz aufgenommen worden; man findet ihn z. B. bey Herrn Kästner in seiner Analysis des Unendlichen, aber damit der Beweis kürzer und leichter seyn mögte, in der zweyten Auflage vom Jahr 1770 §. 332 f. aus der Vergleichung der Kreisbogen mit Logarithmen abgeleitet. Ich will hier nicht dasjenige wiederholen, was ich in meiner Uebersetzung des ersten Buchs der Einleitung in die Analysis des Unendlichen von Herrn Euler über diese Behauptung gesagt habe, sondern, mit Berufung hierauf, ein Paar andere Anmerkungen hersetzen, aus welchen ebenfalls und allein schon zur Gnüge erhellen kann, daß Herrn Eulers angeführter Satz durchaus irrig ist. Die Quelle, woraus ihn Herr Euler abgeleitet hat, ist die Gleichung:

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = 1;$$

und zugleich hat er im siebenten Capitel des ersten Buchs seiner Einleitung, wenn die hyperbolischen Logarithmen genommen werden, die Regeln zur Erfindung der Logarithmen der Zahlen überhaupt, aus der Gleichung

$$(1 + \omega)^i = 1 + x$$

geschöpft. Da in jener Formel n, und in dieser i eine unendlich große, also $\frac{y}{n}$ eben so wie ω eine unendlich kleine, x aber jede positive Zahl bedeuten soll: so entsteht

steht hier natürlicher Weise die Frage: Wie kann, im Grunde ein und derselbe algebraische Ausdruck, einmal $= 1$, und dann auch jeder Zahl, welcher man will, gleich seyn? Was kann aus einer so trüben und unreinen Quelle anders als Irrthum fließen? Im zweyten Buche der Einleitung im ein und zwanzigsten Capitel kommt Herr Euler, da er von den transcendenten Curven handelt, ebenfalls auf jenen Satz zurück, und sucht ihn dadurch als wahrscheinlich vorzustellen, daß, wenn $x = la$, und e die Basis des hyperbolischen Systems ist, $a = e^x$, folglich

$$a = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \text{etc.}$$

sey, und also x aus dieser Gleichung unendlich viel Werthe haben müsse. Hier ist ein Fall, wo die Vernachläßigung der oben als nothwendig angeführten Unterscheidung zwischen absoluten und positiven Zahlen, selbst einen Euler, zu einen Erschleichungsfehler hat verleiten können. Denn jene Gleichung ist nur von den absoluten Zahlen erwiesen, und es hat daher aus ihr, der unendlichen Anzahl ihrer Dimensionen ungeachtet, x nicht mehr als einen Werth. Wenn Herr Kästner die Vergleichung der Kreisbogen mit Logarithmen benutzt, um den Irrthum, den Herr Euler eingeführt, auf eine leichtere und kürzere Art als einen Lehrsatz aufzustellen, so ist im Grunde dadurch weiter nichts erreicht, als daß dabey der begangene Fehler etwas schwerer zu entdecken ist. Was insbesonbesondere die Logarithmen der verneinten Zahlen betrifft, welche Herr Euler aus der angeführten Quelle insgesammt für imaginäre Größen erklärt, so leiten Herr Karsten in seiner Abhandlng über die Logarithmen der verneinten und unmöglichen Größen, und Herr Kästner in einem Aufsatze über eben diesen Gegenstand, in dem Leipziger Magazine für die reine und angewandte Mathematik, die Unmöglichkeit dieser Logarithmen daraus her, daß nur eigentlich gleichartige Größen, und also keine entgegengesetzte, als im Verhältnisse zu einander stehend betrachtet werden können; woraus denn die Unmöglichkeit der Logarithmen verneinter Zahlen, da die Logarithmen im Grunde doch nichts anders als Verhältnißzahlen sind, von selbst aufs deutlichste in die Augen fallen soll. Wenn aber gleichwohl

$$+a : -b = -c : +d$$

für eine wahre Proportion gehalten wird, vorausgesetzt, daß

$$a : b = c : d$$

ist, und dabey die Proportion ganz richtig durch die Gleichheit zweyer Verhältnisse erklärt wird: so steht zu befürchten, daß sich diese Behauptung mit jener schwerlich so vertragen werde, als es zwey wirklich wahre Urtheile thun müssen; und es bleibt immer wahrscheinlicher, daß der gewöhnliche Begriff von der nöthigen Beschaffenheit der Größen, die im Verhältnisse stehen sollen, viel zu eingeschränkt, und daher auch eine Menge daraus fließender Behauptungen da, wo jene Einschränkungen wegfallen, entweder selbst Irrthümer seyn, oder doch zu Irrthümern leiten werden. Das Gebäude der Arithmetik war sonst so weitläuftig nicht als jetzt, und damals der dazu gelegte Grund breit und tief genug. Man hat es erweitert, und höher aufgeführt. Wenn ein Architekt in einem ähnlichen Falle wäre, und nicht vor allen Dingen für die Erweiterung und tiefere Legung des Grundes sorgen wollte; wäre es dann zu verwundern, wenn der Bau nicht die gewünschte Festigkeit erhielte? und wäre es Tadelsucht, wenn man dem Baumeister die Folgen seines Versehens zeigte?

Was das Beyspiel betrifft, welches ich aus der Geometrie anzuführen versprochen habe, so mag dazu die erste von den transcendenten Curven, die Logarithmische Linie, dienen. Hr. Euler giebt derselben im zweyten Buche seiner Einleitung in die Analysis des Unendlichen nicht mehr als einen Schenkel, aber auf der andern Seite der Abscissen-Linie oder der Asymptote innumerabilia puncta discreta, quae Curvam continuam non constituunt, etiamsi ob intervalla infinite parva Curvam continuam mentiantur. Von diesen Punkten sagt er bald nachher noch: Ne bina quidem sunt contigua, hoc tamen non obstante sibi erunt tam propinqua, ut intervallum sit data quavis quantitate assignabili minus. Hiermit vergleiche ich aus der oben aus der Differential-

Rechnung

Rechnung angeführten Stelle folgende Worte: Si quantitas tam fuerit parva, ut omni quantitate assignabili sit minor, ea non potest non esse nulla: namque nisi esset $= 0$, quantitas assignari posset ipsi aequalis, quod est contra hypothesin. Nach dieser Stelle, mit jener verbunden, kann man also das Intervallum zwischen jeden von den gedachten zwey Punkten als nullum betrachten, oder muß solches selbst thun; und dann fielen sie insgesammt in einen zusammen, welches aber auch nicht seyn soll. Was läßt sich nicht beweisen, wenn quantitas omni assignabili minor nicht nulla und dann wieder nothwendig nulla; $(1 + \omega)^n = 1$ oder $= 1 + x$ seyn kann, je nachdem man das eine oder das andere haben will? Und was giebt es außerdem für Widersprüche zwischen den Sätzen von den Logarithmen und den Behauptungen von der Logarithmischen Linie, die gleichwohl schlechterdings nicht statt finden dürfen, wenn nicht die ganze Lehre von den transcendenten Größen, wovon die Logarithmen die ersten sind, ungewiß und unsicher werden soll? Die Logarithmische Linie soll nur einen Schenkel haben. Außerdem daß sonst zu jeder Asymptote zwey Schenkel gehören, kann man einen zweyten Schenkel der Logarithmischen Linie sehr gut auf eine solche Weise wirklich darstellen, daß man daraus, wenigstens nicht seine Unmöglichkeit, beweisen kann. Man verwirft ihn daher vielleicht nur, weil die Arithmetik keine möglichen Logarithmen der verneinten Zahlen haben soll, und vorzüglich hier gar nicht darauf führt. Aber die innumerabilia puncta discreta, quae Curvam continuam non constituunt; haben diese in der Arithmetik die für sie zu setzenden Zahlen? Man rechne nur, antwortet man vielleicht, nach der Formel

$$\mathrm{l}f = 2^n (f^{\frac{1}{2^n}} - 1)$$

so wird man dieselben finden. Allein da alsdann f nicht als eine absolute, sondern als eine positive Zahl behandelt werden muß, so ist auch der Werth von $f^{\frac{1}{2^n}}$ allemal zwiefach, theils positiv, theils negativ; und es hat also, das Verlangte zugestanden, jede positive Zahl einen doppelten Logarithmen, einen positiven und einen negativen, und diesen größer als jenen. Wie stimmt hiermit die Geometrie überein? Ich setze nichts weiter hinzu, da ich das, was nöthig ist, um hier alle Schwierigkeiten aus dem Wege zu räumen, größtentheils schon in den Zusätzen zum siebenten und achten Capitel des ersten Buchs der Uebersetzung der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen mitgetheilt habe. Allein, wenn ein Euler zu solchen Irrthümern verleitet werden konnte, und andere nach ihm schon neue Beweise dafür gefunden haben; haben wir dann ein Recht, von der Mathematik, so wie wir sie besitzen, zu behaupten, daß sie durchaus lauter Wahrheiten enthalte? Fände sich auch nicht schon vorher Veranlassung genug zum Gegentheile, so so werden doch in der Lehre von den transcendenten Grössen, und von was für einem Umfange und von welcher Wichtigkeit ist diese Theorie? die künftigen Verbesserer der Mathematik oft ihren Scharfsinn in der Widerlegung und Wegräumung der eingeschlichenen Irrthümer zeigen können. Und wie kann es bey dem Verfahren, was man in der Arithmetik, und bey der Anwendung derselben auf geometrische Gegenstände, zu beobachten pflegt, auch anders seyn? Von einer Art der Größen geht man, ohne, nach den Vorschriften der Philosophie, durch das gemeinschaftliche Geschlecht überzusteigen, unmittelbar zu der Neben-Art fort, und verwechselt öfters das Unbedingte und Bedingte. Dabey vernachlässigt man das Eindringen in die Natur der geometrischen und algebraischen Construktionen, und die deutliche Kenntniß der aus ihrem Wesen fließenden Verschiedenheiten zwischen beyden; desgleichen die Erweiterung der mathematischen Methode, davon allein Euclid in seinen Elementen ein wirkliches Muster aufgestellt hat, und deren Theorie noch so mangelhaft ist. Ja selbst die Genauigkeit in den Definitionen fehlt, und wenn der Saame unrein ist, wie kann die Saat ohne Unkraut bleiben? Uebrigens verkenne ich, um es nochmals zu wiederholen, des angeführten Tadels wegen, die Verdienste der großen Männer, von welchen ich rede, auf keine Weise, und meine Hochachtung gegen sie bleibt unbegrenzt. Auch behaupte ich nicht, wenn ich auf einige Geschwüre an dem Körper der Mathematik hinweise, daß von der Fußsohle bis zum Scheitel lauter Eiterbeulen seyn. Bey allen Mängeln dieser Wissenschaft in ihrem jetzigen Zustande, wäre den übrigen sehr wohl gerathen, wenn sie mit ihr auf einer Stufe stünden.

Was die Beweise betrifft, die zur Beglaubigung der mathematischen Lehren zu denselben hinzugefügt zu werden pflegen, so sind dieselben ebenfalls bald mehr oder weniger von der Art, daß sie den Namen der Demonstrationen, im vollen Sinne, nicht verdienen. Die Asymptoten z. B. sind Linien, denen sich Curven ohne Ende immer mehr und mehr nähern, ohne je mit denselben zusammenzukommen, und also auch von jenen ohne Aufhören verschieden. Herr Euler läßt aber gleichwohl im zweyten Buche seiner öfters gedachten Einleitung die Asymptoten im Unendlichen mit ihren Curven zusammenfallen, und verwechselt dann die Asymptoten und die Curven als nicht weiter von einander verschiedene Dinge. So bald man über die Schein-Schwierigkeiten, die daher entstehen müssen, hinweg ist, wird man die ganze Untersuchung schwerlich ohne das größte Vergnügen lesen können; allein die Deutlichkeit und die Schärfe, die bey dem Gebrauch wirklicher Demonstrationen nicht fehlen kann, und die auch hier zu erhalten möglich ist, erfordert noch manches, was man in den Schriften von Herrn Euler vergeblich sucht. Wenn ferner Herr Euler

im

im siebenzehnten Capitel des zweyten Buchs seiner Einleitung aus der allgemeinen Gleichung für die Curven, welche von den durch einen Punkt C gezogenen geraden Linien in zwey Punkten geschnitten werden, für die Kegelschnitte von eben dieser Beschaffenheit folgende allgemeinste Gleichung ableitet,

$$\alpha xx + \beta xy + \gamma yy - \delta x - \epsilon y + \zeta = 0$$

und dann hinzusetzt: Puncto ergo C sumto ubicunque, omnis recta per id ducta Sectionem conicam vel in duobus punctis vel nusquam intersecabit: so muß es auffallen, wenn er nun fortfährt: Interim tamen fieri potest, ut unaquaepiam recta Curvam in uno tantum puncto intersecet; quod cum inter infinitas illas rectas per C ductas vel uni vel duabus tantum usu veniat, haec exceptio nullius erit momenti. Nach dieser Aeußerung weiß ich nicht, ob das Folgende, welches, bis zur Quelle zurückgeführt, alle Schwierigkeiten völlig zu heben im Stande ist, so wie es da steht, ganz befriedigen wird.

Von der Unvollständigkeit der gewöhnlichen Beweise in der so wichtigen Lehre von den Kreis- oder Winkelgrößen, wodurch so manche Ungewißheit veranlaßt, und hinterher bald diese bald jene weitere Bestimmung nöthig gemacht wird, sage ich hier nichts; denn auch hier will ich von vielen nur weniges, vorzüglich Grundlehren betreffendes, anführen. Auch das will ich nur kurz anzeigen, daß der wichtige Satz

$$d.lx = \frac{dx}{x}$$

einer von den Hauptsätzen der Differential-Rechnung, von den vielen Fällen, in welchen er gebraucht wird, nur für einen einzigen streng erwiesen ist; denn ich habe davon schon in den Zusätzen zum achten Capitel des ersten Buchs der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen gesprochen, und daselbst auch einen allgemeinen Beweis zu geben versucht. Endlich giebt auch gewiß jeder zu, daß dasjenige, was Herr Euler im dritten Capitel des ersten Theils seiner Anleitung zur Differential-Rechnung § 110 und 111 sagt, um gewisse Schwierigkeiten bey den Reihen, die aus der Entwickelung der Brüche entspringen, aus dem Wege zu räumen, eben so wenig als das, was man über diesen Gegenstand bey andern Neuern findet, im Stande sey, die volle Befriedigung einer strengen Demonstration zu geben; und doch ist selbige bey einem so weitgreifenden Gegenstande doppelt und mehrfach wichtig. Also nur noch ein Paar Worte über die Beschaffenheit einiger Beweise in der ganz gemeinen Buchstabenrechnung.

Daß $+a : -b = -c : +d$; u. s. w. sey, wenn $a : b = c : d$ ist, beweiset man gewöhnlich daraus, weil dabey $+ad = +bc$, ist. Wider diesen Beweis wäre freylich nichts einzuwenden, wenn nur vorher der Satz: Wenn $ad = bc$ ist, so ist auch $a : b = c : d$ nicht bloß von

von absoluten Größen bewiesen würde. — Die Veränderungen einer Proportion durch Anwendung der Addition, der Subtraction u. s. f. lassen sich bey absoluten Größen leicht darthun; allein in welche Weitläuftigkeiten würde man fallen, wenn man, auf die dabey übliche Art, ihre Richtigkeit auch für den Fall beweisen wollte, wenn die Glieder der gegebenen Proportion nicht absolute Größen sind? — Daß die beyden mittlern Glieder einer discreten geometrischen Proportion verwechselt werden können, wird allgemein behauptet, und, als allgemein bewiesen, angenommen; allein bey folgender Proportion

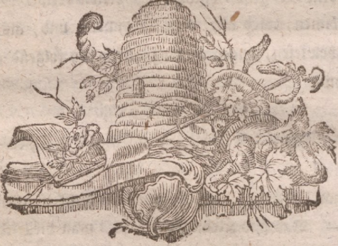
3 Rthlr. : 6 Rthlr. = 2 Ehlen : 4 Ehlen

soll man gleichwohl die Anwendung nicht machen können. — Das sind Kleinigkeiten, sagt man vielleicht, die nur Anfängern wichtig seyn können; wohl, ich will also nicht länger dabey verweilen. Allein, wenn man schon da Mängel findet, wo die Vermeidung derselben so leicht ist, was soll man bey dem Schweren hoffen? Und wenn bey den allerersten Grundlehren Genauigkeit fehlt, wie kann dieselbe bey dem möglich seyn, was auf diese Grundlehren gebauet wird?

Daß ich vorhin einige analytische Beweise angeführt habe, wird übrigens wohl niemand gebrauchen, um die

Bey=

Beyspiele selbst weniger stark sich zu denken. Sollte es seyn, so muß ich auf dasjenige verweisen, was ich über die synthetische und analytische Methode in der folgenden zweyten Abtheilung gesagt habe.



Zweyte

Zweyte Abtheilung.

Von der Mathematik und ihren Haupttheilen im Ganzen betrachtet.

2. Von der synthetischen und analytischen Methode.

Um nicht unnütze Veränderungen zu machen, nehme ich hier die Wörter synthetisch und analytisch in dem Sinne, der in der Mathematik gewöhnlich ist, mit Beyseitsetzung der allerdings etymologischern Erklärungen Herrn Kant's, in seiner Kritik der reinen Vernunft. Bey aller Verschiedenheit, welche die synthetische und analytische Methode haben mögen, ist das ausgemacht, daß jede da, wo sie mit Recht angebracht wird, zur vollen Deutlichkeit und Gewißheit führen müsse; denn wie dürften sie sonst Anspruch darauf machen in der Mathematik gebraucht zu werden, wenn sie dem wichtigsten Vorzuge dieser Wissenschaft vor allen übrigen hinderlich wäre? Aber hieraus folgt auch, daß die Bestimmung wichtig ist, wo synthetisch und analytisch gegangen werden müsse? Daß man mit dem synthetischen Wege den

An=

Anfang machen, dann das synthetische und analytische Verfahren mit einander verbinden, und zuletzt bloß analytisch gehen müsse; ist leicht gezeigt, und läßt sich auch aus dem Wenigen ableiten, was gewöhnlich in den Anleitungen zur Mathematik über beyde Methoden gesagt wird. Allein so wie überhaupt alles, was man bis jetzt über die mathematische Lehrart hat, unvollständig und mangelhaft ist, und kaum die äußere Form gehörig kenntlich macht: so läßt sich auch sehr zweifeln, ob jemand nach den gewöhnlichen Kennzeichen, allein genommen, in jedem einzelnen Falle zu beurtheilen im Stande seyn werde, ob der genommene Weg der synthetische oder der analytische sey? Noch viel weniger werden also dieselben hinreichen, zu bestimmen, wie weit, nicht nur in der Mathematik überhaupt, sondern auch in jedem ihrer Theile und den fernern Abtheilungen von diesen, erst die synthetische Methode allein, dann die synthetische mit der analytischen verbunden, und endlich die analytische allein werde gebraucht werden müssen. Gleichwohl ist dieses in einer Wissenschaft, worin alles nach unbezweifelten und völlig ausgemachten Regeln bestimmt werden kann, ebenfalls ein nothwendiges Erforderniß.

2. Von

2. Von der Ordnung, in welcher einmal die Theile der Mathematik, und zweytens die Sätze jedes Theils auf einander folgen müssen.

Sowohl die Theile der Mathematik im Ganzen genommen, als die einzelnen Sätze eines jeden Theils, müssen, sagt man, so auf einander folgen, wie eins das andere voraussetzt, so daß man sich nie auf das Folgende, sondern nur immer auf das Vorhergehende zu berufen hat. Baco sagt in seiner Abhandlung de Sapientia veterum, unter der Nummer XXXI: Nobis videtur Sapientia Veterum tamquam uvae male calcatae; ex quibus, licet nonnihil exprimitur, tamen potissima quaeque resident et praetermittuntur. Man kann dieses auch hier anwenden. Um von den einzelnen Sätzen anzufangen, so bleibt, wenn man die Ordnung unter ihnen bloß nach der angeführten Regel festsetzen will, diese Ordnung in einem sehr hohen Grade willkührlich. Man muß solches auch eben nicht als etwas nachtheiliges angesehen haben; denn wie hätte man sich sonst z. B. in der Geometrie, in Ansehung der Ordnung ihrer Sätze, solche Veränderungen und Verschiedenheiten erlauben können, als man so häufig gewagt hat? Herr Kästner urtheilt in der vierten Auflage seiner Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie S. 428 über die geometrischen Lehrbücher, welche wir haben, auf folgende Art: „Ueber die unzähligen geometrischen Lehrbücher kann ich nur sagen, daß, von dem eigenen Werthe der Geometrie, Deutlichkeit und Gewißheit, jedes desto weniger besitzt, je weiter es sich von Euclid's Elementen entfernt." Sollte man dieses Urtheil nicht auch auf die Ordnung beziehen oder ausdehnen dürfen, in welcher die Elementar-Sätze der Geometrie vorgetragen werden? Was die übrigen Theile der Mathematik betrifft, so hält man sich da, wie es am Tage liegt, noch weit weniger gebunden, und das um desto mehr, je weiter diese Theile vom Anfange entfernt sind. Und doch kann nicht nur, es muß selbst, wenn die Mathematik Vernunftwissenschaft aus der Construktion der Begriffe seyn soll, in der Mathematik eine, so durchaus bestimmte, Ordnung geben, daß dieselbe, wenn bloß auf die Sache gesehen wird, nur eine ist, und wenn auf äußere Umstände Rücksicht genommen werden soll, die nöthigen Abänderungen insgesammt, und mit Deutlichkeit und Gewißheit, aus der Natur dieser Umstände gefunden werden können. Auch ist der Nachtheil nicht schwer zu entdecken, der aus der Gleichgültigkeit gegen die hier mögliche Genauigkeit entspringt. Einmal wird durch Regeln, wie die obige, bey den Sätzen, die auf mehr als eine Art bewiesen werden können, also bey den meisten, im Grunde sehr wenig bestimmt. Euclides trägt z. B. den Pythagorischen Lehrsatz schon in dem ersten Abschnitte der Lehre von der Gleichheit der Figuren vor, und eben da haben ihn mehrere Neuere. Der Herr von Segner kommt in seinem Compendium der

Arith-

Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie, oder in dem ersten Theile seines Cursus mathematici, erst in der Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren darauf. Herr Jeze gab im Jahr 1752 zu Halle eine Sammlung von drey und zwanzig Beweisen des gedachten Satzes heraus; um das zweyte Dutzend zu ergänzen, theilte Herr Ries in seinen 1765 erschienenen Speciminibus quibusdam Analyseos infinitorum einen neuen aus der Differential- und Integral-Rechnung mit. Wo soll also nun, und wo muß der Pythagorische Lehrsatz eigentlich stehen? nach der obigen Regel, allein genommen, kann er viele Stellen bekommen. Zum andern hat die wahre Stelle eines Satzes auf die Kürze und größere Leichtigkeit seines Beweises einen sehr großen Einfluß. Die Frage: Unde plures insint radices aequationibus sectiones angulorum definientibus? beantwortet Hr. Kästner, über dessen Kürze selbst bisweilen geklagt wird, auf fünf Bogen und drüber, und mußte so weitläuftig seyn. Wenn alles, was zur Beantwortung dieser Frage nöthig ist, in einem wohlgeordneten Systeme am rechten Orte angebracht ist, füllt es weniger Blätter aus, und erhält dabey gleichwohl einen noch größern Umfang. Endlich trägt auch die genaue Bestimmung des Orts jedes Satzes sehr viel dazu bey, den Grad der Vollkommenheit seiner verschiedenen Beweise mit Deutlichkeit zu bestimmen, und ihn selbst an mehreres Bekannte gleichsam anzuknüpfen; daß man also ohne sie weder den möglich höchsten Grad der deutlichen und gewissen Einsicht erlangt, noch sich das Erlernte oder Gefundene auf einmal ganz geläufig bekannt machen kann. Was aber die Frage betrifft: In was für einer Ordnung die Sätze in jedem Theile der Mathematik auf einander folgen müssen, wenn auch in diesem Stücke die statt findenden Mängel wegfallen sollen? so kenne ich darauf im Allgemeinen keine andere Antwort, als: In der natürlichen; d. h. in derjenigen, in welcher sich dieselben, dem, der, dazu hinlänglich geübt und mit den erforderlichen Fähigkeiten ausgerüstet, sie aus seiner Seele allein entwickelt, darbieten. „Das ist höchstens Wink, keine Regel." Selbst in Ansehung des moralischen, des Gott wohlgefälligen Verhaltens finden wir in der Bibel nichts als Winke; aber was brauchen wir mehr, wenn wir bey wirklicher Anlage zur Herzensgüte im Stande sind, ihren Sinn und ihre Wichtigkeit zu ahnden, und durch Befolgung derselben uns nach und nach deutliche Einsichten über beydes zu erwerben? Oder soll ich dieses Beyspiel nicht brauchen, so gehört vielleicht folgende Stelle aus Seneca's Briefen hieher: Eam partem philosophiae, quae dat propria cuique personae praecepta, nec in universum componit hominem, Aristo Stoicus levem existimat, et quae non descendat in pectus usque: at illam non habentem praecepta, plurimum ait proficere. Qui enim se ad totum instruxit, non desiderat particulatim admoneri.

Was

Was die Ordnung unter den Theilen der Mathematik, oder den verschiedenen Wissenschaften betrifft, welche zusammengenommen die Mathematik ausmachen, so hat Euclides längst durch sein Beyspiel gezeigt, so wie es auch die Natur der Sache selbst lehrt, daß man die Vertheilung der mathematischen Sätze in Abschnitte von besondern Wissenschaften, und die Zusammensetzung von einander abgesonderter Disciplinen aus diesen Abschnitten, jedesmal erst nach der Erfindung aller jener Sätze vornehmen sollte. Wir kennen und gehen kürzere Wege, wenn wir die Theile der Mathematik, und die Ordnung, in welcher sie auf einander folgen müssen, festsetzen wollen. Allein dagegen sind auch die Grenzen, die wir ziehen, warlich keine Linien; nicht einmal die gemeine und höhere Mathematik sind, nach den gewöhnlichen Bestimmungen, gehörig von einander abgesondert; und auf der andern Seite trennt man vielleicht, was durch ein natürliches Band verknüpft ist. Zur Verkleinerung der Verdienste der großen Männer, deren sich die Mathematik rühmen darf, soll aber auch dieses nicht abzwecken. Wer zur Erweiterung der Grenzen einer Wissenschaft geboren ist, ist zu erhaben, alle Steine auf dem Anfange des Weges zu ihr wegzuräumen; er hat Kraft, darüber wegzuschreiten. Aber es giebt andere, denen diese Steine unübersteigliche Berge werden können; und wenn oft das weitsichtige Auge, welches das größte Feld der entlegenen Gegenstände sehr deutlich übersieht, sich entwöhnt, nahe liegende Kleinigkeiten deutlich genug wahrzunehmen: so soll doch auch Festigkeit des Grundes die erste Haupteigenschaft eines jeden Gebäudes seyn, und dem Lehrgebäude der Mathematik darf sie am wenigsten fehlen.

3. Von den Lücken, welche in der Mathematik angetroffen werden.

Die Materie dehnt sich mir unter den Händen aus, ohnerachtet ich aus den Beyspielen, die sich mir zur Bestätigung meiner Behauptungen aufdringen, nur die kürzesten und leichtesten wähle. Ich muß also mehr suchen mich einzuschränken, und von dem Uebrigen das meiste mehr andeuten, als es selbst nur so weit ausführen, wie es in einem bloßen Versuche möglich und schicklich ist.

A. Von der Unvollkommenheit der Theorie der mathematischen Methode.

Es wäre allerdings übertrieben, wenn man behaupten wollte, daß jeder, der seine Denkfähigkeiten nur an andern Gegenständen hinlänglich geübt hätte, die ganze Mathematik aus sich selbst gleichsam herauszuspinnen im Stande sey, ohne dazu weder einer mündlichen noch schriftlichen Anleitung zu bedürfen. Allein daß, — deutliche, gründliche, und vollständige Kenntniß der Mathematik bey dem Lehrer vorausgesetzt, — ein Schüler

vom

vom Anfang an durch bloßes Fragen zur Selbsterfindung aller Sätze dieser Wissenschaft so weit geleitet werden könne, daß er, wenn man ihn nun auch zu einer deutlichen Einsicht des bis dahin gegangenen Weges führt, ohne alle fernere Leitung immer weiter fortzufahren vermöge; dies zu behaupten, habe ich durch Nachdenken und vorsätzlich angestellte Versuche zu viele Gründe, als daß ich daran im geringsten zweifeln könnte. Auch muß ich diesen Weg, andern die Mathematik beyzubringen, deswegen unter allen für den besten halten, weil dabey der Schüler gezwungen ist, alle seine Denkkraft ununterbrochen zu gebrauchen; weil ihm so die Beschäftigung mit der Mathematik mehr angenehmer Zeitvertreib als Arbeit wird; weil er allenthalben die für ihn gehörigen Kenntnisse ganz bekömmt, und nirgends von der Gründlichkeit abgegangen werden darf; weil sich ihm das Erlernte bald unauslöschlich einpräget, wenigstens so, daß er zur Wiedervergegenwärtigung desselben keine äußere Hülfsmittel nöthig hat; weil er dadurch gewöhnt wird, seine Kenntnisse aus der Quelle selbst zu schöpfen; weil er auf diesem Wege erst nach den Gründen die Sätze, erst nach Anwendung der Regeln die Regeln selbst kennen lernt, und so für Irrthum gesichert ist; weil er dabey die Fähigkeit erhält, die Erfindungen anderer zu beurtheilen, sich zu eigen zu machen, und wo es nöthig ist, weiter zu führen; weil er, wenn seine Führer ihn verlassen, im Stande ist, selbst sein Führer zu werden; weil auf diese Art in viel kürzerer Zeit ein weit wichtigeres Ziel erreicht werden kann; und endlich, weil derjenige, der so geführt worden ist, so weit er auch in seinen Kenntnissen fortrücken mag, nie in Gefahr ist, durch Stolz auf sein Wissen sich zu erniedrigen, indem sich ihm nach jeder Bepflanzung eines Feldes zehn andere zeigen, die auf ihn warten. Alles dieses läßt sich bey einer vollständigen Betrachtung der mathematischen Methode aufs klärste aus einander setzen; und daß man die Theorie dieser Methode so sehr vernachlässiget, und davon so wenig brauchbares gesagt hat, ist das erste, was ich hier anführen muß. Da mir aus mehrern hier nicht her gehörigen Gründen die Theorie der mathematischen Lehrart von je her äußerst wichtig gewesen ist, so daß ich selbst nicht entscheiden kann, ob ich die Mathematik um der Kenntniß ihrer Methode willen, oder umgekehrt, getrieben habe; und mir das wenige, was ich davon weiß, sowohl bey meinem eigenen Studium der Mathematik, als bey dem Unterrichte anderer in dieser Wissenschaft, die größten Dienste gethan hat: so habe ich seit mehrern Jahren Materialien zu einem Versuche einer ausführlichen Abhandlung darüber gesammlet, und bitte um Erlaubniß, meine Gedanken über den Umfang und den Nutzen derselben hersetzen zu dürfen. — Eine vollständige Abhandlung über die mathematische Lehrart, deren ganzer Gebrauch indeß nicht eine Sache des in der Mathematik Unwissenden, ja nicht einmal dessen ist, der darin

nur

nur historische Kenntnisse besitzt, müßte also meiner Meinung nach folgende Ausdehnung haben.

I. Vorläufig müßte darin erstlich eine Erklärung der Mathematik gegeben werden, wie die Definitionen des Euclides sind; die also Quelle alles dessen wäre, was zu einer ausführlichen Theorie der mathematischen Methode erforderlich ist; vielleicht selbst ein Saamenkorn, welches, dem rechten Boden anvertraut und mit Sorgfalt gepflegt, den ganzen Baum der reinen Mathematik hervortreiben könnte: und hieraus müßten zweytens nach logischen Regeln die Hauptheile der Mathematik abgeleitet, und in einer natürlichen Ordnung aufgestellt werden.

II. Die Abhhandlung von der mathematischen Methode selbst müßte diese Methode betrachten

1. überhaupt.
2. insbesondere
   A. in der reinen Mathematik
      a. bey der Untersuchung der beständigen Größen
         α. solcher, die in Anschauungen
         β. solcher, die in willkührlichen Construktionen dargestellt werden.
         γ. solcher, wobey beyde Hülfsmittel gebraucht werden
      b. bey der Untersuchung der veränderlichen Größen
         α. so wie dieselben in der unbestimmten Analytik

β. in der Differential- und Integral-Rechnung behandelt werden können.

B. in der angewandten Mathematik

C. in der praktischen Mathematik.

III. So wie in diesem Abschnitte das Augenmerk hauptsächlich auf eine vollständige Mittheilung deutlicher Regeln gerichtet seyn müßte, durch deren Befolgung die Mathematik erfunden werden kann: so könnte nun noch

1. über die Sammlung des Gefundenen in Elemente, Anfangsgründe und Lehrbegriffe, und

2. über die Art, andere in der Mathematik zu unterrichten, geredet werden.

Die Erklärung der Mathematik, welche ich vorhin als das erste angeführt habe, brauchen wir nicht zu suchen, Herr Kant hat sie in seiner Kritik der reinen Vernunft schon mitgetheilt; und was die Entwickelungen betrifft, welche damit vorgenommen werden müssen, so darf man dabey, genau betrachtet, nur den Gesetzen für unsere Denkkraft folgen können, welche der Urheber unserer Natur der menschlichen Seele mit unauslöschlichen Buchstaben eingeschrieben hat. Hierauf gründe ich die Hoffnung einer vollkommenen Theorie der mathematischen Methode, wenn auch erst nach mehrern vorhergehenden un-

unvollkommenen Versuchen. Was aber die Vortheile betrifft, welche von einer solchen Theorie für die Mathematik selbst entstehen können, so scheinen mir, wenn ich von einer Menge im Kleinen angestellter Versuche auf das im Großen mögliche schließen darf, folgende Behauptungen nicht übertrieben zu seyn.

Bey einer vollkommenen Theorie der mathematischen Methode kann alles, was zur Mathematik gehört, aufs genaueste und so bestimmt werden, daß keine Wahl übrig bleibt. Alle Lehrsätze mit ihren Beweisen, alle Aufgaben nebst ihren Auflösungen, vorher noch die Erklärungen, Forderungen und Grundsätze, und alles dieses nicht bloß überhaupt, sondern so zergliedert als möglich gedacht; die ganze Ordnung vom Punkte an bis zu dem Unbegrenzten, so weit dieses der Gegenstand der Untersuchung für endliche verständige Wesen, wie wir sind, seyn kann, behalten nicht das mindeste willkührliche. Auch lassen sich darnach in jedem Falle die Grenzen angeben, wo wir unserm Forschen ein Ziel setzen müssen; und auf der andern Seite erkennt man wieder, welche Wege erst zur Hälfte, oder gar einem noch kleinern Theile nach zurückgelegt sind.

Also wird man dadurch auch in den Stand gesetzt, alles bisher in der Mathematik erfundene aufs genaueste und richtigste zu prüfen; und dabey ereignet sich

der

der sehr wichtige Umstand, daß nichts von alle dem, was man bis jetzt allgemein als wahr und gut erkannt und angenommen hat, in einem andern als in diesem vortheilhaften Lichte erscheint, und daß alle Veränderungen, auf welche man durch diese Prüfung geleitet wird, nichts sind als Verbesserung des Grundes, Verallgemeinerung des zu Speciellen, genauere Bestimmung des zu Unbestimmten, Ausfüllung gelassener Lücken, Berichtigung solcher Verirrungen, welche ganz zu vermeiden der menschlichen Schwachheit nicht möglich ist, Erleichterung des Schweren ohne Aufopferung der Gründlichkeit, u. d. gl.

Aber was vielleicht noch mehr die Aufmerksamkeit erregt, so giebt es, insbesondere in der höhern Mathematik, eine Menge so auffallender Wege und so paradoxer Behauptungen, daß, dadurch verleitet, mehrere den eigenen Vorzug der Mathematik, Deutlichkeit und Gewißheit, bloß der gemeinen Mathematik, wo nicht gar der Geometrie allein, beygelegt haben, und daß der schönste und erhabenste Theil der mathematischen Kenntnisse, anstatt durch seinen Reiz anzulocken, weit öfterer durch die Dornen, womit er durchflochten schien, abgeschreckt hat. Durch eine vollständige Theorie der mathematischen Methode gewinnt die Mathematik auch darin, daß sich die Vollkommenheiten, weswegen sie den Namen Wissenschaft ausschließungsweise erhalten hat, in

desto

desto größerm Glanze zeigen, je weiter man ihr Gebiet durchwandert, und daß jene, dem Scheine nach öfters unauflösliche, Schwierigkeiten verschwinden — wie der Thau vor der Morgensonne, würde ich sagen, wenn ich Dichter wäre; allein ich sagte damit zu wenig, diese Schwierigkeiten verschwinden nicht, ihre Quelle wird verstopft, daß sie gar nicht entstehen können. Doch für jetzt genug hiervon.

B. Von den Lücken in der gemeinen Mathematik.

Man betrachtet die Mathematik öfters als eine sehr schwere Wissenschaft, und ihrer Natur nach kann sie die leichteste unter allen seyn. Plato verlangte von seinen Schülern, daß sie sich durch das Studium der Mathematik vorbereitet haben sollten, um an seinen Unterweisungen in der Philosophie Theil zu nehmen; ahmten wir ihm nach, so würden wir alle die vom Studieren abzuhalten suchen, denen die Mathematik zu schwer ist, diejenigen wenigstens, welche diese Klage schon bey den Elementen der gemeinen Geometrie und den ersten Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra führen. Weiter hin ist einiger Grund da, wegen gewisser Lücken, die ich nun ebenfalls kürzlich berühren will.

Wer Herrn Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen sorgfältig studirt hat, wird bey dessen Anleitung zur Differential-Rechnung, abgerechnet, was, nach

nach den Anmerkungen in der ersten Abtheilung, abgerechnet werden muß, keine Ursache finden, sich über Schwierigkeiten zu beklagen. Herr Euler hat durch dieses vortrefliche Werk die Absicht erreicht, welche er sich dabey vorgesetzt hatte, und worüber er sich in der Vorrede auf folgende Art erklärt. Saepenumero animadverti, maximam difficultatum partem, quas Matheseos cultores in addiscenda Analysi infinitorum offendere solent, inde oriri, quod, Algebra communi vix apprehensa, animum ad illam sublimiorem artem appellant; quo fit, ut non solum quasi in limine subsistant, sed etiam perversas ideas illius infiniti, cujus notio in subsidium vocatur, sibi forment. Quamquam autem Analysis infinitorum non perfectam Algebrae communis, omniumque artificiorum adhuc inventorum cognitionem requirit; tamen plurimae extant quaestiones, quarum evolutio discentium animos ad sublimiorem scientiam praeparare valet, quae tamen in communibus Algebrae elementis vel omittuntur, vel non satis accurate pertractantur. Hanc ob rem non dubito, quin ea, quae in his libris congessi, hunc defectum abunde supplere queant. Da dieses im Jahr 1748 geschrieben worden ist, und die neuern Mathematiker, unter uns, z. B. der Herr von Segner, Herr Kästner und Herr Karsten, die Eulerischen Entdeckungen benutzt, und durch ihre Einsichten selbst noch weiter geführt haben: so paßt freylich die angezogene Stelle auf den jetzigen

gen Zustand der Mathematik nicht mehr so, als damals, da sie niedergeschrieben wurde; aber eben dadurch wird sie zu einer andern Absicht nur desto dienlicher.

Das Studium der Differential-Rechnung wird dem, der sich durch Herrn Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen dazu vorbereitet hat, weit leichter, als das Studium dieser Einleitung nach dem, was aus der gemeinen Algebra vor derselben herzugehen pflegt. Woher dieses? Sollte etwa zwischen demjenigen, was unsre Anleitungen zur gemeinen Algebra enthalten, und zwischen den Untersuchungen, die von Hrn. Euler in der gedachten Einleitung angestellt werden, noch eine Lücke statt finden, so daß diejenige, von welcher Herr Euler redet, durch sein Werk nur dem letzten, obgleich dem vornehmsten, Theile nach ausgefüllt wäre? Dieses wird schon dadurch wahrscheinlich, weil in der Mathematik, sobald nirgends eine Lücke gelassen wird, jeder nachfolgende Schritt, weil alle vorhergehenden mit Festigkeit gethan sind, nicht schwerer werden muß, als die vorhergehenden es waren, und läßt sich vielleicht auf folgende Art außer allen Zweifel setzen.

So vollkommen wir auch die Elemente der gemeinen Geometrie und der gemeinen Buchstabenrechnung und Algebra wirklich haben, so ist doch derjenige, der diese Elemente gefaßt hat, deswegen nicht gleich zu jedem

dem Gebrauche, der davon gemacht werden kann, geschickt, sondern es müssen erst noch besondere und stufenweise einander folgende Uebungen hinzukommen, wenn die erforderliche Fertigkeit erworben werden soll. Die gedachten Elemente sind das A B C der Mathematik; um ein Werk, wie Herrn Eulers Einleitung, mit Leichtigkeit, und dem von dem Verfasser beabsichteten Nutzen zu gebrauchen, muß man lesen können. Durch die Elemente der gemeinen Mathematik lernen wir die Gegenstände dieser Wissenschaft nicht nach allen ihren Eigenschaften kennen; hiezu zu gelangen, müssen hinterher diese Gegenstände classenweis ausgehoben, und besonders und ausführlich und nach allen ihren Seiten betrachtet werden; so wie man z. B. in der Trigonometrie, Tetragonometrie und Polygonometrie schon zu thun angefangen hat. Auch in Ansehung der Verbindung der Arithmetik mit der Geometrie haben wir bereits viel vortrefliches, z. B. in Herrn Newtons Arithmetica universali den Abschnitt, welcher die Ueberschrift führt: Resolutio Quaestionum geometricarum. Allein eines Theils wird das wirklich schon vorhandene zu wenig als nothwendig betrachtet, und häufig bey der Erlernung der Mathematik übergangen, oder doch nur flüchtig und ebenfalls nur den ersten Anfängen nach getrieben; andern Theils hat man von vielen nur erst einzelne Materialien, aber noch kein vollständiges Gebäude. Nur ein Paar ganz leichte Fälle anzuführen; weil gerade die leichtesten

Bey-

Beyspiele hier am meisten beweisen, so kommen aus der Arithmetik die Sätze von der Findung zweyer Zahlen aus ihrer Summe und ihrer Differenz, desgleichen, daß

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

sey, so wie auch die Lehrsätze von den Eigenschaften der geraden und ungeraden Zahlen u. s. f.; und aus der Geometrie sehr viele der wichtigsten, aber außer dem Gebiete der Elemente liegenden Bestimmungen der Seiten, der Winkel und des Inhalts der Figuren aus gewissen dazu gegebenen Dingen, meistentheils in der gemeinen Algebra nur gelegentlich als erläuternde Beyspiele vor. Um mich nochmals auf Herrn Euler zu berufen, so besteht der zweyte Theil seiner Institutionum Calculi differentialis aus Anwendungen der Differential-Rechnung, welche die Theorie von den discreten Größen zu erweitern, abzwecken; und er würde sich auf ähnliche Art auch über die continuirlichen Größen verbreitet haben, wenn er dessen nicht wegen des von andern hier geleisteten hätte überhoben seyn können. Bey aller Verschiedenheit, welche zwischen der gemeinen Algebra und der Differential-Rechnung statt findet, kommen beyde darin mit einander überein, daß sie nicht sowohl wirkliche Untersuchungen über die Größen selbst enthalten, sondern vielmehr sich mit der Erfindung der Wege beschäftigen, auf welchen man schnell und leicht zu einer vollständigen und sichern Kenntniß der Größen gelangen kann. Die gemeine Buchstabenrechnung und Algebra sucht dergleichen für die beständigen, und die Differential-Rechnung, so wie auch nachmals die Integral-Rechnung für die veränderlichen Größen auf. Sollte man also nicht auch in der gemeinen Mathematik, nach der Algebra, Herrn Eulers Verfahren mit Vortheil nachahmen können? Der Schade, der aus dem Gegentheile entspringt, ist mannigfaltig und groß. Zuvörderst wird das Elementarische und ganz Allgemeine nicht nur dann erst interessant, wenn man dasselbe als die Quelle des außer dem Elementar-Gebiete liegenden erkennt, und auf das zunächst unter ihm begriffene herabzuführen im Stande ist; sondern es ist selbst ohne dieses nicht einmal die gleich im Anfange erforderliche deutliche und vollständige Kenntniß von jenem möglich. Beydes, wendet man vielleicht hier ein, kann leichter und sicherer durch einzelne praktische Anwendungen erhalten werden. Praktische Anwendung bey Elementar-Kenntnissen? Uebungen im Lesen, wenn das A B C nur nothdürftig in der alphabetischen Ordnung bekannt ist? Doch davon werde ich nachher ausführlicher zu reden Gelegenheit haben. Zweytens setzt jeder folgende Theil der Mathematik alle vorhergehenden auf die Art voraus, daß man aus der Menge von Sätzen, welche diese enthalten, die jedesmal brauchbaren ohne Mühe und ohne langes Nachdenken herauszufinden im Stande ist; und dabey muß man zugleich jeden Satz mit den bey ihm möglichen Modificationen

tionen und Erweiterungen kennen. Aber zu dieser Fertigkeit, und zu dieser erweiterten Kenntniß gelangt man nur durch vollständige scientifische und stufenweis ins Speciellere gehende Anwendungen. Endlich bedarf der Schüler bey Erlernung der Elemente selbst fast durchaus der Handleitung eines Führers, und er soll allein gehen lernen, muß allein gehen können, ehe er sich in ein neues Feld wagt. Bey den Anwendungen, wovon ich rede, darf man, und muß so gar, ihm nichts weiter als Winke ertheilen; die nöthige Kraft hat er, nur der Gebrauch derselben fehlt ihm noch; er muß versuchen, oft mit Straucheln; sein Handleiter ahmt der Kinderwärterin nach, die das Kind, wenn es anfängt, dem Leitbande zu entwachsen, erst innerhalb ihrer Arme, dann wenige Schritte, und nach und nach immer mehr frey zu gehen, vorsichtig zwingt. Die Natur ist in ihren Wegen einförmig; wie die Seelenkräfte gebildet, und durch erweiterte Kenntnisse verstärkt werden müssen, läßt sich auch von der Art und Weise lernen, wie Körperanlagen zu Fertigkeiten erhoben werden.

C. Von den Lücken zwischen der Differential- und Integral-Rechnung.

Die Richtschnur, welcher ich bey der Aufsuchung und Bestimmung der Lücken in der Mathematik folge, ist diese: Wo einem Schüler, der den vorhergehenden

Unterricht treu benutzt hat, Gelegenheit übrig bleibt, zu fragen: Wie komme ich aus dem Vorhergehenden auf das Gegenwärtige? Wie hätte ich es finden können, wenn ich mir selbst, ohne mündliche und schriftliche Anweisung, überlassen gewesen wäre, und äußere oder innere Umstände nur diese fernere Kenntnisse mir zum Bedürfniß gemacht hätten? da ist eine Lücke. Zu dieser Frage hat ein Schüler das Recht, der vom Anfang an darauf gewiesen wird, daß die Mathematik Vernunftwissenschaft aus der Construktion der Begriffe ist; und er wird sie thun, wenn ihm dieses nicht bloß gesagt, sondern bey der Erlernung der Elemente, vom Anfang an, deutlich zu empfinden gegeben worden ist, so oft man ihn nicht fortführt, sondern fortreißt. Nach diesem Kennzeichen sehe ich mich aber genöthiget, zu urtheilen, daß zwischen der Differential- und Integral-Rechnung eine Lücke statt finde. Es ist bewundernswürdig, zu was für einem Grade der Vollkommenheit die Integral-Rechnung gediehen ist; die Kunstgriffe, welche darin gebraucht worden sind, gewähren, sowohl durch ihre Menge, als durch ihre Größe, Stoff zu den angenehmsten Betrachtungen. Eins nur scheint dabey zu bedauern zu seyn, nemlich, daß man von den wichtigsten gerade meistens das Urtheil fällen muß, was bey andern Erfindungen nur gelten sollte: Wir haben sie dem Zufalle zu danken. Hieraus entsteht ein zwiefacher Nachtheil. Einmal behalten jene Kunstgriffe zu viel schweres, als daß sie vielen bekannt seyn, und von ihnen mit Fertigkeit gebraucht werden könnten; und zweytens bleiben dabey eine Menge anderer, nicht minder wichtigerer, unsern Augen unentdeckbar. Dazu kommt noch, daß eben des angeführten Umstandes wegen, jene erhabene Fortschritte des menschlichen Verstandes zerstreut sind, und aus solchen Quellen genommen werden müssen, die nicht in jedermanns Gewalt stehen, wodurch nothwendig ihre Nutzbarkeit sehr verkleinert werden muß. Sollte es so schwer, oder gar unmöglich seyn, diesem Mangel abzuhelfen? Die Lehre von den Gleichungen in der gemeinen Algebra war unvollständig und schwer, so lange man die Art, wie Gleichungen aus der Zusammensetzung der Faktoren entspringen können, nicht vorhergehen ließ. In der Integral-Rechnung geht man den Weg rückwärts, den man in der Differential-Rechnung vorwärts zu nehmen hat; aber wenn man von den veränderlichen Größen ausgeht, so findet man nur eine kleine Anzahl von Differentialien, wenn dieselben gegen diejenigen gehalten werden, von welchen man in der Integral Rechnung, und bey den Anwendungen derselben, zu den veränderlichen Größen zurück zu kehren, entweder lernt, oder doch lernen zu können wünschen muß. Wenn man die Differential-Rechnung dadurch erweiterte, daß man dasjenige, was darin einzeln aufs ausführlichste untersucht zu werden pflegt, auch in den möglichen Verbindungen unter sich betrachtete; wenn man die Erfindungen so vieler und so großer Männer in der Integral-Rechnung, die, insbesondere in den Sammlungen der Schriften der Akademien der Wissenschaften, zerstreut sind, sammlete; und diese Menge des herrlichsten Stoffes mit philosophischem Geiste, und durch eine genaue und vollständige Theorie der mathematischen Methode geleitet, in der Rücksicht bearbeitete, auch diesem Theile der Mathematik die nur immer mögliche Vollständigkeit, Klarheit, Einförmigkeit und Leichtigkeit zu geben; sollte nicht dadurch der ganzen Größenlehre ein wichtiger Vortheil erwachsen können? Im Allgemeinen kann dieses hier hinreichen, und zu besondern Auseinandersetzungen ist jetzt nicht der Ort; ich gehe also zu einer andern Betrachtung fort.

D. Von den Lücken in der angewandten Mathematik.

Durch das, wovon ich in den vorhergehenden Absätzen geredet habe, würde allerdings der Weg durch die reine Mathematik beträchtlich verlängert werden, und ich sehe daher dem Einwurfe entgegen, daß vielleicht der auf der einen Seite mögliche Vortheil auf der andern durch die abschreckenden Unannehmlichkeiten der Weitläuftigkeit wo nicht überwogen, wenigstens zernichtet werden mögte. Dieser Einwurf ist sehr scheinbar, allein demungeachtet nichts weniger als gegründet. Man hat meinen bisherigen Versuchen, die ersten Anfangsgründe der Geometrie, der Buchstabenrechnung und Algebra ohne Nachtheil der Gründlichkeit zu erleichtern, und zwar ganz all-

allgemein, weiter keinen Vorwurf, als den der zu großen Weitläuftigkeit gemacht, und ich gestehe es selbst, daß ich mir nicht getraue, beym Unterricht in den ersten Elementen, mit irgend einem andern Lehrer der Mathematik gleichen Schritt zu halten. Gleichwohl ist unter meinen Schülern, die weiter gegangen sind, als bis zum Pythagorischen Lehrsatz, keiner gewesen, den meine anfängliche Langsamkeit hinterher gereuet hätte. Und da hier Versuche mehr entscheiden, als bloßes Raisonnement, so weiß ich aus Erfahrung, daß, wenn im Anfange nichts versäumt, und in der Folge die angeführten Lücken, so viel als möglich ausgefüllt werden, der Schüler z. B. bey Herrn Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen den Lehrer bey dem ersten Buche, bis ohngefehr auf den vierten, und bey dem zweyten, bis etwa auf den sechsten Theil entbehren kann, und von den Institutionibus Calculi differentialis eben dieses unsterblichen Mannes sind ihm sicher neun Zehntheile ohne weitere Anleitung verständlich. Wie es sich in Ansehung der Integral-Rechnung verhalten werde, darüber ist mir, weil ich nichts sagen will, wovon ich noch keine unbezweifelte Proben habe, jetzt noch kein Urtheil möglich; nach einem halben Jahre werde ich mich dazu im Stande sehen, indem mir ein doppelter Versuch bevorsteht. Mit einem Worte, die größere Vollständigkeit der Anleitung zur reinen Mathematik, und die nur immer mögliche Genauigkeit bey der Mittheilung der Elemente, habe ich nicht gefordert, um nur mehr zu verlangen als bisher geschehen ist, sondern, weil alle Versuche, die ich darüber zu machen Gelegenheit gehabt, und alle die Untersuchungen, die ich angestellt habe, um darin zur Gewißheit zu gelangen, mich überzeugen, daß gerade dieser Weg der kürzeste ist, wenn man die Mathematik mit allem von ihr zu erwartenden Nutzen, und mit ununterbrochenem oder vielmehr immer wachsendem Vergnügen treiben will. Schwierigkeiten, obgleich nur von der Art, daß zu ihrer Besiegung weiter nichts, als ein jedem Menschen möglicher Grad von Nachdenken erfordert wird, desgleichen Weitläufigkeit in der Auseinandersetzung und Anleitung, müssen, meinen Grundsätzen nach, im Anfange allerdings statt finden, wenigstens hier am größten seyn; je weiter man aber fortgeht, desto leichter muß alles werden, desto schneller müssen die Schritte seyn, die der Schüler thun kann. Vorzüglich aber fängt der Vortheil, der aus der Vermeidung aller Lücken in der reinen Mathematik entsteht, an, sichtbar zu werden, wenn der Uebergang zur angewandten Mathematik gemacht wird. Dies will ich jetzt kürzlich zeigen, indem ich eine Lücke berühre, die mir in diesem Theile noch nicht ganz ausgefüllt zu seyn scheint.

Wenn man die angewandte Mathematik von der praktischen unterscheiden will, und ohne sehr großen Nachtheil kann man, wie ich nachher zeigen werde, diesen Unterschied nicht vernachlässigen: so entfernt sich dieselbe bloß dadurch von der reinen, daß die in ihr zum Grunde gelegten Begriffe von wirklichen Dingen abgezogen sind, da hingegen in jener die Erklärungen dazu dienen, die Gegenstände erst zu geben. Setzt man also die reine Mathematik in der möglichen Vollkommenheit voraus, so können in der angewandten keine neue Sätze, sondern bloß die Lehren der reinen Mathematik, nach der Natur der Begriffe, worauf sie angewandt werden, modificirt, vorkommen. Hiernach enthalten die meisten Lehrgebäude der angewandten Mathematik für den Gebrauch, zu welchem sie geschrieben sind, theils zu viel, theils zu wenig; und am seltensten ist darin für die beste und leichteste Art gesorgt, die Wissenschaften, welche sie in sich begreifen, zu erlernen.

Um von dem letzten anzufangen, so braucht derjenige, der die reine Mathematik ganz in seiner Gewalt hat, zur Erfindung der angewandten nichts weiter, als einmal eine Fertigkeit, die Dinge in der Natur, welche, ins Allgemeine geführt, sich in Construktionen darstellen lassen, aufzusuchen, denselben durch Abstraktion alle Eigenschaften zu nehmen, die keiner Construktion fähig sind, und die übrig bleibenden sich in Construktionen zu gedenken. Sobald dieses geschehen ist, bietet die Erinnerungskraft die aus der reinen Mathematik brauchbaren Sätze, nebst den damit etwa noch vorzunehmenden

Veränderungen, dar; und besitzt er nun zweytens die Geschicklichkeit, die geometrischen und arithmetischen Ausdrücke schnell in solche zu verwandeln, welche die, in den Construktionen dargestellten, Eigenschaften des jedesmaligen Gegenstandes auf die gewöhnliche Art benennen; so bleibt nach Anwendung derselben nur noch wenig übrig. Es erstrecken sich nemlich die in der angewandten Mathematik zum Grunde gelegten Begriffe nicht allemal so weit, als die in der reinen Mathematik ihnen ähnliche; wo es sich denn fast von selbst versteht, daß von den gefundenen Sätzen nur diejenigen beybehalten werden können, die aus den völlig mit einander übereinstimmenden Merkmalen fließen. Ferner kann es öfters nöthig seyn, da die Gegenstände der angewandten Mathematik abgezogene sinnliche Objecte sind, auch das von ihnen gefundene, um davon die Vorstellung sinnlich zu machen, in wirklichen Fällen zu betrachten. Endlich muß jeder Satz, da die zum Grunde gelegten Begriffe Realität haben müssen, in der Natur nachgewiesen werden können; und da die angewandte Mathematik das Mittel zwischen den Idealen der reinen Mathematik und zwischen den wirklichen Dingen seyn soll, auch darin aufgesucht werden. Ein Beyspiel zur Erläuterung hinzuzufügen, so sey der Schüler zur Untersuchung der Wirkung zweyer conspirirenden Kräfte gekommen. Wie er diese Kräfte selbst durch Linien auszudrucken habe, ist ihm, da er schon vorher Kräfte construirt hat, bekannt.

Um auch ihre Wirkung durch eine Construktion darzustellen, überlegt er dieselbe, findet aber dadurch nichts als die Punkte, in welchen der von zwey conspirirenden Kräften getriebene Körper in jedem beliebig bestimmten Augenblicke seyn muß. Sobald er indeß nur einige von diesen Punkten verzeichnet hat, nimmt er, von der Geometrie erinnert, wahr, daß jene Wirkung aufs genaueste durch die Diagonale des Parallelogramms der gegebenen conspirirenden Kräfte ausgedruckt werde. Den Satz: Ein von zwey conspirirenden Kräften getriebener Körper durchläuft die Diagonale des Parallelogramms dieser Kräfte, gibt ihm auf diese Art die vollendete Construktion zu empfinden, wenn er ihn auch nicht deutlich denkt. Allein bringt er aus der reinen Mathematik die Kenntnisse und Fertigkeiten mit, welche daher möglich sind, und ohne welche niemand zur angewandten Mathematik geführt werden sollte; so betrachtet er das angeführte nur als Vorbereitung. Er sucht daher nun alle gehabte Sätze von den Parallelogrammen auf, insbesondere die, durch welche aus den möglich wenigsten Dingen alle übrige dabey vorkommende bestimmt werden können; setzt anstatt der Seiten, Seitenkräfte, anstatt der Diagonale, mittlere oder dritte Kraft, anstatt des Winkels, welchen die Seiten, so wie sie in den Seitenkräften gegeben sind, machen, Neigungswinkel oder Conspirations-Winkel, oder Richtung, anstatt des andern, Supplement der Richtung; und findet auf diese Art

die

die Antwort, nicht auf eine, sondern auf alle bey zwey conspirirenden Kräften mögliche Fragen. Wenn er ferner, nachdem er so weit gekommen ist, die angewandten Begriffe mit den zu Hülfe geommenen reinen vergleicht, so entdeckt er auch, wie die gefundenen Fragen und Antworten, ohne ihren Umfang zu vermindern, auf eine kleinere Anzahl gebracht werden können; denn unbrauchbare Sätze bekömmt er hier nicht. Dieser Fall würde z. B. statt finden, wenn jemand aus der bekannten Eulerischen Hypothese

$$P = p\,(1 - \frac{c}{C})^2$$

die Größe c zuvörderst nach den allgemeinen Regeln von der Umänderung der Gleichungen, wobey alle vorkommende Größen nicht absolute sondern positiv betrachtet werden, folgendergestalt

$$c = C\,(1 \pm \sqrt{\frac{P}{p}})$$

entwickelte. In der Natur sind nemlich alle hier befindliche Größen absolute, und folglich $\sqrt{\frac{P}{p}}$ nicht, sowohl positiv und negativ, sondern ebenfalls absolut; also lediglich

$$c = C\,(1 - \sqrt{\frac{P}{p}})$$

Ob es bey dem beschriebenen Gange oft nöthig sey, daß die gefundenen Wahrheiten durch künstliche Versuche

sinn-

sinnlich gemacht werden? zweifele ich; Gewißheit, volle Ueberzeugung davon, findet sicher ohne dergleichen statt. Aber die Aufsuchung bestätigender einzelner Fälle in der wirklichen Welt bleibt noch übrig. Daß zwey conspirirende Kräfte einen Körper durch einen zwischen den Richtungslinien dieser beyden Kräfte liegenden Weg treiben, davon lassen sich, insbesondere, wenn man den Widerstand als eine Kraft sich vorzustellen gelernt hat, tausend Fälle in Körpern auffinden, die unter einem Winkel auf einen andern Körper stoßen; aber genau kann man die theoretischen Sätze, welche man gefunden hat, in der Natur nicht wahrnehmen, weil da eine Menge anderer Umstände mit in Anschlag kommen, die bey der Theorie aus der Acht gelassen werden: von den übrigen Sätzen aber sucht man bey den meisten vergeblich nach bestätigenden Fällen in der wirklichen Welt. So unangenehm dieses auf der einen Seite zu seyn scheint, so nützlich ist es auf der andern; denn man wird hierdurch auf den Unterschied geführt, daß einige von den gefundenen Sätzen an und für sich, andere aber nur als Hülfssätze bey fernern Untersuchungen brauchbar sind. Und nun nehme man an, daß jemand auf diese Art das Parallelogramm der Kräfte kennen gelernt habe; mit welcher Leichtigkeit wird er da, wo es nöthig ist, zwey Kräfte in eine, und eine in zwey verwandeln? wie leicht diese Zusammensetzung und Zertheilung, so bald es erforderlich ist, weiter treiben? Wird es nöthig seyn, bey der Untersuchung der schiefen

Fläche,

Fläche, was für einer von den da möglichen Fällen auch angenommen werden soll, ihn noch weitläuftig, nicht zu unterrichten, sondern nur zu leiten? Und wie ist er auf diese Art zugleich gegen den Wahn gesichert, daß er mit der erworbenen, angewandten zwar, aber doch noch nur theoretischen, Kenntniß im Stande sey, jeden einzelnen in der Natur wirklichen Fall ganz zu beurtheilen? Aber zugleich bestätigt dieses Beyspiel, und zwar, weil es leicht ist, desto mehr, wie nothwendig es sey, zur angewandten Mathematik eine vollständige Kenntniß und Fertigkeit in der reinen Mathematik mitzubringen. Bey den Anfänger-Einsichten, womit die meisten sich an diese Wissenschaft wagen, ist ein solcher Weg nicht möglich; aber es ist dabey auch überhaupt und schlechterdings wahre Kenntniß unmöglich; und noch weniger kann die Erlernung der angewandten Mathematik mit Vergnügen verbunden seyn. Um ein schon gebrauchtes Gleichniß auch hier anzuwenden, so verlangt niemand von einem Kinde, welches seinen ersten Cursus durch das A B C gemacht hat, daß es sogleich wichtige Bücher mit Verstande, und zur Erwerbung der daraus nützlichen Kenntnisse, solle lesen können. Die mathematischen A B C-Schützen aber schämen sich nicht, Prätensionen an ihre Lehrer zu machen, als wenn das etwas sehr leichtes wäre; und diese lassen sich, zum Beweise, daß das Studium der Mathematik im höchsten Grade bereitwillig mache, jedem nach Verlangen zu willfahren, auch nicht

selten

selten zu ihren Forderungen herab: oder vielmehr, sie sind zu wenig argwöhnisch, als daß sie sich einen solchen Grad von Unwissenheit bey denen, die den Unterricht in der angewandten Mathematik genießen wollen, vorstellen könnten, und sehen daher ihre Schüler mit zu gütigen Augen an, und bleiben in diesem Irrthume, weil es ihnen meistens an Gelegenheit fehlt, die Lücken in den so nothwendigen Vorerkenntnissen bey ihren Schülern wahrzunehmen.

Dieses vorausgesetzt, so scheint es mir eine sehr schädliche Lücke in den Anweisungen zur angewandten Mathematik zu seyn, daß darin nicht der Anfang mit einer ausführlichen Abhandlung über die Art und Weise gemacht wird, die Wahrheiten der reinen Größenlehre zur Erfindung der Sätze ihres angewandten Theils auf die beste und leichteste Art zu gebrauchen. Der erste Abschnitt dieser Abhandlung müßte, außer einer fruchtbaren Betrachtung der Natur und des großen Umfangs der Wissenschaften, die zusammengenommen, die angewandte Mathematik ausmachen, im Allgemeinen, vorzüglich die wichtige Lehre, auf unwiderlegliche Beweise gegründet, und durch zweckmäßige Beyspiele, in erforderlicher Menge und Mannigfaltigkeit, anschaulich und kräftig gemacht, enthalten: daß man ohne eine gründliche und vollständige Kenntniß alles dessen, was jedesmal aus der ganzen reinen Mathematik vorausgesetzt wird, besser thue, die angewandte gar nicht zu treiben, als das so schon schwere Uebel der statt findenden Lücken, in den reinen mathematischen Kenntnissen noch durch einen Wust verworrener Anwendungen unvollkommner Theorien zu vergrößern. Um Misdeutungen zuvor zu kommen, setze ich hier hinzu, daß aus dieser Behauptung nicht fließt, man müsse gar keine angewandte Mathematik lernen, bevor man nicht das Gefilde der reinen, in seinem ganzen unermeßlichen Umfange, gleichsam als ein Eigenthum an sich gebracht habe; denn dieses hieße, eben wegen dieses unermeßlichen Umfangs, gerade so viel, als: man solle die ganze angewandte Mathematik abschaffen, und bloß die reine zurück lassen. Nicht alle Untersuchungen der angewandten Mathematik erfordern gleich viel Vorerkenntnisse aus der reinen. Man wende also an, so früh man will, nur fordere man von der Mathematik nie, daß sie etwas solle anwenden lehren, was selbst noch nicht da ist. Und wenn man der Lehren der angewandten Mathematik, es sey zu seinem Vergnügen, oder zu Geschäften, bedarf, und zu träge entweder oder der Gelegenheit beraubt ist, sich das zu erwerben, was zum vollen Verständniß derselben nothwendig ist: so borge man dieselben von den Besitzern dieser Schätze, und vergesse nur nicht, daß man mit erborgtem Gute nicht so schalten und walten dürfe, als mit dem eigenen, und noch weniger sehe man, wenn man in fremden Kleinodien pranget, mit Verachtung auf die-

jenigen

jenigen herab, denen dieselben ihr Daseyn und ihren Glanz verdanken, oder welche sie wenigstens als Eigenthum besitzen, ohne damit glänzen zu wollen. Zum andern müßten darin diejenigen Dinge in der Natur, welche ein Gegenstand der angewandten Mathematik werden können, nach ihren Classen, Ordnungen, Geschlechten und Arten aufgestellt, und die Ursachen hinzugefügt werden, warum sie hieher gehören. Dann müßte eine allgemeine, aber durch zweckmäßige Beyspiele ins gehörige Licht gesetzte, Anweisung folgen, wie man zu einem der Construktion fähigen Begriffe von diesen Gegenständen gelange, der von der Beschaffenheit der Begriffe in der reinen Mathematik so wenig als möglich sich entfernte; und zugleich, wie man, wenn derselbe nicht vom Anfang an die erforderliche Vollständigkeit und Genauigkeit bekömmt, die begangenen Fehler hinterher entdecken und verbessern könne. Eine Anleitung, die gefundenen Begriffe zu construiren, könnte den Beschluß machen. Drittens müßte gezeigt werden, wie man aus der Natur des jedesmaligen Gegenstandes zum voraus zu beurtheilen im Stande sey, welche Oerter aus der reinen Mathematik vor andern mit Vortheil benutzt werden könnten; wie die Fertigkeit im Uebersetzen der arithmetischen und geometrischen Ausdrücke in die Sprache des Lebens erworben werde; und vorzüglich, auf was für einem Wege man zu dem Talente gelange, ohne Beyhülfe sinnlicher Versuche die entdeckten Wahrheiten in voller

Klarheit und Gewißheit anzuschauen. Endlich müßte viertens eine Sammlung von Regeln mitgetheilt werden, durch deren Befolgung man in den Stand gesetzt würde, unter den gefundenen Sätzen, die bloß in symbolischen Zeichen gedenkbaren von den reellen, und, unter diesen, die ohne sinnliche Erläuterung ganz verständlichen und gewissen, von den dergleichen bedürfenden, so wie auch die an und für sich brauchbaren von denen, die unmittelbarer Weise materiellen Nutzen gewähren, sicher und leicht zu unterscheiden.

Diese Abhandlung kann übrigens, obgleich sonst die Theorie erst auf die Kunst zu folgen pflegt, mit Recht zwischen der reinen und angewandten Mathematik, oder im Anfange der letztern, ihren Platz erhalten. Der Einwurf, daß darin für denjenigen, der noch weiter nichts, als reine Mathematik gelernt habe, viel, nicht durchaus verständliches, vorkommen werde, ist ganz ungegründet. Denn einmal hat dieser in der reinen Mathematik schon oft genug das Allgemeinere auf die zunächst unter demselben begriffene Gattungen herabführen müssen, um jetzt, da er dieses Geschäfte zur Hauptsache machen soll, eine allgemeine Anleitung dazu zu verstehen; und was das übrige, ihm noch neue, betrifft, so ist solches von der Art, daß ohne eine allgemeine Anleitung dazu die Gewißheit und Vollkommenheit nicht erhalten werden

kann,

kann, die doch auch in der angewandten Mathematik nicht fehlen darf. Die zur Erläuterung nöthigen Beyspiele ferner können, der erforderlichen Menge und Mannigfaltigkeit unbeschadet, insgesammt so gewählt werden, daß auch daher keine Schwierigkeit entsteht; ja man kann daraus den gelegentlichen, aber deswegen nicht weniger erheblichen, Nutzen ziehen, daß man dadurch zum voraus in dem weitläuftigen Gefilde, welches durchwandert werden soll, einzelne Stellen bekannt macht, die, auf diese Art behandelt, entweder ein sonst nicht mögliches größeres Interesse bekommen, oder künftig gleichsam zu Ruheplätzen dienen können.

Wie durch eine solche Anleitung, wenn sie in der gehörigen Zweckmäßigkeit und Vollständigkeit gegeben würde, das Studium der angewandten Mathematik ohne Schaden der Gründlichkeit erleichtert, und ohne Nachtheil des Umfangs der Kenntnisse in weit kürzerer Zeit möglich gemacht werden könne; darüber will ich hier nichts sagen, weil es nach einigem Nachdenken von selbst in die Augen fällt. Aber das scheint mir merkwürdig zu seyn, daß die angewandte Mathematik häufig bey ihrer Erlernung nicht durch das hinreißende Vergnügen belohnt, durch welches sich die reine so leicht die eifrigsten Anhänger erwirbt. Sollte dieses nicht daher rühren, daß darin theils vieles vorkommt, was im Grunde nichts als bloße reine Mathematik ist, theils öfters weiter gegangen wird, als es die Grenzen der angewandten Mathematik erlauben? So oft dies letztere geschieht, ist Unvollständigkeit in der Auseinandersetzung unvermeidlich; und auf diese Art wäre es sehr natürlich, daß auf der einen Seite der Zwang, zu treiben was man nicht mehr verlangt, und auf der andern Seite die Vermissung dessen, was man eigentlich wünscht, die Seele in eine Art von Unlust versetzte. Auch das könnte mitwirken, daß man da förmlichen Unterricht sich gefallen lassen muß, wo meistentheils bloße Winke hinlänglich wären, und sich noch leiten lassen soll, wo man die Kraft fühlt, allein zu gehen. Daß öfters die Lehren, welche angewandt werden sollen, erst unmittelbar vor der Anwendung vorgetragen werden, ist vollends der Natur der Sache ganz zuwider; denn um anwenden zu können, muß man das anzuwendende in völliger Gewalt haben, und wie kann das bey dem erwähnten Verfahren in dem gegenwärtigen Falle statt finden?

Ich zweifele, daß es nöthig sey, nach diesem noch durch einzelne Beyspiele zu zeigen, daß unsere meisten Lehrbücher ber angewandten Mathematik theils zu viel, theils zu wenig in sich enthalten. Insbesondere wird man dadurch, wenn man gleich aus ihnen, denn wer könnte dies verkennen? eine Menge der wichtigsten Kenntnisse zu schöpfen im Stande ist, nicht genug vorbereitet, das Unvollstandige zu ergänzen, das nicht genug Entwickelte

wickelte weiter auszuführen, und Versuche zu machen, die noch ganz unbebauten Gegenden zu bearbeiten; und wie oft kömmt man nicht gleichwohl in den Fall, wo solches unentbehrlich wird. Uebrigens rede ich nicht von solchen Lehrbüchern, welche vorzüglich geschrieben sind, den ersten Unterricht in der angewandten Mathematik darüber zu ertheilen. Denn bey den geringen Vorerkenntnissen, welche gewöhnlich zu dieser Wissenschaft, oder vielmehr Sammlung von Wissenschaften mitgebracht werden, und bey der Kürze der Zeit, die man dem Lehrer zu diesem Unterrichte verstattet, sind denen, die sie schreiben, die Hände auf mehr als eine Art gebunden. Was ich sonst noch über die angewandte Mathematik zu sagen habe, sehe ich mich genöthiget, dem folgenden Absatze einzuverleiben.

E. Von den Unvollkommenheiten der praktischen Mathematik.

Der Praktiker beschäftigt sich mit einzelnen wirklichen Fällen, und ist dadurch von dem Gelehrten, der es mit dem Allgemeinen und Denkbaren, obgleich Reellen, zu thun hat, unterschieden. Des gelehrten oder vollkommenen Praktikers Kunst besteht in der Fertigkeit, allgemeine Kenntnisse und Regeln zur deutlichen und vollständigen Erkennung und richtigen Behandlung des Einzelnen zu gebrauchen. Dies sind die Grundsätze, auf welche ich in der folgenden Betrachtung meine Behauptungen bauen werde.

Der gelehrte Praktiker, und dieser soll von jetzt an schlechtweg Praktiker heißen, wendet also allgemeine Kenntnisse und Regeln auf einzelne wirkliche Fälle an. Er muß daher vor allen Dingen diese Kenntnisse und Regeln deutlich, gewiß, und fertig begriffen haben; auf jedem Wink müssen sie ihm, so zu sagen, zu Gebote stehen. Auch muß seinen allgemeinen Vorstellungen die Eigenschaft der Realität im möglich höchsten Grade zukommen, und es helfen ihm also die Kenntnisse, die er sich aus den sogenannten reinen Wissenschaften erworben hat, unmittelbar, nichts. In Ansehung der einzelnen Gegenstände aber, auf welche er seine Theorien anwenden will, muß er die Fertigkeit besitzen, sich dieselben von allen Seiten, sowohl einzeln als in Verbindung genommen, deutlich vorzustellen, und dann diese individuellen Vorstellungen ins Allgemeine zu führen, um sie den theoretischen, durch welche sie vervollkommnet werden sollen, ähnlich zu machen. Sind diese Erfordernisse da, so ist es, so oft ihm ein einzelner Fall gegeben wird, leicht, die theoretischen Kenntnisse aufzufinden, welche dabey angewandt werden müssen; und werden nun dieselben gebraucht, einmal als Winke, die zu demjenigen bey dem vorseyenden einzelnen Falle hinweisen sollen, wovon, zum völlig zweckmäßigen, richtigen und gewissen

Verfahren, eine genaue und vollständige sinnliche, auf Erfahrungen und Versuche sich gründende, Kenntniß nöthig ist; und zweytens als Quellen der Regeln, nach welchen man sich bey der Benutzung dieser sinnlichen Kenntnisse zu richten hat: so ist alles da, was von der Kunst erwartet werden kann, das Uebrige muß durch Uebung erworben werden, wahre Anleitungen zur Praktik können und müssen darüber nichts weiter als Winke enthalten.

Ich kann mir daher wohl einen, für eine Menge von Geschäften des bürgerlichen Lebens, geschickten, aber keinen vollkommenen mathematischen Praktiker, der jenen weit hinter sich zurücklassen würde, gedenken, ohne ihm eine sehr ausgebreitete, gründliche, und ausführliche Kenntniß, nicht nur in allen Theilen der reinen, sondern auch in allen Wissenschaften der angewandten Mathematik beyzulegen. Die angewandte Mathematik in ihrem ganzen Umfange ist ihm unmittelbar, die reine aber nur in so fern nützlich, als ohne sie die Kenntniß der angewandten nicht möglich ist. Auf der andern Seite kenne ich nichts unschicklicheres, als wenn ein bloßer Theoretiker, wirklich praktische Fälle, zu behandeln unternimmt; das ist ein D'Aubignac, der ein vollkommen regelmässiges aber auch vollkommen elendes Schauspiel verfertiget. Schnelligkeit im Blicke und Gange ist eine Haupteigenschaft des Praktikers, aber die langsame Theorie allein kann

 sie

sie nicht gewähren. Wer die Theorie um der Praxis willen lernt, muß früh und ununterbrochen gewöhnt werden, dieselbe so weit fortzuführen, daß er die bey einzelnen wirklichen Fällen brauchbaren Sätze, in einzelnen und leichten abstrakten Fällen mit voller Deutlichkeit und Gewißheit wahrnehmen kann. Man mache mir nicht den Vorwurf, als ob ich nach übertriebenen Behauptungen haschte. Bey der Ueberzeugung, daß die hier mitgetheilten Gedanken, bey aller dabey angewandten Sorgfalt, eine Menge von Unvollkommenheiten behalten würden, habe ich mir wenigstens das zum Gesetz gemacht, nichts zu sagen oder zu fordern, was ich nicht, im erforderlichen Falle, durch eine nicht unbeträchtliche Anzahl darüber gemachter Versuche zu bestätigen im Stande wäre. Die zuletzt gethane Forderung scheint mir um so nothwendiger und unerläßlicher, weil, wenn sie befriedigt ist, fast nichts weiter dem vorsätzlichen Streben übrig bleibt, als: die Fertigkeit, sich die vorkommenden praktischen Aufgaben nach ihrem ganzen Umfange zu denken, die gegebenen und gesuchten Dinge so deutlich als möglich vorzustellen, und dann alles ins Allgemeine zu führen. Damit ist freylich noch nicht alles geschehen; allein so bald diese Bedingung erfüllt ist, so sind auch die Kenntnisse vorhanden, die zu dem noch übrigen zwingen, und zum rechten Benehmen dabey leiten. Auf diese Art wird zur Bildung eines Praktikers von dem, der ihn bilden soll, nichts verlangt, was nicht in seiner Gewalt stände;

aber

aber weder er kann dabey den Stolz, noch sein Schüler den Wahn hegen, daß die Schule die beabsichtete Vollkommenheit ganz zu geben im Stande sey. Wer hiernach gebildet ist, wird es fühlen, daß er nur vorbereitet sey. Es ist ihm ein in der Ferne glänzendes Ziel gezeigt worden, man hat ihm den Weg bekannt gemacht, der dazu führt, er hat die Kraft erhalten, diesen Weg mit Sicherheit anzutreten. Tritt er die Reise wirklich an, so setzt jeder Schritt, den er gethan hat, ihn in den Stand, den folgenden mit eben der Leichtigkeit zu thun; und so nähert er sich immer mehr dem gewünschten Ziele der gänzlichen Vollkommenheit, je weiter er fortgeht, so wie überhaupt wir Menschen uns dem Vollkommnen nähern können. Was für ein Vortheil ist hierbey nicht allein schon der, daß man sich auf diese Art nie für vollkommen halten kann; daß man fühlt, daß und wie man seine Kenntnisse und Geschicklichkeiten immer mehr und mehr zu vergrößern habe!

Daraus, daß der Praktiker allgemeine Kenntnisse auf einzelne wirkliche Fälle anwendet, und daß er dazu eine Fertigkeit besitzen muß, sich diese wirklichen Fälle von allen Seiten, sowohl einzeln als in Verbindung genommen, deutlich vorzustellen, und seine Vorstellungen ins Allgemeine zu führen, folgt aber auch für den mathematischen Praktiker die Nothwendigkeit einer Menge von Kenntnissen, die nicht aus der Mathematik, sondern aus den übrigen Wissenschaften genommen werden müssen. Was für eine Menge physischer, geographischer, ökonomischer, technologischer und anderer Kenntnisse wird z. B. zu einem vollkommenen praktischen Geometer erfordert? Was ist ein Architekt, der weiter nichts als Mathematik gelernt hat? Es ist zu viel, von Einem Manne die ganze Bildung des mathematischen Praktikers zu fordern; zu viel, aus einem Buche alle zur praktischen Mathematik, oder auch nur zu einem Theile derselben, nöthige Kenntnisse nehmen zu wollen. Daß angezeigt werde, was außer der Mathematik erforderlich ist, daß die Quellen nachgewiesen werden, woraus man schöpfen kann, daß an Beyspielen die Art und Weise bekannt gemacht werde, theils diese Quellen, theils das aus ihnen geschöpfte gehörig zu gebrauchen, ist vielleicht alles, was geschehen kann; aber nothwendig ist es, und zugleich läßt sich behaupten, daß die mathematischen Kenntnisse dabey Hauptsache und Grund sind.

Vielleicht könnte ich es hierbey bewenden lassen, da, wenn gezeigt worden ist, was seyn sollte, leicht beurtheilt werden kann, was fehlt. Allein wenn Fridrich der Einzige, in einem seiner Briefe an Herrn D'Alembert, von der Mathematik sagt: Ces hautes sciences ne deviennent utiles à la societé qu'autant qu'on les applique à l'astronomie à la mécanique & à l'hydrostatique; d'ailleurs elles ne sont qu'un luxe de l'esprit: und wenn, nach der Wahrheit zu urtheilen, aller reelle Werth jeder Wissenschaft, nach der Größe und Wichtigkeit des Einflusses bestimmt werden muß, den sie, unmittelbar oder mittelbarer Weise auf die Entdeckung, Erweiterung, Veredlung und Benutzung der Quellen allgemein erreichbarer, und nicht auf Verwöhnung und Einbildung beruhender, Glückseligkeit hat: so wird der Gegenstand, von welchem ich jetzt rede, vielleicht der wichtigste von allen, und ich darf mich noch nicht von ihm entfernen. Wollte jemand, insbesondere dem letzten von den angeführten Gründen, die ihm beygelegte Stärke ableugnen, so würde ich fragen: Warum wir die Aufgaben, die Herr Kant *) als die unvermeidlichen Aufgaben der reinen Vernunft betrachtet, Gott, Freyheit und Unsterblichkeit, gerade als Aufgaben der reinen Vernunft, der Wichtigkeit nach, für weit vorzüglicher, und ihre Endabsicht für viel erhabener halten, als alles, was der Verstand im Felde der Erfahrungen lernen kann, und dabey, sogar auf die Gefahr zu irren, eher alles wagen, als daß wir so angelegene Untersuchungen aus irgend einem Grunde der Bedenklichkeit, oder aus Geringschätzung und Gleichgültigkeit aufgeben sollten? Es sey bey deutlichen oder nur bey dunklen Vorstellungen, so ist entweder das die Ursache, weil eine apodiktische Auflösung jener Aufgaben uns den Genuß der Kräfte, welche

wir

*) In der Critik der Vernunft, 2te Aufl. S. 4. 5.

wir haben, und der Güter, die in der Natur um uns herliegen, gleichsam auf ewig sichern würde; oder es bleibt die aufgeworfene Frage ein Räthsel. Bey dem Gefühle, nicht nur unserer Kräfte selbst, sondern auch ihres verstärkten Wachsthums bey jedem Gebrauche, würde die apodiktische Auflösung jener Aufgaben alles enthalten, was der Glückliche, um sein Glück ganz zu genießen, und der Leidende, um bey der Empfindung der Macht unbezweifelter und ewiger Hoffnung sein Leiden zu vergessen, brauchten; stürzte auch der Himmel ein, er könnte uns unerschrocken treffen. Ich setze es also als ausgemacht voraus, daß auch die Mathematik erst durch die davon in den Geschäften des Lebens mögliche Anwendung ihre volle Wichtigkeit und ganzen Werth bekomme, und fahre fort.

Wenn die angewandte und praktische Mathematik auf die Art erklärt werden, wie es in dem Vorhergehenden von mir geschehen ist, so sind beyde aufs genaueste von einander abgesondert, und es kann nirgends schwer seyn, zu entscheiden, ob eine Aufgabe oder ein Lehrsatz zu der einen oder zu der andern Wissenschaft gehöre. Ueberhaupt genommen, läßt sich auch wider die gedachten Erklärungen, da sie außerdem die erforderliche Leichtigkeit haben, nichts einwenden; und es frägt sich nur, ob es nöthig sey, die angewandte und praktische Mathematik so sorgfältig von einander zu trennen? Ich will ein

ein Paar leichte Beyspiele anführen, um darauf das weiter nöthige zu gründen. Die Aufgabe: Aus der gegebenen Lage dreyer Gegenstände, die Lage eines Standpunktes zu finden, woselbst die Winkel gemessen werden, welche die drey Linien einschließen, so von diesem Standpunkte nach den drey Gegenständen gezogen werden können; ist für die praktische Feldmeßkunst von großer Wichtigkeit, weil man dadurch in den Stand gesetzt wird, ganze Landschaften mit vieler Bequemlichkeit in den Grund zu legen. Man findet daher dieselbe auch, und zwar mit diesem Urtheile, in des Herrn Geheimen Ober-Bau-Rath Schulze kurzen Anleitung zur ebenen Dreyeckmeßkunst, besonders für diejenigen, so diese Wissenschaft nur auf die Feldmeßkunst, Krieges- und bürgerliche Baukunst anwenden wollen. Allein wenn nun die Lage des gedachten Standpunkts nicht weiter als durch zwey sich schneidende Kreise bestimmen gelehrt wird; bleibt dann diese Aufgabe für den Feldmesser wichtig? Da man dadurch in den Stand gesetzt werden soll, ganze Landschaften mit Bequemlichkeit in den Grund zu legen; so wollen wir annehmen, daß ein Feldmesser, im Vertrauen auf diese Versicherung, mehrere Winkel gemessen habe, und darnach zu drey schon verzeichneten Punkten eben so viel andere Punkte verzeichnen wolle. Wie leicht kann es sich zutragen, daß die beyden Kreise, die sich theils in dem mittelsten von den drey verzeichneten Punkten, theils in dem aus den gemessenen Winkeln zu verzeichzeichnenden Punkte schneiden sollen, entweder einander in dem letzten Punkte, so zu sagen, osculiren, oder gar zusammenfallen. Wenn das erste geschieht, so lernt man den Ort, den der zu verzeichnende Punkt bekommen muß, nicht genau finden; und ereignet sich das letzte, so ist man vollends im Bloßen. Und da bey der Aufnahme ganzer Landschaften, die nach dieser Aufgabe zu verzeichnenden Punkte, sobald man sie gefunden hat, als Data bey den folgenden gebraucht werden müssen, so ist man bey aller Wichtigkeit, welche diese Aufgabe, ausführlich aufgelöset, wirklich hat, doch in Gefahr, auch wenn die von Herrn Schulze berührten unmöglichen Fälle nicht eintreten, entweder einen sehr fehlerhaften Entwurf zu machen, oder alle vorgenommene Messungen vereitelt zu sehen. Dieses findet um so mehr statt, je früher der eine oder der andere von den gedachten Fällen sich ereignet. Um das Fehlende zu ergänzen, darf man sich nur an den Satz erinnern, daß jede zwey Kreise, die sich schneiden, eine gemeinschaftliche Sehne zwischen den Durchschnittspunkten haben, und daß diese Sehne auf der geraden Linie, welche beyder Mittelpunkte mit einander verknüpft, senkrecht stehe, und von ihr in zwey gleiche Theile getheilt werde. Sobald nemlich, wenn die aus den gemessenen Winkeln gefundenen Kreise nicht zusammenfallen, die Mittelpunkte derselben verzeichnet sind, braucht man nur aus dem mittelsten der gegebenen drey Punkte auf die gerade Linie zwischen die-

sen

sen Mittelpunkten eine senkrechte Linie herabzufällen, und diese um sich selbst zu verlängern. Fallen aber die gedachten Mittelpunkte zusammen, so bekommt man anstatt der die Mittelpunkte verknüpfenden Linie einen einzigen Punkt, und dadurch wird alles noch einfacher. Hiezu füge ich aus einem von einem Praktiker für Praktiker geschriebenen Buche folgende Beyspiele. Wenn man die Geschwindigkeit eines von einer gegebenen Höhe herabfallenden Körpers ausrechnen will, so muß man diese allgemein bekannte und angenommene Höhe und die derselben zukommende Geschwindigkeit zum Grunde nehmen, und folgendermaßen schließen: Wie sich verhält die bekannte Höhe 15 Fuß zu der gegebenen Höhe $= X$, so verhält sich das Quadrat von 30 Fuß $= 900$ Fuß zu dem Quadrate der gegebenen Höhe $= X^2$. Aus diesem Quadrate wird nun die Wurzel ausgezogen, so zeiget diese die gesuchte Geschwindigkeit. Hiezu kann man sich um der Kürze willen folgender algebraischen Formel bedienen. Als es sey H die allgemein bekannte Höhe $= 15'$. R der Raum der allgemein bekannten Höhe $= 30'$. h die gegebene Höhe, z. B. $= 6'$, und X die zu findende Geschwindigkeit.

$\frac{hR^2}{H} = X^2$, und also die Wurzel aus $\frac{hR^2}{H} = X$.

Wenn man aber aus der Geschwindigkeit die Höhe des Gefälles oder der Wassersäule finden will, welche die Geschwindigkeit hervorbringt, so muß man schließen: Wie

Wie sich verhält das Quadrat der Geschwindigkeit von der allgemein bekannten Höhe 30 = 900 zu dem Quadrate der bekannten Geschwindigkeit, so verhält sich auch die allgemein bekannte Höhe = 15′ zu der zu findenden. Hier kann man sich folgender algebraischen Formel bedienen, als: Es sey

H die allgemein bekannte Höhe = 15′

R der Raum der allgemein bekannten Höhe = 30′

r der Raum der gegebenen Geschwindigkeit, z. B. = 19′

X die verlangte Höhe

$$\frac{Hr^2}{R^2} = X.$$

Um von der Undeutlichkeit und Unbestimmtheit der wörtlichen Ausdrücke nichts zu sagen, so sind hier Fehler auf Fehler wider die Methode gehäuft. H und R z. B. sind ganz einzelne, völlig bestimmte Zahlen, und der Gebrauch dieser Buchstaben ist daher ein Verstoß wider die ersten Regeln der algebraischen Bezeichnung. Man setze den Raum, durch welchen ein Körper gefallen ist, = S, und die Geschwindigkeit, welche er durch den Fall erhalten hat, = C: so ist

$$C = \sqrt{60.S} = 2\sqrt{15.S};\ \text{und}\ S = \frac{C^2}{60}$$

Diese Formeln sind, wenn Formeln gemerkt werden sollen, allemal leichter zu behalten und zu gebrauchen. Aber wenn sich ein Praktiker dergleichen Formeln für alle Fälle, die ihm in seiner Praxis aufstoßen können, merken

merken sollte, was für ein Gedächtniß müßte er haben. Oder soll er sich eine Sammlung von allen ihm etwa brauchbaren Formeln machen? Dergleichen Sammlungen sind freylich unentbehrlich, aber nur nicht für Regeln, wobey es möglich ist, sie jedesmal durch und in den Fällen, wo man sie braucht, selbst zu erkennen. Und um das Schwere der Sammlungen von Buchstaben-Formeln zu ganz verschiedenen Aufgaben nicht zu berühren, welches daher nothwendig statt finden muß, weil die Bedeutung der Buchstaben allemal besonders angezeigt werden muß; so kann der Praktiker die Geschicklichkeit, jeden Fall nach seiner Natur, und auf die jedesmal mögliche leichteste Art zu behandeln, durchaus nicht entbehren, aber auch dieselbe auf keine Weise besitzen, wenn er nicht bis zu dem oben beschriebenen Grade der Anschaulichkeit in seinen Kenntnissen gekommen ist. Darauf aber wird gewöhnlich, so wie auch hier, so wenig Rücksicht genommen, daß selbst die Deutlichkeit bey den Grundbegriffen vernachläßiget, und also noch weniger an die Herleitung der vorgetragenen Regeln aus denselben gedacht wird. Wenn ich daher zu diesen Beyspielen die große Menge derer hinzudenke, die wegen ähnlicher Beschaffenheit mit ihnen zu einer Classe gehören, und fast aus allen Anleitungen für Praktiker, sie mögen von Theoretikern oder von Praktikern geschrieben seyn, einige wenige ausgenommen, entlehnt werden können: so scheint es mir keinem Zweifel unterworfen zu seyn, daß von den Theoretikern den Praktikern gewöhnlicher Weise schlecht gerathen, und von den Praktikern die Theorie nicht aus dem rechten Gesichtspunkte angesehen und gebraucht werde. Dies wird auch dadurch bestätigt, weil so oft der Theoretiker den Praktiker und der Praktiker den Theoretiker geringschätzt, und jeder sein Gebiet als von dem Gebiete des andern gänzlich abgesondert betrachtet. Die Schuld davon fällt größtenheils den Theoretikern zur Last, und der Grund liegt am Ende darin, daß man die angewandte und praktische Mathematik nicht genau genug bestimmt hat, und oft das schon für Pratik hält, was im Grunde nichts weiter als bloße angewandte Mathematik ist.

Daß man die praktische Mathematik von der angewandten noch nicht sorgfältig genug unterschieden habe, läßt sich leicht beweisen. Schon das zeigts, daß man zwar Anleitungen zur praktischen Arithmetik und Geometrie hat, aber weder von angewandter Arithmetik, als einer besondern Wissenschaft, spricht, noch irgendwo den Beweis führt, daß die reine Geometrie allein häufig keinen angewandten Theil brauche, sondern ohne denselben sogleich auf einzelne Fälle herabgeführt werden könne. Auch wäre es sonst nicht möglich, daß über die Art und den Grad der Gewißheit, dessen die angewandte Mathematik fähig ist, als über eine problematische Sache, gestritten würde; und daß man die Stufe der Wahrscheinlichkeit, über welche hinaus in

der

praktischen Mathematik freylich nie aufgestiegen werden kann, ebenfalls als den höchsten in der angewandten Mathematik erreichbaren Gipfel betrachtete. Doch es wird der Mühe nicht unwerth seyn, diesen Gegenstand noch etwas gründlicher und ausführlicher zu behandeln.

Logische und metaphysische Wahrheit kommt der reinen Mathematik durchaus zu, aber das, was die Philosophen Realität nennen, deswegen noch nicht. Die Gegenstände derselben sind Geschöpfe unseres Geistes; daher die Gewalt, welche er über sie hat; was er von ihnen weiß, das hat er nach Denkgesetzen gefunden, die er als ewige und unveränderliche Gesetze erkennen muß; daher seine unerschütterliche Gewißheit; endlich schöpft er alles aus Construktionen durch Anschauung; daher der Grad der Deutlichkeit, über welchen wir keinen höhern kennen. Aber ob seinen Begriffen wirkliche Gegenstände in der Natur entsprechen, also, ob seinen Kenntnissen Realität zukomme? davon kann er nicht eher versichert seyn, als bis er die Dinge in der Natur betrachtet, sie von so manchen zufälligen Beschaffenheiten entkleidet, seine Begriffe davon ins Allgemeine geführt, und so dieselben seinen mathematischen Begriffen möglichst genähert hat. Ehe also die Lehren der reinen Mathematik auf wirkliche Dinge in der Natur angewendet werden dürfen, muß zuvor der Grad ihrer Realität aufs genaueste und richtigste bestimmt seyn; und wenn dieses

 gesche-

geschehen ist, so ist das nächste, aus der großen Menge derselben die reellen von den bloß logisch und metaphysisch wahren abzusondern, jene besonders zu sammlen, und so tief als möglich herab ins Specielle zu führen. Dieses ist das eigentliche Geschäfte der angewandten Mathematik, und es hat es demnach dieselbe zwar mit reellen Begriffen, aber doch immer nur noch mit Begriffen zu thun. Von ihr allein entsteht daher für die Geschäfte des Lebens kein Vortheil; dieser erwächst erst durch fernere Anwendung ihrer Sätze auf wirkliche Dinge. Und da bey dieser Anwendung die jedesmal brauchbaren Wahrheiten aus einer fast unübersehbaren Menge ausgewählt, nnd nach der Natur der gegebenen wirklichen Dinge weiter modificirt werden müssen; da ferner der Gebrauch der Mathematik bey der Untersuchung wirklicher Gegenstände nur das, was auf den Begriff der Größe zurückgeführt werden kann, ganz zu erkennen giebt, und zu einer vollkommenen praktischen Kenntniß noch so manche andere Eigenschaften zu erwägen sind: so ist zuletzt noch eine Wissenschaft nöthig, welche zu allem diesem Anleitung giebt, und das ist, mit einem Worte, die praktische Mathematik.

Angewandt werden auf diese Art die Lehren der reinen Mathematik, in der angewandten nicht nur, sondern auch in der praktischen Mathematik, aber in verschiedenen Stufen. In solchem Falle pflegt man auch

sonst,

sonst, wenn man nicht zählen will, für die erste Stufe die im gemeinen Leben übliche Benennung, beyzubehalten, und für die andere einen besondern Namen festzusetzen. Wider die gebrauchten Benennungen, ist also nichts einzuwenden. Aber auch den Einwurf lasse ich auf der Seite, daß es überflüssig sey, einen Unterschied zwischen der angewandten und praktischen Mathematik anzunehmen, da doch in beyden nichts weiter geschehe, als daß angewandt werde. Denn theils wird nicht in beyden einerley Sache angewandt, theils muß man kindische Einwendungen höchstens dann widerlegen, wenn sie von andern wirklich gemacht werden.

Nimmt man den beschriebenen Unterschied an, so ist die Frage: Ob auch in der angewandten Mathematik, Gewißheit, Deutlichkeit und Vollständigkeit möglich sey? leicht entschieden. Hypothetische Gewißheit hat sie im höchsten möglichen Grade, aber keine andere; Deutlichkeit kann darin so vollkommen statt finden, als in der reinen, denn diese rührt von dem Gebrauche der Construktionen her; und was die Vollständigkeit ihrer Lehren betrifft, so kann man dieselbe ebenfalls so weit treiben, als man will. Dagegen führt die praktische Mathematik nicht anders in Verbindung mit vielen andern Wissenschaften zu einer vollständigen Kenntniß ihrer Gegenstände, und erreicht nie Gewißheit, sondern nur den höchsten Grad der Wahrscheinlichkeit.

Um nun ganz einsehen zu lernen, wie sehr man diesen Unterschied vernachlässiget habe, darf man nur die meisten der sogenannten Anweisungen, sowohl zur praktischen Mathematik überhaupt, als zu einzelnen Theilen derselben, mit Rücksicht auf das Gesagte und prüfendem Nachdenken lesen. Die vorhin angeführten Beyspiele gehörten z. B., so wie sie behandelt worden sind, nicht in die praktische, sondern bloß in die angewandte Mathematik, und hätten selbst da weiter fortgeführt werden können. Daß aber aus dieser Vernachläßigung der größte Schaden entstehe, und daß die Quelle davon tief liege, verdient sehr eine wenigstens einigermaßen ausführlichere Betrachtung.

Die allgemeinsten und zugleich reinsten Lehren der Mathematik sind in der Arithmetik, worunter ich überhaupt die Lehre von den discreten Größen verstehe, enthalten, und eine der ersten Anwendungen, die man davon, noch innerhalb der Grenzen der reinen Mathematik, macht, findet in der algebraisch-analytischen Geometrie statt. Hätte man es sich vom Anfang an und allgemein bey den praktischen Anwendungen der reinen Mathematik zum Gesetze gemacht, sich vor allen Dingen von der Realität der anzuwendenden Lehren zu überzeugen, und die bloß logisch und methaphisisch wahren vor der Anwendung abzusondern: so würde man, bey jener Anwendung der Arithmetik, wohl schwerlich fähig gewesen

seyn,

seyn, eine unbedingte und unmittelbare Anwendbarkeit aller von den Zahlen gefundenen Behauptungen auf geometrische Gegenstände, als unzubezweifelnd, und daher auch, ohne darüber den mindesten Wink zu geben, vorauszusetzen. Dann würde man sich aber auch längst gezwungen gefühlt haben, die einseitigen Begriffe, von welchen man in der Arithmetik auszugehen pflegt, in allgemeinere zu verwandeln; man würde die nöthigen Forderungen und Grundsätze mit Deutlichkeit wahrgenommen, und nach ihrem ganzen Umfange erkannt haben; man würde die Irrthümer in den Sätzen, das Unvollständige in den Beweisen vermieden haben; kurz es würde längst der Grund zu allen den Vorwürfen weggefallen seyn, welche in der ersten Abtheilung angeführt worden sind. Uebrigens gebe ich das sehr gern zu, daß die Anwendbarkeit der von den absoluten Zahlen bewiesenen Sätze auf die deutlich ausgedruckten continuirlichen Größen so offenbar sey, daß sie von selbst in die Augen falle; denn auch die deutlich ausgedruckten continuirlichen Größen sind Zahlen, obgleich benannte. Allein man betrachtet in der Arithmetik nicht bloß die absoluten Zahlen, sondern auch die entgegengesetzten, und was die arithmetischen Behauptungen von diesen betrifft, so verhält es sich damit ganz anders. Daß man z. B. bey den Produkten und Dignitäten die Einheit allemal positiv annimmt, verursacht bey den unbenannten Zahlen keine Schwierigkeit, denn es ist dabey, wie solches in dem Folgenden noch besonders berührt werden wird, zwischen dem Positiven und Absoluten kein Unterschied; bey den continuirlichen Größen hingegen tritt dieser Unterschied wirklich ein, und es muß daher, aus der uneingeschränkten Anwendung auch derer Sätze, welche die positiven und negativen Zahlen betreffen, in der Geometrie nothwendiger Weise Verwickelung entspringen. Noch häufiger entsteht dergleichen, wenn man überall, wie bey den absoluten Zahlen, es für gleich hält, ob man eine Größe absolut betrachte, oder ihr das Zeichen + vorsetze, und sie als positiv ansehe; und doch ist dieses ein Verfahren, welches man sich ohne alle Einschränkung erlaubt. Daß ich aber das rechte Verfahren bey der Anwendung der Buchstabenrechnung und Algebra auf die Geometrie auf die vorhergehende Art mit dem rechten Benehmen bey den speciellern Anwendungen der Mathematik verknüpfe, ist deswegen unstreitig nicht unnatürlich, weil wir doch gemeiniglich die wahren Wege bey dem Allgemeinern und mehr bloß Gedenkbaren erst bey dem weniger Allgemeinen und Sinnlichen lernen; wenigstens ist es nicht leicht, die weniger in die Augen fallenden Verschiedenheiten zu bemerken, so lange man gewohnt ist, die auffallenden zu übersehen.

Auf diese Art hat also die Vernachläßigung der genauen Bestimmung dessen, was zum Wesen jeder Anwendung gehört, schon in der reinen Mathematik sich gerächt, und man kann daher mit Grunde folgern, daß die

Sorg-

Sorglosigkeit in der Unterscheidung der angewandten und praktischen Mathematik, nicht minder nachtheiligen Einfluß gehabt haben werde. Daher rührt, wie schon gesagt, die ganze Geringschätzung, oft selbst Verachtung, welche die theoretische Mathematik von den Praktikern erfahren muß. Nicht genug, daß man sagt, sie helfe nichts, für besser halten es selbst viele, daß man die Theorie gar nicht erlerne. Weil nemlich so oft das, was man praktische Mathematik nennt, weiter nichts ist, als tiefer, wie gewöhnlich, ins Specielle herabgeführte angewandte Größenlehre, und man außerdem meistens sich damit begnügt, die Auflösung der Aufgaben allgemein gegeben zu haben, ohne die verschiedenen dabey möglichen Wege, davon der eine in diesem, der andere in jenem Falle den übrigen vorzuziehen ist, zugleich mit anzuzeigen: so setzen die ertheilten Vorschriften den Praktiker entweder noch nicht in den Stand, das Gesuchte, in wirklichen Fällen, genau und vollständig zu finden, oder er muß doch, wenn sie ja dazu hinreichen, öfters längere und mühsamere Wege einschlagen, als diejenigen kennen, welche bloß durch die Uebung gebildet sind. Dem Theoretiker steht die Zeit zu Gebote, und Anstrengung des Nachdenkens ist bey seinen Untersuchungen unentbehrliches Mittel zum Zwecke zu gelangen. Dem Praktiker ist die Zeit gleichsam zugemessen, sein Blick und sein Gang müssen schnell seyn. Wenn er Theorien und die Anwendung derselben lernt, darf er keine Anstrengung scheuen, aber bey dem

Gebrauche des Erlernten muß ihm alles, so zu sagen, mechanisch geläufig seyn. Wenn die Theorie auf die rechte Art, und in der gehörigen Vollständigkeit und Ausführlichkeit getrieben worden ist, kann sie außerordentlich dazu beytragen, diese Fertigkeit zu bilden. Verlangt ein Praktiker diesen Einfluß von flachen und halben theoretischen Kenntnissen, so thut er thörichte Forderungen; allein wenn die Theoretiker nicht so herablassend sind, sich ihm zu nähern, ihm freundschaftlich die Hand zu bieten, und ihn zu einer anschaulichen Erkenntniß der Vortheile zu leiten, welche er von der Theorie erhalten kann: so kann man es ihm auch nicht verargen, wenn er glaubt, daß ihre Schätze für ihn keinen Werth haben.

Ueberhaupt wäre es vielleicht das beste, wenn man das Gebiet der angewandten Mathematik, so weit es nach der obigen Erklärung irgend geschehen könnte, erweiterte, und den Anleitungen zur praktischen Anwendung der mathematischen Wissenschaften folgenden Inhalt und Umfang bestimmte. Zuvörderst müßten aus der Natur des jedesmaligen Gegenstandes und der dabey vorgesetzten Absicht, die Art, die Menge und der Grad der Vollkommenheit aller zur vollkommenen praktischen Behandlung desselben nöthigen wissenschaftlichen Kenntnisse aufgesucht, und entweder vollständig vorgetragen, oder besser in ihren eigentlichen Quellen nachgewiesen wer-

werden. Zum andern müßte eine Anleitung folgen, alle diese wissenschaftlichen Kenntnisse für jeden gegebenen wirklichen Fall zu individualisiren, und demselben genau anzupassen. Drittens könnte der Unterricht über die Art und Weise folgen, wie diese Kenntnisse nunmehr zur wirklichen Erreichung des beabsichteten Zwecks zu gebrauchen seyen. Endlich wäre zum Beschlusse auch noch erforderlich, sichere Methoden bekannt zu machen, nach welchen jedesmal die eingeschlagenen Wege geprüft, und im nöthigen Falle verbessert und ergänzt werden könnten.

Ein so wichtiger Gegenstand kann indeß nicht auf wenigen Blättern erschöpft werden, und ich fühle es aufs lebhafteste, wie leicht manches von dem Gesagten mißverstanden werden, und zu ganz falschen Folgerungen Anlaß geben kann. Allgemeine Beschreibungen können das Ganze umfassen, ohne gleichwohl anders, als nach einer ausführlichen Erläuterung durch einzelne Beyspiele den gewünschten Grad der Deutlichkeit und Verständlichkeit zu haben, und zu diesen Erläuterungeu fehlt es mir hier am Platze. Um so mehr muß ich meine Leser bitten, ihr Endurtheil wenigstens so lange auszusetzen, bis sie die Erläuterung, welche das gegenwärtige durch den folgenden zweyten Abschnitt erhalten kann, mit zu Hülfe genommen haben.

Dritte Abtheilung.

Von der Mathematik, in Ansehung ihres Einflusses auf die Erhöhung der Verstandeskräfte, und von dem Verhältnisse derselben zur Philosophie und den übrigen Wissenschaften.

1. Von der Mathematik, in Ansehung in Ansehung ihres Einflusses auf die Erhöhung der Verstandeskräfte.

Unbekannt ist dieser Einfluß nie gewesen, und die Alten betrachteten ihn auch als sehr wichtig. So läßt z. B. Plato im siebenten Buch seiner Republik den Socrates zum Glaucus sagen: Es scheint, du fürchtest, der Pöbel werde dir vorwerfen, daß du unnütze Wissenschaften in deinen Plan bringest. Die Wissenschaften, wovon wir reden, haben wohl noch einen andern wichtigen Nutzen, den nemlich, daß sie das Organ der Seele, das durch die übrigen Beschäftigungen des Lebens ausgelöscht und geblendet ist, wieder reinigen und beleben; ein Organ, dessen Erhaltung tausendmal wichtiger ist, als die Erhaltung der Augen des Leibes. Dieser Vorstellung wegen,

gen, und weil sie die Philosophie für eine zu schwere Wissenschaft ansahen, als daß der sinnliche Mensch unmittelbar dazu geführt werden dürfte, verlangten Pythagoras, Plato und ihre Nachfolger von denen, die sich der Philosophie widmen wollten, daß sie sich zuvor durch das Studium der Mathematik der Aufnahme unter ihre Schüler würdig machen sollten; und auch die neuern Platoniker blieben hierin den Grundsätzen der ältern treu. Aber sonderbar ist es, daß die wirkliche Anerkennung dieses Vortheils der mathematischen Wissenschaften und die Benutzung desselben, mit den Fortschritten, welche in der Mathematik selbst gemacht sind, fast in umgekehrten Verhältnisse stehen. Woher rührten sonst die Klagen und Vorwürfe, die man z. B. in folgenden Stellen findet.

Nemini obscurum esse potest, quantopere fallantur et fallant, tum qui nondum initiatos mathesi ad philosophiae sacra admittant; tum qui persuasi sunt, posse aliquem egregium philosophum evadere mathesi neglecta; quamquam iste juventutis error epidemicus prope videatur. G. J. Vossius, de scientiis mathematicis, cap. IV. §. 8.

Was den Nutzen des Studii mathematici anlangt, so wird desselbigen, so am meisten zu consideriren, und von der größten Wichtigkeit ist, von denen, so dieß Studium

für-

fürnemlich recommendiren, wenig oder gar nicht gedacht. Denn sehr wohl zu bemerken, daß das Studium mathematicum so groß nicht an sich selbst zu schätzen, (ob schon es seinen Nutzen zu Wasser und zu Lande, im Kriege und Frieden giebt), als der herrlichen Methode halber, deren sich die Mathematici bedienen, und warum es fürnemlich von allen, welche die Wahrheit ernstlich lieben, sollte fleißig erlernt werden. Denn weil der Verstand der Menschen auf alle Weise verderbt ist die Wahrheit zu erkennen, und solcher mit tausend Scrupeln und Finsternissen, oder tausend falschen Meynungen umgeben; was sollte besser seyn, solchen durch natürliche Mittel wiederum in rechten Stand zu setzen, als wenn einer erstlich viel Demonstrationen lieset, und wohl capiret, in welchen nichts anders, als klahre Wahrheiten, ohne Vermischung einiges Falschen enthalten, vorkommen? und wenn nichts anders in der Mathesi anzutreffen, so sollte nur dieß allein einen rechten Liebhaber der Wahrheit bewegen, solche zu erkennen, damit er bey sich selbst durch eigene Experienz erführe, ob es denn wahr, was alle Mathematici fürgeben, daß sie Wahrheiten, die so tief verborgen liegen, daß vielmahl in vielen Seculis die subtilsten Köpfe solche nicht zu entdecken vermocht, dennoch selbige so gewiß solche zu demonstriren vermögen, daß, wenn auch die ingenieusesten Leute von der Welt das Contrarium wollten soutenīren, sie einem, der ihre Demenstration assequirt, nicht den geringsten Scrupel

könn-

könnten excitiren. Aber es ist zweytens noch ein anderes bey ihrer Methode anzutreffen, nemlich, wie wir Leute, die im höchsten Grade contradiciren, vollkommen interne convinciren können, und also gleichsam Herren werden, über das menschliche Gemüth, und solches zwingen können, der Wahrheit Platz zu geben; wie alle Demonstrationes, da man der Adversariorum ihre Positiones selber als wahr annimmt, und solche ad Absurdum mit größester Evidenz bringt, klahr anzeigen. Drittens lernt man hiedurch auch durch sich selbst unfehlbare Wahrheiten nicht tentando, sondern durch richtige Wege zu erfinden, die niemals bekannt gewesen, und acquirirt hiedurch das unschätzbare und rare Talent viel und wohl zu meditiren, was auch die Sensus, die Imagination und unsere Passiones für impedimenta causiren; und also in Strepitu Mundi vollkommen attent zu seyn, welches das einzige Ohr ist, per vias naturales die Stimme der Wahrheit zu vernehmen. Gründliche Anleitung zu nützlichen Wissenschaften, absonderlich zu der Mathesi und Physica, vom Herrn von Tschirnhausen, S. 17.

Den Vorzug gestehen doch selbst billige Freunde der übrigen Wissenschaften der Mathematik zu, daß sie uns mit lauter sichern Wahrheiten beschäfftiget, da uns anderswo, eben so viel Scharfsinnigkeit und Fleiß, oft nur zu Muthmaßungen führen. Die ruhige Zufriedenheit, die der Mathematikverständige darin findet, daß er gewiß weiß, er denke richtig, ist der Natur einer menschlichen Seele, die zum Denken gemacht ist, ohne Zweifel gemäßer, als das Geräusche der Streitigkeiten, in dem andere Gelehrten ihre Ergötzung und ihre Nahrung finden. Die beyden Euclides werden uns, einer vom Pappus, der andere vom Diogenes Laertius beschrieben; jener als ein sanftmüthiger und friedliebender Geometer; dieser als ein hitziger und zänkischer Philosoph. Sollte sich hier nicht der Einfluß der Wissenschaften gezeigt haben, mit denen sich jeder beschäfftigte? Der Geist, der sein Vergnügen darin findet, Wahrheiten zu erkennen, und aus einander zu folgern, bildet sich dadurch einen Geschmack, dem auch außer der Mathematik nichts gefällt, wo er nicht Wahrheit, Zusammenhang und Vernunft antrifft. Denn auch da, wo keine geometrischen Beweise statt finden, läßt sich eine hypothetische Wahrheit, eine Uebereinstimmung des Folgenden mit dem Vorhergehenden, und eine Verbindung, die ein Ganzes macht, betrachten. — Dieser Geschmack an Wahrheit schränkt sich nicht nur auf Bücher ein, er erstreckt sich auch auf den Umgang und die Gespräche. — Zu unserer Väter Zeiten hat man sehr darüber gestritten, ob sich die mathematische Methode außer der Mathematik anbringen ließe. Von diesem so berühmten Zwiste erfährt jetzo nur die geringe Zahl der Studirenden etwas, die von ihrem unablässigen Fleiße in höhern Wissenschaften, auch noch Zeit übrig behält, die Ver-

nunft-

nunftlehre zu hören. — Die Gewohnheit, nicht anders, als deutlich, ordentlich und zusammenhängend zu denken, verstattet nicht, übereilte Urtheile von Sachen zu fällen, die wir nicht zulänglich untersucht haben. Behutsamkeit und Bescheidenheit sind also natürliche Folgen von ihr. Sie verhindert uns, einem Vortrage Beyfall zu geben, der uns nicht überführt, aber sie erlaubt uns nicht, etwas zu verwerfen, das auf Gründen beruhen kann, die wir nicht einsehen. So verwahrt sie uns vor Leichtgläubigkeit und vor ungerechtem Tadel, und befiehlt uns, dem Verstande und Fleiße Anderer auch alsdann Gerechtigkeit wiederfahren zu lassen, wenn er auf Gegenstände angewandt ist, mit denen wir uns selbst nicht beschäftiget haben. Vermischte Schriften von Abr. Gotth. Kästner, zweyter Theil, S. 336. 364. f.

Laut genug haben die Mathematiker den formellen Nutzen ihrer Wissenschaft gepriesen, und zur Ergreifung desselben, selbst durch unwiderleglichen Tadel, zu bewegen gesucht; aber was für Ohren haben sie geprediget? Wie groß ist von je her die Zahl der Philosophen, die den Weg zu ihrer Wissenschaft durch das Gebiet der Mathematik genommen haben, gegen die Menge derer gewesen, die bequemere und kürzere Pfade erwählten? Doch vielleicht mildert die Ursache dieser Erscheinung das harte Urtheil, was man, ohne sie, zu fällen geneigt seyn könnte. Als Lucians Charon vom Mercur begleitet, die Thorheiten und das ungereimte Verhalten der Menschen sah, und zuletzt das Mitleid, sonst den Unterirdischen unbekannt, sich seiner bemächtigte, unterdrückte Mercur dessen Vorsatz, die Sterblichen durch Entdeckung ihres Wahns von demselben zu heilen, durch die Vorstellung: daß der größte Theil mehr Wachs in den Ohren habe, als Ulysses seinen Gefährten darin stopfte, um sie gegen den Gesang der Syrenen zu verwahren, und daß für die wenigen unter ihnen, die kein Wachs in den Ohren hätten, und, durch eine natürliche Neigung zur Wahrheit, alle menschlichen Dinge sehr scharf und richtig ins Auge faßten, sein Zuruf überflüßig seyn würde. Vielleicht hat man es darin versehen, daß man mehr ans Zurufen als daran gedacht hat, die natürliche Neigung der Menschen zur Wahrheit, ehe dieselbe durch vorgefaßte Meinungen und Irthümer unterdrückt war, auf dem Wege der Uebung, dem einzigen, auf welchem Anlagen zu Fertigkeiten erhoben werden können, zu dem erforderlichen Grade der Stärke zu bilden. Die Mathematik ist eine Wissenschaft, welche der Mensch bey geübter Denkkraft aus sich selbst schöpfen kann; aber eben deswegen muß auch der, der ihren Einfluß auf den Geist, ganz bey und an sich empfinden will, sie, es sey nun unter Anleitung von andern oder nicht, aus sich selbst geschöpft haben. Und hat Herr Resewitz Recht, wenn er sagt*): „Werden die Geistes=

*) Im ersten Bande seiner Gedanken, Vorschläge und Wünsche,

Geisteskräfte in der Jugend nicht angeregt, so schlummern sie für immer: haben sie eine falsche Richtung bekommen, so bleibt sie gewiß lebenslang herrschend, so sehr man auch hinterher daran drehen und bessern will: ist das Herz gegen Güte und Wahrheit im Alter, da es noch weich war, verschlossen geblieben, wer will hernach wohl durch die eingerosteten Pforten hindurch dringen? man hat Recht, zu sagen, daß nur Gottes Geist, nur die Macht der Vorsehung in solche Situationen versetzen könne, daß es sich aufthun muß. Hat die Seele einmal eine Sinnesart, eine Gewohnheit, ein Principium in der Jugend angenommen, so ist das so innig in ihre Kraft und Thätigkeit verwebt worden, daß Gründe, Ermahnungen und Schlüsse in erwachsenen Jahren fast immer unvermögend dagegen werden erfunden werden." Sind, sage ich, diese Behauptungen gegründet, so muß außerdem mit dem Studium der Mathematik, auf diese Art getrieben, früh der Anfang gemacht werden. Aber wie viel sind unter denen, die sich den Wissenschaften widmen, und durch das Studium der Mathematik sich zur Erlernung derselben vorbereiten wollen, die mit dieser Vorbereitung schon in den Schulen einen ernstlichen Anfang machten? Wäre es übertrieben, wenn man behauptete, ein akademischer Lehrer der Mathematik verhalte sich gegen den größten Theil seiner Zuhörer, die

sche, zur Verbesserung der öffentlichen Erziehung, im ersten Stücke, S. 4 und 5.

diese Wissenschaft nicht zu ihrer Hauptbeschäftigung machen wollen, eben so, als ein Lehrer der Philologie gegen die seinigen, wenn sie bey nothdürftiger Kenntniß der Declinationen, Conjugationen und einigen auswendig gerlernten Vocabeln und Regeln von ihm verlangten, ihnen einen classischen Autor in Vorlesungen zu erklären? Aus solchen Hölzern wird auch der geschickteste Künstler nie Mercure schnitzen, und selbst ein Kästner, aus dessen Schule ein Klügel, Florencourt, Pfaff, und so viel andere große Mathematiker gekommen sind, wird unter seinen Schülern Geometer haben, denen ungereimte Mährchen eine langwierige Ergötzung geben können. Und wie wäre es Lehrern auf Akademien, ja wie selbst Lehrern in den obern Classen der Schulen und Gymnasien möglich, mit ihren Schülern in der Mathematik den nicht königlichen Weg zu gehen, der bey den ersten Elementen der einzige wahre ist? Herr Kästner behauptet an einem Orte, daß man die mathematische Methode schwerlich recht kennen lernen werde, wenn man nicht Euclides Elemente, und die Schriften solcher Männer, die ihnen getreu folgen, lese. Es läßt sich mit eben dem Rechte sagen, daß man schwerlich den wichtigsten Nutzen der Mathematik, die durch das Studium derselben mögliche Erhöhung und Veredlung der Fähigkeiten unserer Seele, an sich erfahren werde, wofern man nicht das, was Euclides in den ersten sechs Büchern seiner Elemente hat, nebst den Anfangsgründen der Buch-

staben-

stabenrechnung und Algebra, in seiner Seele selbst zu finden angeleitet, und dadurch in den Stand gesetzt worden ist, die in der Folge nothwendigen, vorzüglich auf das Materielle abzweckenden Unterweisungen in der Mathematik, ebenfalls zur Erreichung des formellen Nutzens zu gebrauchen. Geschähe dies auf Schulen, wie würde dadurch die Nutzbarkeit des Unterrichts der akademischen Lehrer vergrößert werden? wie würde die Anzahl derer zunehmen, die kein Wachs in den Ohren haben, und, durch eine natürliche Neigung zur Wahrheit, alle menschliche Dinge scharf und richtig ins Auge fassen? welchen Vortheil würde man von der Mathematik bey denen verspüren, die sich erst nach Durchwanderung ihres ganzen Gebiets in das Reich der Philosophie begäben? Und wenn man bedenkt, wie unvollkommen die Mathematik noch zu Pythagoras und Plato's Zeiten war, und dabey, wie richtig die Alten von dem formellen Nutzen dieser Wissenschaft geurtheilt, und selbst dazu gebraucht haben; kann es unbillig scheinen, zu verlangen, daß das meiste hierin in Schulen und Gymnasien geschehen müsse? Was außerdem über diesen Gegenstand zu sagen ist, behalte ich dem zweyten Abschnitte vor.

2. Von dem Verhältnisse der Mathematik zur Philosophie.

Das Studium der Mathematik ist nach dem Vorhergehenden zur Vorbereitung auf das Studium der

Philosophie, zwar nicht immer und am wenigsten immer auf die rechte Art benutzt, aber doch dazu häufig für dienlich, und von mehrern auch für nothwendig gehalten worden; allein meistens nur wegen der erhöhten Kraft, welche die Denkfähigkeiten dadurch erhalten können. Sollte dieses der einzige Nutzen seyn, den die Philosophie von der Mathematik zu erwarten hat? Wichtig genug wäre er, wenn es auch keinen andern gäbe; indeß vielleicht läßt sich bey fortgesetztem Forschen noch ein anderer nicht weniger wichtiger entdecken.

In der That hat es längst mehrere gegeben, welche von der Mathematik nicht bloß die zum Studium der Philosophie nöthige Stärke des Geistes, sondern auch die Mittel nehmen zu können glaubten, die außerdem erforderlich sind, um in der Philosophie, ja selbst in andern Wissenschaften, vollkommene Gewißheit und Deutlichkeit zu erreichen. Daß ihre Hoffnung unerfüllt geblieben ist, rührt vielleicht daher, weil sie theils nicht bedachten, daß auch das vortreflichste Werkzeug, bey verschiedenen Gegenständen gebraucht, auf verschiedene Art gehandhabet werden müsse, theils auch wohl über der Freude, das Werkzeug zu besitzen, das Streben nach der zu seiner Regierung nöthigen Kraft vergaßen. Doch das Urtheil des Herrn Kästners, im Anfange des schon vorhin angeführten Aufsatzes über den Gebrauch des mathematischen Geistes außer der Mathematik, ist zu tref-

fend,

fend, als daß ich dasselbe hier vorenthalten könnte: „Wenn man die Wahrheit gestehen soll, so scheinen der Bejahung der Frage; ob sich nemlich die mathematische Methode auch außer der Mathematik anbringen lasse? nicht alle davon gegebene Proben vortheilhaft: am allerwenigsten der Umstand, daß man Lehrbücher von unterschiedenen Glaubensbekenntnissen, und rechtliche Deductionen für entgegengesetzte Partheyen von beyden Seiten, in der strengen mathematischen Methode verfaßt hat — Soll aber auch die Wahrheit nicht nur halb gesagt werden, so muß man hinzusetzen, daß es zottige Hündchen giebt, die um die Hälfte des Hinterleibes geschoren werden, und alsdann Löwen vorstellen; daß ein sechsjähriger Knabe, mit gelben Stiefeln, einem Mantel, einer steifen Mütze und einem hölzernen Säbel, den Husaren bis auf den Knebelbart vorstellt; daß es indessen sehr ungerecht seyn würde, mit diesen beyden Nachahmungen viele von den Schriftstellern zu vergleichen, welche die mathematische Methode außer der Mathematik angebracht haben, denn das Hündchen und der Knabe sind nur kurzweilig, die Schriftsteller aber langweilig. — An dem Freyherrn von Wolf, der die mathematische Methode so fleißig empfohlen hat, liegt es nicht, wenn sie schlecht ist gebraucht worden. Er hat es genugmal erinnert, daß Stiefeln, Mütze und Figur des Säbels den Husaren nicht ausmachen, und daß man selbst die mathematische Methode strenge beobachten könne, ohne

Grundsätze, Lehrsätze und Beweise zu nennen. Auch wie man das Verfahren der Mathematikverständigen nachahmen solle, hat er deutlich genug gewiesen, so deutlich, als irgend in unsern ästhetischen Zeiten die Vorzüge großer Dichter, von Kunstrichtern entwickelt werden, und doch entstehen haufenweise Dichter, gegen die Wolfens scientifische Schüler noch lesbar sind. — Strenge Beobachtung der Regeln, mühsame Nachahmung großer Muster, ersetzen den Mangel des Geistes nicht, und machen ihn oft nur kenntlicher. — Ein Uebersetzer von des Aristoteles Dichtkunst (der Abt Aubignac) machte eine Tragödie, die vollkommen regelmäßig, und vollkommen elend war. Er hatte unter allen Regeln eine einzige vergessen: Daß zum Dichten Geist gehört, und den so mühsamen Beobachtern der mathematischen Methode fehlte größtentheils auch der mathematische Geist. — Zu Beschäftigungen, wo man nicht schlechterdings bekannten und vollkommen deutlichen Vorschriften nur gehorchen darf, wo man, zu seinem Ziele zu gelangen, neue Wege sich machen, oder wenigstens bahnen muß, wird Geist erfordert, oder Genie, wenn jemanden das französische Wort energiquer ist."

Daß die Mathematik die Mittel darbiete, durch deren Gebrauch, bey hinlänglich geübten Denkfähigkeiten, nicht nur in der Philosophie, sondern auch in allen übrigen Wissenschaften der Grad der Deutlichkeit und Gewißwißheit wirklich erreicht werden kann, welcher darin Menschen erreichbar ist, beruhet auf folgenden Gründen. Was man auch sonst von den Quellen, aus welchen die Mathematik ihre Gewißheit und Deutlichkeit schöpft, wenn man nach der Oberfläche urtheilt, sagen mag, so ist doch der einzige Kunstgriff, durch welchen sie in diesem Stücke allen übrigen Wissenschaften den Vorrang abgewonnen hat, der, daß sie, gehörig behandelt, und nur unter dieser Bedingung prangt sie mit dem gedachten Vorzuge wirklich, alles, was sie von den ihr unterworfenen Gegenständen lehrt, bloß bemerken, bloß wahrnehmen läßt. Daß sie sich mit Größen, d. h. mit Dingen beschäftiget, die construirt werden können, ist nicht der Grund der in der Mathematik möglichen Deutlichkeit und Gewißheit; dieser Umstand macht nur die Erreichung dieser Vollkommenheiten leichter, und in einem höhern Grade möglich. Nicht also daher, weil wir in andern Wissenschaften keine Construktionen gebrauchen können, muß man die Verwirrung und Ungewißheit leiten, welche öfters darin herrschen; sondern daher, daß man darin bloß rathend, oft selbst nur herumtappend, nicht nach sicher führenden Regeln, sondern nach Anleitung des Zufalls, die Eigenschaften ihrer Gegenstände kennen zu lernen sucht. Selbst von der Wirklichkeit der Gespenster ist der, welcher dergleichen wahrgenommen zu haben glaubt, so überzeugt, daß keine noch so wichtige und deutliche Gründe dagegen etwas vermögen; und seine Vorstellung ist dabey so lebhaft, so deutlich, daß jede Erzählung von einem, dem Vorgeben nach wirklich erblickten, Phantome sich bis auf die kleinsten Umstände erstreckt. Oder scheint dies Beyspiel nicht passend und hinreichend genug, so giebt es unter den Lehren der höhern Mathematik, welche man nicht durch und bey der Anwendung auf wirkliche Dinge hat prüfen können, eine Menge von irrigen, öfters selbst deutlich erkannten Sätzen widersprechenden, Behauptungen, die gleichwohl mit eben der Festigkeit vorgetragen werden, als wenn sie längst außer allen Zweifel gesetzt wären. Auf der andern Seite kann man jemanden die ausgemachtesten Sätze aus der Mathematik vorlegen, dieselben aufs deutlichste ausdrucken, und mit Gründen belegen, ohne ihm dadurch eine deutliche und gewisse Kenntniß zu ertheilen. Endlich darf man auch in der Mathematik auf dasjenige, was man gern mögte behaupten können, nur zuerst entweder durch Muthmaßung oder durch Andere geleitet worden seyn, und die Gründe dafür hintennach aufsuchen: so ist man in ihr, eben so wie in den übrigen Wissenschaften, in Gefahr, die größten Fehler zu übersehen, und Scheingründe für wahre Demonstrationen zu halten. Wo also ein mathematischer Gegenstand dergestalt in Construktionen dargelegt ist, daß die Seele seine Eigenschaften durch bloße Wahrnehmung zu finden im Stande ist, da gelangt sie jedesmal zur Deutlichkeit und Gewißheit; und dagegen fehlt ihr diese Deutlichkeit

und

und Gewißheit allemal, so oft sie aus Mangel an Vorerkenntnissen nicht durch eigene Kraft wahrnehmen kann. Auch richtet sich die Beschaffenheit und der Grad der angeführten Vollkommenheiten genau nach der Beschaffenheit und dem Grade der Wahrnehmung, wenn ich anders diesen letzten Ausdruck brauchen darf. Wird wirklich wahrgenommen, so ist auch Deutlichkeit und Gewißheit wirklich und unzerstörbar da; glaubt man bloß, jenes zu thun, so werden auch diese nur scheinbar wirklich: und je leichter die Wahrnehmung von statten gehet, desto höher ist der Grad der Deutlichkeit und Gewißheit. Eine sehr wichtige Bestätigung können diese Behauptungen auch durch folgende Betrachtung erhalten. Nach dem, was ich in der zweyten Abtheilung von den Forderungen und Grundsätzen gesagt habe, sind jene nichts anders als Regeln, die mathematischen Begriffe zu construiren, und die entworfenen Construktionen so zu verändern, daß sie die zu entdeckenden Eigenschaften der Wahrnehmung darlegen; diese aber Vorschriften, nach welchen sich die Seele bey der Wahrnehmung zu richten hat. Ist es nicht merkwürdig, und bey der gegenwärtigen Materie äußerst wichtig, daß gerade in der Geometrie, wo wir die Forderungen und Grundsätze vom Euclides an gehabt haben, die Deutlichkeit und Gewißheit im höchsten Grade statt findet? In der Arithmetik sind beyde schon schwächer, und bey der Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie

trie verschwinden sie nicht selten gänzlich; aber wie es hier in Ansehung der Forderungen und Grundsätze stehe, habe ich nicht nöthig, jetzt noch einmal zu sagen.

Ohne also zu entscheiden, ob die in der Philosophie und den übrigen Wissenschaften erreichbare Deutlichkeit und Gewißheit, sowohl der Art als dem Grade nach, mit der mathematischen übereinkomme, oder nicht: so kann das Gesagte wenigstens zu der Muthmaßung leiten, daß wir vielleicht auch außer der Mathematik, so lange wir mit Begriffen zu thun haben, uns jedesmal die dabey mögliche Deutlichkeit und Gewißheit mit völliger Befriedigung verschaffen können, wenn wir die gedachten Begriffe, obgleich ohne sie zu construiren, im Uebrigen völlig eben so behandeln, als wir solches in der Mathematik zu thun pflegen. Wäre diese Muthmaßung gegründet, so dürften wir nur in jedem Falle die Begriffe, die wir zum Gegenstande unserer Untersuchung machen wollten, durch Zusammennehmung und Trennung, Zusammensetzung und Auflösung, so lange verändern, bis die Seele von selbst die Beschaffenheiten derselben wahrnähme. Dadurch, daß die Mathematik ihre Schüler dieses thun läßt, zwingt sie dieselben, ihren Lehren durchaus den vollständigsten Beyfall zu geben; eben das ist der Weg, auf welchen wir selbst bey sinnlichen und einzelnen Gegenständen zu einer Ueberzeugung gelangen, die wir uns durch keine Zweifel rauben lassen;

dies

dies war der Kunstgriff, durch welchen Socrates seinen Unterredungen eine so unwiderstehliche Kraft gab. Brauchen wir mehr um den Entschluß zu fassen, durch wirkliche Versuche in einer so wichtigen Angelegenheit das Uebrige zu erstreben?

Auf diese Art hätten wir also von der Mathematik sowohl für die Philosophie, als für alle übrige Wissenschaften einen sehr wichtigen Wink erhalten. Aber das ist nicht alles. Alle Belehrung über das rechte Benehmen bey dem Gebrauche unserer Verstandeskräfte, auf die vollkommenste, ersprießlichste Art ertheilt, darf man von ihr erwarten. Man denke sich die ganze Mathematik, in der ihr möglichen Vollkommenheit; wo ist dann eine Art von Gegenständen, wovon dieselbe keine Beyspiele enthielte? Will man sinnliche? Die Geometrie bietet sie dar. In symbolischen Zeichen gedenkbare? Die Arithmetik beschäftiget sich mit ihnen. Transcendente? Die höhere Mathematik enthält dergleichen ohne Zahl. Einfache? Was ist einfacher, als der Punkt, von welchem die Größenlehre ausgeht? Zusammengesetzte? Vom Punkte an bis zum Unübersehbaren wegen der Menge der Theile, begreift sie dergleichen von allen nur möglichen Stufen? Vom Wahrnehmungsvermögen, im engern Verstande genommen und von seiner ersten Aeußerung an, bis zur höchsten Stufe der reinen Vernunft, so weit diese zum Loose der

Men-

Menschheit gehört, läßt sich keine Wirksamkeit der Denkkraft unserer Seele gedenken, welche die Mathematik nicht erregen, und auf alle erforderliche Arten üben sollte. Und dazu nun die Ordnung genommen, in welcher dieses alles in der Mathematik da ist, wenigstens da seyn kann! die gänzliche Abwesenheit aller Lücken, aller Sprünge! Dazu gesetzt, daß alle die sichern, ja ewigen Wege, welche die Mathematik bey ihren Untersuchungen geht, weil sie ihren Gegenstand stets in Construktionen betrachtet, durch diese Construktionen klar dem Auge vorgelegt werden können! und daß es in ihr keinen Ort giebt, von welchem man nicht allenthalben hin, und selbst bis zu der ersten, zum Grunde gelegten, Erklärung zurückgehen könne! In Anschlag gebracht, daß die Mathematik ihre Freunde erst jene Wege öfters und unter verschiedenen Umständen führt, und nicht anders als hinterher die dabey gleichsam eingesogene klare Kenntniß davon zu deutlichen Vorstellungen erhebt; wodurch nothwendig nicht nur die deutliche Einsicht im höchsten Grade erleichtert, sondern auch lebendig, anschaulich, geschmeidig, und mit dem schnellsten Ueberblicke verbunden werden muß. Endlich noch bedacht, daß man, wegen der, nicht etwa bloß möglichen, sondern größtentheils schon wirklich statt findenden, bewundernswürdigen Einförmigkeit der Methode in der Mathematik, alle von ihr erst befolgte, und dann durch Worte deutlicher dargelegte Regeln des wahren und rechten Gebrauchs unserer Denk-

kraft,

kraft, nachdem man dieselben einmal gehörig erkannt hat, an einem so kleinen Theile der Mathematik in voller Klarheit wahrzunehmen, und sich immer gegenwärtig zu erhalten, im Stande ist, daß dieser Theil, dem Materiellen nach, schon in einem Alter von zwölf Jahren begriffen seyn kann! Man empfiehlt die Logik nicht bloß dem künftigen Philosophen, sondern jedem Gelehrten. Alle Vortheile, welche das Studium der Logik gewähren soll, aber unter Tausenden vielleicht kaum einem wirklich giebt, bietet die Mathematik auf eine viel leichtere, viel sichere Art, und in einem weit größern Umfange und Brauchbarkeit dar. Sie lehrt uns nicht bloß über den wahren Gebrauch unsers Verstandes richtig sprechen; sie ertheilt uns die Fertigkeit, allenthalben nach deutlich erkannten Regeln zu handeln. Wenn wir durch Erfahrung und Abstraction mit den Wegen bekannt werden, die wir sowohl bey sinnlichen Gegenständen, als bey allgemeinen Dingen mit Nutzen gehen können, um in ihre Natur einzudringen: so zeigt uns die Mathematik in beyden Fällen die Wege, welche wir gehen müssen. Die Geometrie enthält alles das, was bey sinnlichen Objecten, und die Arithmetik, in ihrem ganzen Umfange, und zugleich mit der Anwendung auf die Geometrie genommen, alles, was bey allgemeinen Dingen gethan werden muß, wenn jedesmal das für uns erreichbare Ziel ganz erreicht werden soll. Und dieses alles nun als wahr vorausgesetzt, sollte die Mathe-

matik

matik kein Recht haben, zu klagen, daß die lebendige Quelle verlassen, und Brunnen gegraben werden, die löchericht sind, und kein Wasser geben?

Auch in der Mathematik ist gefehlt und gestritten worden, und dieses nicht immer auf die Art, als Herr von Leibnitz und Herr Bernoulli über die Logarithmen der verneinten Zahlen einander ihre Zweifel und Gründe mitgetheilt haben; nicht immer hat man den anders Denkenden so widerlegt, als Herr Euler Herrn Newton in seinen Briefen an eine deutsche Prinzessin über verschiedene Gegenstände aus der Physik und Philosophie im ersten Theile, S. 54—60. Eine philosophisch geschriebene Geschichte der in der Mathematik von Zeit zu Zeit begangenen aber auch hinterher verbesserten Fehltritte, zu einem vollkommenen Systeme der Mathematik hinzugefügt, und auch sie in Absicht der von ihr möglichen formellen Vortheile benutzt; was für herrliche Regeln, heilsamen Arzeneyen gleich, ließen sich daraus ableiten? So wie es Verkleinerung großer Männer ist, ihre Fehler nicht entdecken; denn sie sind ja groß, nicht weil sie ohne Fehler sind, sondern weil sie bey ihren Fehlern große Vorzüge haben: so hat man auch bey vollkommenen Wissenschaften nicht nöthig, ihre Unvollkommenheiten dem Auge zu entziehen. Selbst das Uebel in der Welt soll, recht von uns gebraucht, eine Quelle des Glücks werden; die Fehler anderer berechtigen uns nicht zur Klage, noch weni-

weniger zur Verachtung derer, die sie begehen; aber warnen können, warnen sollen sie auch; und die Mathematik kann uns nicht bloß die Wahrheit finden, sie kann auch die Quellen des Irrthums vermeiden lehren.

„So lange wir in den abstracten Regionen der Wissenschaften, vorzüglich, der Logik und Metaphysik bleiben, mögen jene Traumgestalten der erhitzten Einbildungskraft als wahre Wesen erscheinen, in den Wissenschaften, die im gemeinen Leben und zu Geschäften erforderlich sind, verschwinden sie.“

Sind etwa die Lehren der Mathematik, und zwar alle ohne Ausnahme so transcendent, daß bey keiner an die mindeste Anwendung im Leben gedacht werden könnte? In einer Welt, wo alles nach Zahl, Maß und Gewicht geordnet ist, muß die Größenlehre allenthalben brauchbar seyn. Wo giebt es eine Wissenschaft, in welcher man mit solcher Leichtigkeit vom Einzeln bis zum Transcendenten hinauf, und vom Transcendenten bis zum Einzeln herabsteigen könnte, wie in der Mathematik? Wo eine, in welcher so häufig, und unter so mancherley Umständen, das im höchsten Grade hypothetisch Gewisse zur Erreichung der höchsten Stufe der Wahrscheinlichkeit bey wirklichen Gegenständen gebraucht würde? Wo eine, in welcher man eben so oft, und in eben so großer Mannigfaltigkeit, vom niedrigsten Grade der Wahrscheinlichkeit bis zum höchsten Gipfel der menschlichen Gewißheit sich aufschwänge? Wie oft hat Herr Euler sehr unbedeutende Gesellschafts-Fragen, selbst Spiele, als Veranlassung zur Erfindung der schwersten Theorien gebraucht, und aus ihnen eine Menge anderer im Leben höchst wichtiger Fälle, und die beste Art, sie zu behandeln, dargelegt? Diese Kunst kann sich der Mathematiker in seiner Wissenschaft freylich am leichtesten erwerben; aber deswegen ist sie nicht bloß in der Mathematik möglich; und wie traurig wäre dies auch, da ihr Besitz in den Geschäften des Lebens unendlich wichtiger ist, als sie je in der theoretischen Mathematik werden kann. Sie kann aber nicht nur auch für andere Fälle von der Mathematik erlernt werden, sondern im höchsten Grade der Vollkommenheit wird sie selbst nur durch die Mathematik möglich.

Es ist also der Nutzen, welchen die Philosophie von der Mathematik erhalten kann, auch in der bisher genommenen Rücksicht außerordentlich groß, und vielleicht wäre es nicht übertrieben, zu behaupten, daß man nur durch die Mathematik den in der Philosophie möglichen Grad der Deutlichkeit und Gewißheit, ja selbst Vollständigkeit und Leichtigkeit, werde erreichen können. Bis zu der wünschenswerthen, und wahrscheinlich auch uns nicht versagten Stufe, sind wir noch nicht gekommen. Wenn Herr Kant in seiner Kritik der reinen Vernunft die Metaphysik

taphysik so erschüttert, daß selbst ein Moses Mendelssohn ihn den alles Zermalmenden nannte; und Herr Jacob, einer seiner eifrigsten Schüler, in seiner Prüfung der Mendelssohnschen Morgenstunden die Richtigkeit und Gewißheit der von ihm gebrauchten Kantischen Behauptungen gezeigt zu haben glaubt: so urtheilt der Recensent dieser Prüfung, in dem zweyten Stücke des zwey und achtzigsten Bandes der allgemeinen deutschen Bibliothek, ein Mann von Einsichten und Scharfsinn, über beyde: Wenn Herr Jacob meint, die Richtigkeit und Gewißheit aller dieser Kantischen Behauptungen gezeigt zu haben, so muß ich ihm widersprechen, und das Gegentheil behaupten, daß er mir wenigstens die Hauptsätze der Philosophie, die er angenommen hat, in keiner Absicht bestimmter, schärfer bewiesen, von Inconsequenzen und Widersinnigkeiten gereinigter vorgetragen zu haben scheint, sondern daß sich bey ihm, in Ansehung ihrer Hauptsätze, völlig noch eben die schwankende Vieldeutigkeit, eben die Lücken in der Beweisführung, eben die Widersinnigkeiten finden, die ich in den Schriften seines berühmten Lehrers anzutreffen glaube. — Wenn gegen Herrn Kants Theorie von Zeit und Raum Herr Feder und Herr Weishaupt auftreten, und ihre abweichenden Meinungen für gegründeter halten, so behaupten dagegen Herrn Kants Schüler, daß der Widerspruch aus Misverstand herrühre. Auch giebt es außer der Ungewißheit und Verschiedenheit der Meinungen, die noch immer eben so sehr als je, in der Philosophie statt findet, und weswegen Herr Kant es für Pflicht hält, alle Versuche, die Methaphysik dogmatisch zu Stande zu bringen, als ungeschehen zu betrachten, noch einen andern Mangel, der gewiß jeden Redlichen nicht weniger schmerzen muß. C'est la moderation, sagt der königliche Philosoph in einem seiner Briefe an den Herrn von Voltaire, qui doit être le caractére propre de tout homme qui cultive les sciences. La philosophie qui éclaire l'esprit, fait faire des progrès dans la connoissance du coeur humain; & *le fruit le plus solide qui en revient doit être un support d'humanité pour les foiblesses & les défauts des hommes.* Darf man dies zu bestätigen, gerade hin auf Erfahrungen verweisen? Und wenn die Philosophie, so wie sie es seyn kann, die ersprießlichste Wissenschaft seyn soll, wenn man von ihr Klugheit im Leben, und Standhaftigkeit und Muth in den Widerwärtigkeiten desselben hoffen darf: sollte sie dann wegen der mit ihrer Erlernung verbundenen Schwierigkeiten nur das Loos weniger seyn? — Die Fortsetzung dieser Materie wird in dem zweyten Abschnitte vorkommen.

3. Von dem Verhältnisse der Mathematik und der Philosophie zu den übrigen Wissenschaften.

Ich habe zwar bereits in dem vorhergehenden Absatze einiges von dem Einflusse der Mathematik auf die,

außer

außer der Philosophie, übrigen Wissenschaften berühren müssen; allein es ist noch ein Hauptpunkt zurück: und um das, was ich darüber zu sagen habe, desto nutzbarer zu machen, will ich die Mathematik und Philosophie, die als zwey Schwestern nie getrennt werden sollten, in Verbindung betrachten, und das Verhältniß anzugeben suchen, in welchem sie mit den übrigen Wissenschaften stehen.

Unter den Schülern des Pythagoras, Socrates und Plato waren außer denen, die sich vorzüglich als Philosophen berühmt gemacht haben, auch die größten Männer, sowohl in den Wissenschaften des Friedens, als in der Kunst des Krieges; und Cicero sagt von sich, in Ansehung des Talents, durch welches er, ohne Ahnen, zu den höchsten Würden des Staats gelangte: Fateor, me oratorem, si modo sim, aut etiam quicunque sim non ex rhetorum officinis, sed ex Academiae spatiis exstitisse. Sollten sich die Alten die Vortheile, welche ihnen die Philosophie gewährte, nicht dadurch in einem so hohen Grade möglich gemacht haben, daß sie dieselbe mehr als Mittel, denn als Entzweck ansahen und gebrauchten? — Wir schätzen unter den Gelehrten jeder Art, vorzüglich den philosophischen Kopf, und verlangen von jeder Wissenschaft, die auf unsere Hochachtung Anspruch macht, daß sie durch philosophischen Geist sich auszeichnen soll. Gründlichkeit, überhaupt genommen, und Zusammenhang unter den Kenntnissen, thun dieser Forderung noch kein Genüge, oder man müßte jede gründliche und zusammenhängende Wissenschaft als einen Theil der Philosophie betrachten, und die Philosophie zur Allwissenschaft machen wollen. — Wenn man die Philosophie mit der Mathematik vergleicht, so scheinen die theoretische Philosophie und die reine Mathematik neben einander gestellt werden zu müssen; und so wie diese den Namen der Mathematik oft ohne Beysatz führt, so könnte man vielleicht mit gleichem Rechte jene schlechtweg Philosophie heißen. Alsdann würde die sogenannte praktische Philosophie, die, ihrer Natur allerdings angemessenere, Benennung der angewandten Philosophie bekommen können; und auf diese Art unterschieden sich die Mathematik und Philosophie von allen übrigen Wissenschaften sogleich dadurch, daß nicht ihnen selbst, sondern erst den durch ihre Anwendung auf reelle allgemeine Gegenstände entstandenen Wissenschaften Brauchbarkeit für die Geschäfte des Lebens beygelegt werden müßte.

Ich weiß daher nicht, ob es theils richtig und genau genug bestimmt, theils vortheilhaft ist, die gesammte menschliche Erkenntniß, wie die meisten, nach drey, oder, wie Herr Reimarus in seiner Vernunftlehre, nach vier Stufen zu unterscheiden; und noch weniger passend und nützlich scheint es mir zu seyn, die gelehrte und gemeine Erkenntniß einander entgegen zu setzen. Man nenne die

Ideen,

Ideen, welche unsere Seele — nachdem ihre Kraft durch Erfahrungen zu dem erforderlichen Grade der Stärke gebracht worden ist — ohne dabey die Hülfe der Erfahrung unmittelbar zu gebrauchen, aus und durch sich selbst formiren kann, Formen, und setze dieselben den wirklichen Dingen entgegen. Alsdann ist unsere Erkenntniß, entweder Kenntniß von wirklichen Dingen, oder Kenntniß der Formen, und beyde Arten werden entweder aus Anschauungen oder aus Begriffen geschöpft. So entstehen folgende vier Stufen:

1. Kenntniß von wirklichen Dingen aus Anschauungen; gemeine, sinnliche Kenntniß;
2. Kenntniß von wirklichen Dingen aus Begriffen; vernünftige Kenntniß;
3. Kenntniß der Formen aus Anschauungen oder Construktionen; mathematische Kenntniß;
4. Kenntniß der Formen aus Begriffen; philophische Erkenntniß.

Diese Classification unterscheidet sich von der in Herrn Reimarus Vernunftlehre, zwar nicht in Ansehung der Zahl der angenommenen Stufen, aber doch theils darin, daß die mathematische Erkenntniß, so wie es die Natur der Sache verlangt, vor der philosophischen vorhergeht, theils und vorzüglich in der Bestimmung einer jeden Stufe. Nach der hier vorgeschlagenen Abtheilung kann die Erkenntniß jeder Stufe die Antwort auf alle vier Fragen enthalten, die Herrn Reimarus Stufen einzeln zugehören. Und da man, was ein Ding ist, selten recht wissen kann, so lange man Gründe und Größe dabey nicht kennt, und halbe Kenntnisse den Namen Kenntniß gar nicht verdienen: so kann es wohl schwerlich gebilliget werden, wenn man bey der ersten Betrachtung über die menschliche Erkenntniß dem Irrthume, wenn gleich auf entfernte Weise, den Weg bahnt, als ob in der Natur die Dinge eben so getrennt werden könnten, wie uns solches in Gedanken allerdings möglich ist.

Aber wenn man von der gesammten menschlichen Erkenntniß reden, und die verschiedenen Stufen und Arten derselben, in der Absicht, aus einander setzen und ordnen will, damit der Weg von der niedrigsten Stufe bis zur höchsten, nach seinen Haupttheilen, erkannt werden möge: so darf man auch hierbey nicht stehen bleiben. So wie nemlich die gemeine Kenntniß durch die vernünftige, sowohl ihrem Umfange als der Deutlichkeit und Gewißheit nach, vervollkommnet werden kann, so ist solches auch bey der mathematischen Kenntniß durch die philosophische möglich. Eben diese Vortheile kann die ganze Erkenntniß der wirklichen Dinge von den beyden Arten der Erkenntniß der Formen erhalten, wenn diese zuvor auf allgemeine, von den wirklichen Dingen abgezogene, Begriffe angewandt werden. Da also, wo wir es bis zur vollkommenen Erkenntniß bringen können, lassen sich folgende Stufen denken.

1. gemeine

1. gemeine sinnliche Kenntniß;
2. vernünftige Kenntniß;
3. gemeine durch die vernünftige erhöhte Kenntniß;
4. mathematische Kenntniß;
5. philosophische Kenntniß;
6. mathematische durch die philosophische erhöhte Kenntniß;
7. angewandte Mathematik und Philosophie;
8. wissenschaftliche Kenntniß von den übrigen, der angewandten Mathematik und Philosophie nicht unterworfenen, wirklichen Dingen;
9. gelehrten praktische Kenntniß von einzelnen wirklichen Objekten.

Es würde zu viel Raum wegnehmen, wenn ich an Beyspielen zeigen wollte, daß alle diese Stufen nöthig sind, um zur vollkommenen Kenntniß der wirklichen Dinge, so weit uns nemlich hierin Vollkommenheit erreichbar ist, zu gelangen, und daß sie auch in der That öfters insgesammt bestiegen werden. Man nehme, den ersten den besten, einzelnen, nur einigermaßen wichtigen und zusammengesetzten Gegenstand, frage sich, was zur vollkommenen Kenntniß desselben erforderlich sey, und überlege, wodurch man dazu gelange; so wird man schwerlich dagegen etwas einwenden. Auf diese Art wären also die mathematische und die philosophische Kenntniß

Mons qui verticibus petit arduus astra duobus,*)

 auf

*) Ovidii Metamorph. I. v. 316.

auf dessen höchster Spitze, der mathematischen durch die philosophische erhöhten Kenntniß, man hinter sich das Feld der gemeinen sinnlichen und vernünftigen, und vor sich das anlockende Gefilde aller wissenschaftlichen und aller gelehrten praktischen Kenntnisse, in unabsehbarer Größe, erblickte. So ginge der Weg zu aller wahren und im Leben brauchbaren Gelehrsamkeit, wenn sie gründlich und vollständig erlernt werden sollte, durch die Mathematik und Philosophie; und das größte Glück für sich, und die reellsten und wichtigsten Verdienste um andere, könnte nur der sich erwerben, der durch alle Stufen endlich bis zur gelehrten praktischen Erkenntniß gekommen wäre. Vom Gipfel eines hoch über die Oberfläche der Erde sich erhebenden Berges eine unzählige Menge der wichtigsten und mannigfaltigsten Gegenstände, wie mit einem Blicke, übersehen, ist reizend; und natürlich auch daher, daß so mancher da seiner Laufbahn ein Ziel setzt. Ein solcher Bergbewohner kann, wenn er die vor ihm liegenden Thäler durch öftere Beschauung sich bekannt gemacht hat, den Reisenden, die ihn fragen, zur glücklichen Fortsetzung ihres Weges, heilsamen Rath ertheilen; und danken werden sie ihm, wenn er nach dem Maße seiner Kenntnisse ihnen räth. Aber die Höhe, auf welcher er steht, entzieht auch seinem Auge so manches, stellt so oft das Große nur klein ihm dar, und ein steter Schein wird endlich Wahrheit. Er ist daher auch der Gefahr ausgesetzt, sich vom Stolze

verfüh-

verführen zu lassen, denen, die zu ihm hinanklimmen wollen, mehr zuzurufen: hier bin ich, kommt her! als sich herabzulassen, ihnen entgegen zu gehen, und die bequemsten und sichersten Wege zu zeigen; leicht können ihm die, die jenseits im Thale wandern, auf Irrwegen zu gehen, und sich an niedrigen Früchten zu laben scheinen.

Wenn also die Mathematik und Philosophie mehr Mittel zu ausgebreiteten, gründlichen, vollständigen, deutlichen und gewissen Kenntnissen von wirklichen Dingen, als an und für sich im Leben brauchbar sind: so ist es auf keine Weise zu bewundern, wenn auch bey ihnen die Verwechselung des Mittels mit dem Zwecke nachtheilige Folgen nach sich gezogen hat, und daß öfters diejenigen, welche das Werkzeug im unvollkommnern Zustande besaßen, aber dasselbe gebrauchten, davon mehr Nutzen gehabt haben als diejenigen, die es in größerer Vollkommenheit hatten, und den Gebrauch desselben vernachläßigten. Daß man überhaupt die Stufen der menschlichen Erkenntniß so wenig genau und vollständig von einander unterschieden hat, ist die Ursache, daß auch die Ordnung und die Verbindung der Wissenschaften, die zusammengenommen das Reich der Gelehrsamkeit ausmachen, so schwer zu finden gewesen ist, und daß man dieselben gewöhnlich mehr aufgezählt, als in einer natürlichen Ordnung und in ihrer Abhängigkeit von einander dargestellt hat. Daher rührt es ferner, daß man

so

so oft trennt, was durch ein natürliches Band verknüpft ist; daß man unentbehrliche Vorerkenntnisse aus der Acht läßt, und deswegen in der Wissenschaft, der man sich vorzüglich widmet, es kaum bis zum Mittelmäßigen bringt; daß man bey der Erlernung der Disciplinen auf halben Wege stehen bleibt, und die Anwendung derselben in den Geschäften des Lebens vergißt. Hieraus läßt sich erklären, wie so oft Gelehrte sich von den Ungelehrten gleichsam als wesentlich verschieden ansehen, das Gebiet der Wissenschaften als von dem Gebiete der gemeinen Vernunft ganz abgesondert betrachten, und dadurch für das geschäftige Leben unnütz werden. Aus dieser Quelle fließt endlich der Wahn, als brauche man, um es in einer Wissenschaft zur Vollkommenheit zu bringen, der Hülfe der übrigen nicht.

Man hat, um einen hier vorzüglich hergehörenden Punkt mit ein Paar Worten besonders zu berühren, lange die Gewohnheit gehabt, in den Handbüchern der Naturlehre, nur unter einem andern Namen, fast alles das vorzutragen, was sonst und eigentlich in den Lehrbüchern der angewandten Mathematik abgehandelt werden muß, und Herr Karsten hat in seinen 1780 herausgegebenen Anfangsgründen der Naturlehre einen Versuch gemacht, die der Naturlehre eigenthümlichen Wahrheiten besonders zu sammlen. Daß er in seine Anleitung vieles aus der Chemie aufgenommen, hat er mit Herrn

William

William Nicholson gemein, der aber in seiner Introduction to natural Philosophy das aus der angewandten Mathematik beybehalten hat, welches von Herrn Karsten nicht geschehen ist. Wie nöthig, aber zugleich auch, wie schwer eine genaue Bestimmung der Grenzen der Naturlehre sey, kann man aus der Vorrede zu der Anleitung zur gemeinnützlichen Kenntniß der Natur, welche Herr Karsten 1783 herausgegeben ansehen. Wenn man die vorhin festgesetzten Stufen annimmt, und die Abtheilungen der achten nach logischen Regeln aufsucht, fallen diese Schwierigkeiten gänzlich weg; allein die weitere Auseinandersetzung dieses Punkts wird in dem folgenden zweyten Abschnitte einen schicklichern Platz bekommen.

Zweyter Abschnitt.

Von der Art die Vollkommenheit und Brauchbarkeit der Mathematik zu vergrößern.

Erste Abtheilung.

Von dem, was zur Vergrößerung der Vollkommenheit der Mathematik nöthig ist.

An sich kann etwas groß scheinen, was gleichwohl in der gehörigen Verbindung betrachtet, sehr klein ist. Die Mängel, deren ich die Mathematik in dem vorhergehenden Abschnitte beschuldiget habe, lassen bey der hohen Stufe der Vollkommenhoit, auf welcher diese Wissenschaft bereits steht, demjenigen, der sie gern auf der höchsten erblicken mögte, wenig übrig. Um so freyer darf also jeder, der sich der Redlichkeit seiner Absichten bewußt ist, seine Gedanken darüber äußern. Hier ist Zurückhaltung nicht Bescheidenheit, sondern unzeitige Furcht.

Furcht. Die Mathematik ist ein königlicher Schatz, Kupfermünze darin kann keine andere als eine beleidigende Wirkung hervorbringen.

1. Ausführliche Theorie der mathematischen Methode.

Die Stufe, welche ich S. 137 nach der mathematischen und philosophischen Kenntniß zur nächsten angenommen habe, ist die mathematische durch die philosophische erhöhete Kenntniß. Diese Stufe fehlt noch; auf ihr muß die Mathematik keine von den ihr angeschuldigten Mängeln an sich haben; und das erste, was erfordert wird, um sie darauf zu erheben, ist eine ausführliche Theorie der mathematischen Methode. Ueber den Umfang dieser Theorie, und über den daher möglichen Nutzen habe ich schon oben S. 54. f. gesprochen, und es bleiben mir daher hier nur noch einige einzelne Anmerkungen übrig.

Ich gedenke mir das Verfahren des Mathematikers bey Erfindung der Mathematik auf folgende Art. Er zertrümmert in Gedanken die Sinnenwelt, und erfüllt den leeren Raum, der allein unzerstörbar zurückbleibt, mit Geschöpfen seines Geistes, den mathemathischen Wesen. Er geht dabey stufenweise, vom Einfachen zum Zusammengesetzten, von Anschauungen zum Gedenkbaren in willkührlichen Zeichen, vom Einzelnen und beständigen zum Allgemeinen und Veränderlichen

fort

fort. Ohne im Anfange im geringsten zu wissen, wie er die, der Natur seiner Denkkraft gemäß, selbst erschaffenen Gegenstände gleichsam zwingen müsse, sich ihm nach allen ihren Seiten zu entfalten, beobachtet er sorgfältig jede Operation, welche er, damit vorzunehmen, sich unvermeidlich gezwungen fühlt, und sammlet sie. So gelangt er zu den Forderungen. Eben so unbekannt anfänglich mit den Regeln, die seiner Wahrnehmungskraft zur Richtschnur dienen könnten, richtet er ferner seine Aufmerksamkeit auf die von selbst erfolgenden Aeußerungen dieser Kraft, und sammlet auch sie. Auf diese Art erhält er die Grundsätze. Was er von jenen bey der ersten Art von Gegenständen, die sich der Untersuchung darbieten, braucht, findet er bald; von diesen hingegen die meisten später, und nach und nach: beyde aber wendet er an, so oft er dazu Gelegenheit bekömmt. So erschafft, so behandelt, so durchschaut er, nach fortgesetztem Streben, endlich eine ganze Classe von Gegenständen, und lernt dieselben zuerst nach ihren wesentlichen Beschaffenheiten, dann nach ihrem Verhältnisse zu einander kennen. Von einzelnen und der unmittelbaren Anschauung fähigen Objecten fängt er an, und mit ihnen hat er es diese ganze Classe hindurch zu thun. Aber allmählich bildet sich das Abstractions-Vermögen und die Fähigkeit das Allgemeine zu betrachten. Größen waren es, womit er sich bisher beschäftigte, und welche er in Construktionen untersuchte; am Ende des ersten Theils

seines

seines Weges bietet sich ihm also die Größe, überhaupt genommen, dar. Er sucht das auf, was zum deutlichen Begriffe derselben gehört, nimmt, da er sich der Hülfe der natürlichen Construktionen beraubt sieht, zu willkührlichen seine Zuflucht, und sucht dieselben, durch Veränderung, der Wahrnehmungskraft seines Geistes nahe zu bringen. Bey Einer Größe ist ihm diese Veränderung nicht möglich. Er denkt sich eine zweyte dazu, und durchs Zusammennehmen und Trennen, Zusammensetzen und Auflösen, gelangt er nunmehr zur Kenntniß der einfachen Operationen der Buchstabenrechnung. Eben diese Operationen, aber in größerer Verschiedenheit, bemerkt er hinterher, auch sonst schon mit Vortheil gebraucht zu haben; jetzt sind sie die einzigen ihm möglichen. Eine allgemeine Forderung wird ihm: jede zwey Größen auf die gedachten Arten zu verändern. Aber zur Befolgung dieser Forderung braucht er bequeme Zeichen, sowohl für die Größen, wobey er sie befolgen will, als zur Bezeichnung jener Operationen. Er sucht also dergleichen auf, und erweitert, nach Anleitung seiner allgemeinen Forderung, die Vorstellungen von den einfachen Operationen. Dabey benutzt er die Kenntniß von den verschiedenen Arten der Größe, welche er aus den einzelnen im Anfange betrachteten durch Abstraction gefunden hat. Bey der vierten Operation entdeckt er ein neues Mittel, Größen deutlich auszudrucken. Er benutzt dasselbe, erweitert die einfachen Operationen, und vermehrt zugleich ihre Anzahl, indem er die Zusammensetzung aus gleichen Größen, und die Auflösung in solche, besonders betrachtet. Jetzt hat er die einfachen Wege, aus gegebenen Größen andere hervorzubringen, kennen gelernt, und da er dabey, theils Bestandtheile zu einem Ganzen verband, theils aus dem Ganzen die Bestandtheile absonderte: so versucht er nun, so wie mehrere von den gedachten Operationen zur Hervorbringung Einer Größe zu gebrauchen, also auch, und vorzüglich, die Wege zu finden, aus diesen Größen jeden Bestandtheil zu entwickeln. Bey diesem letztern Geschäfte hat er jedesmal eine zwiefache, Eine und dieselbe Größe darstellende, Construktion, worin der zu entwickelnde Bestandtheil als unbekannt anzusehen ist. Hier bieten sich ihm folglich die Grundsätze, die er bey seinen ersten Untersuchungen gefunden, und mit so vielem Nutzen gebraucht hat, dar, und versprechen ihm den glücklichsten Erfolg. Er sucht also die Verwickelungen, in welchen eine Größe mit andern sich befinden kann, auf, ordnet sie nach dem Grade ihrer Zusammensetzung, entwickelt, vermehrt die gedachten Grundsätze mit neuen, und sucht, wenn die Entwickelungsart seinem Blicke sich entzieht, sie durch Aufsuchung der ihr entgegenstehenden Verwickelung zu entdecken. Auf diesem Wege sieht er sich endlich durch vorher nicht gekannte Mittel in den Stand gesetzt, bey der Untersuchung der Verhältnisse der in willkührlichen Construktionen ausgedruckten Größen sein Ziel weiter zu stecken,

und

und insbesondere sein Augenmerk darauf zu richten, aus den möglich wenigsten Dingen alle übrige zu bestimmen. Indem er aber die Natur der Verhältnisse überdenkt, bemerkt er, daß jede zwey im Verhältnisse stehende Größen auch als Construktion einer dritten Größe betrachtet werden können. Dies leitet ihn auf eine andere Art der Verhältnisse, nemlich auf die sogenannten arithmetischen Verhältnisse. Er fängt an, das vor ihm liegende Feld zu bebauen, geht auch hier vom Einfachen zum Zusammengesetzten fort, und betrachtet die Verhältnisse erst einzeln, dann mehrere zugleich und in Verbindung mit einander. Bey dieser letzten Untersuchung findet er die zusammengesetzten Verhältnisse, die aus lauter gleichen Verhältnissen bestehen, seiner Aufmerksamkeit vorzüglich werth, und die ausführliche Betrachtung derselben leitet ihn auf die Logarithmen.

Hier endiget er abermals einen Theil seiner Laufbahn. So wie er sich im Anfange mit natürlichen Construktionen beschäftigte, so hat er es jetzt mit willkührlichen Construktionen zu thun gehabt, und Begriffe, bloß in symbolischen Zeichen gedenkbar, sind der Gegenstand seiner Untersuchung gewesen. Noch gelten daher die Sätze, welche er gefunden hat, nicht weiter als von diesen Begriffen; allgemeine Behauptungen und Regeln kennt er, die freylich auf die besondern Arten der Größe angewandt werden können, aber dabey auch, wegen des hinzukommenden specifischen Unterschiedes, jedesmal noch einer Modification bedürfen. So eröffnet sich ihm wieder ein neues Feld. Die Hauptgattungen der Größe sind die discreten und die continuirlichen. Für jede derselben ändert er daher seine allgemeine Theorie durch die nöthigen Modificationen ab, und wenn dieses geschehen ist, so sucht er die Unterarten jeder Classe auf, construirt sie, betrachtet den Zusammenhang ihrer Bestandtheile, und erforschet auch hier die Wege, aus den möglich wenigsten Dingen die übrigen zu finden.

Weiter fahre ich hier nicht fort, indem das Uebrige in eine ausführliche Abhandlung über die mathematische Methode gehört. Verbindet man mit dem, was ich S. 143 und 144 gesagt habe, dasjenige, was S 25 und 26 steht, so hat man alles, um sich die Art, die ganze reine Planimetrie aus sich selbst zu finden, deutlich vorzustellen. Das S. 144, von unten an, folgende betrifft den Weg, wie die Buchstabenrechnung und gemeine Algebra auf ähnliche Art gefunden, und darauf zur Herleitung der Arithmetik, im engern Verstande, und der algebraisch-analytischen Geometrie, in so fern sie es mit den ebenen Figuren zu thun hat, gebraucht werden kann. Auf diese Weise sind die genannten Theile der reinen Mathematik freylich nicht wirklich enstanden, sondern es hat auf ihre Erfindung, so wie auch sonst allenthalben, der Zufall einen großen Einfluß gehabt. Aber mög-

lich

lich ist doch dieser Weg unserm Geiste, und auf demselben gelangt er auf einmal zur vollen Deutlichkeit und Gewißheit; wenn er ihn daher auch nicht vom Anfang an betreten kann, so muß er ihn gleichwohl einschlagen, so bald er sich dazu stark genug fühlt. Dann erhöht er seine mathematische Kenntniß mit Hülfe der Philosophie, und das Gebäude der Mathematik steht vollendet und unveränderlich da.

In den übrigen Theilen der Mathematik ist eben dieser Weg nicht nur gleichfalls möglich, sondern da noch leichter und angenehmer. Mehr Kenntnisse, und ein mehr umfassender und schärferer Blick, sind allerdings nothwendig, aber die vorhergehenden Beschäftigungen können sie auch im höchsten erforderlichen Grade gewähren. Und am Ende läßt sich die ganze mathematische Methode darauf zurückführen, daß allemal der Gegenstand zuerst durch eine Definition gegeben, dann Forderungen und Grundsätze aufgesucht, die Begriffe construirt, und in Construktionen betrachtet werden. Scheint dies noch nicht hinlänglich, so nehme man dazu die Regeln S. 25 und 26, so nur, daß man sie jedesmal nach der Natur des vorseyenden Gegenstandes modificirt gedenke.

In so wenig Worte sich aber auch die ganze Theorie der mathematischen Methode zusammendrängen läßt, und genau genommen, liegt sie, obgleich im Saamen, schon in der Definition der Mathematik: so muß doch diese Theorie, wenn sie ausführlich und vollständig seyn soll, das Verfahren der Mathematik nicht nur bey den Größen überhaupt, sondern auch bey allen davon zu betrachtenden Arten und Unterarten genau und deutlich darlegen, und dazu sind allerdings wenige Blätter nicht hinreichend. Aber so bald man sie in der erforderlichen Vollständigkeit voraussetzen kann, so werden auch alle, oben S. 59 — 61 angeführten Vortheile aufs deutlichste sichtbar. Dieses läßt sich schon an dem Wenigen zeigen, was ich hier von dem Verfahren des Mathematikers bey der Erfindung der Mathematik gesagt habe, und es scheint mir daher nicht unzweckmäßig, dabey noch etwas zu verweilen.

Zuvörderst ergiebt sich daraus die Antwort auf die die Frage: Muß das Studium der Mathematik mit der Arithmetik oder mit der Geometrie anfangen? auf eine eben so gewisse als leichte Art. Herr Kästner hat diese Frage im siebenten Stücke des Braunschweigischen Journals vom vorigen Jahre, in dem Aufsatze: Ueber die Art, Kindern Geometrie und Arithmetik beyzubringen; folgendergestalt beantwortet: „Jungen Leuten eher Geometrie zu lehren, als Arithmetik, braucht meines Erachtens keine Entschuldigung. Die Geometrie läßt sich dem Auge darstellen, Rechnen mit Zifern erfordert abstrakte Begriffe.“ Ich weiß nicht, ob die Auszeichnung des

Worts,

Worts, Zifern, berechtige, Herrn Kästner die Behauptung beyzulegen, daß die Buchstabenrechnung vor der Ziferrechnung vorhergehen sollte; das aber ist mir aus andern Quellen bekannt, daß Herr Kästner von den Rechnern nichts hält, die keine Buchstabenrechnung gebrauchen können; und vielleicht wären einige satyrische Stellen in der Vorrede zu dessen Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendungen auf mancherley Geschäfte, wenigstens weniger stark abgefaßt worden, wenn ich nicht einige Jahre vorher eine Anleitung zur juristischen, politischen und ökonomischen Rechenkunst, ohne darin die Buchstabenrechnung zu gebrauchen, herausgegeben hätte. Nach dem Vorhergehenden geht allerdings der Weg zu einer vollständigen und gründlichen Kenntniß der Ziferrechnung durch die Buchstabenrechnung und Algebra, und dies ist, wenn ich es hier hinzusetzen darf, auch von jeher meine Meinung gewesen. Daß ich gleichwohl in der gedachten Anleitung keine Buchstabenrechnung gebraucht habe, hat daher gerührt, weil ich viele Männer kannte, welche die Buchstabenrechnung, ihrer anderweitigen Geschäfte wegen, nicht lernen konnten, und dabey doch von vielen Materien der Rechenkunst mehr Kenntniß nöthig hatten, als in den gewöhnlichen Rechenbüchern angetroffen wird; denn die Trägheit derer, welche sie nicht erlernen wollen, mag auch ich nicht unterstützen. Doch ich kehre zu der aufgeworfenen Frage zurück, und die Antwort darauf aus der S. 143—149 mitgetheilten Vorstellung von dem Wege, welchen der Mathematiker bey der Erfindung seiner Wissenschaft geht, und aus der Behauptung S. 114 f. über die Art, wie die reine Geometrie und die Buchstabenrechnung und Algebra Anfängern beygebracht werden müssen, ist keine andere, als: Von der Geometrie. Diese Antwort erhält noch mehr Bestätigung durch folgende Betrachtung.

Wenn die Buchstabenrechnung und Algebra mit voller Einsicht erlernt werden sollen, so muß sich der Schüler unter den Buchstaben, Größen überhaupt genommen, vorstellen können, und also dazu eine Fertigkeit im allgemeinen Denken, wenigstens von der ersten Stufe mitbringen. Da ferner die Gegenstände der Mathematik nicht aus Erfahrungen abstrahirt, sondern aus der Seele selbst genommen seyn müssen, so ist zur Buchstabenrechnung und Algebra nicht eine solche Fertigkeit, mit allgemeinen Begriffen sich zu beschäftigen, hinlänglich, welche man sich bey wirklichen Dingen vermittelst der gemeinen Vernunft erwerben kann, sondern man muß sich dergleichen bey der Untersuchung solcher einzelnen Gegenstände, die von der Erfahrung unabhängig sind, erworben haben. Beweisen thut es freylich nichts, aber merkwürdig ist es mir stets gewesen, daß ich bey dem vielen Unterrichte, den ich Anfängern in der Mathematik ertheilt habe, dieselben nicht nur nie anders, als mit der größten Mühe, sondern auch selbst dabey nie zum vollen Verste-

hen

hen der Lehren der Buchstabenrechnuug und Algebra und ihrer Beweise habe bringen können, wenn ich mit diesen Wissenschaften den Anfang machte; da ich hingegen, wenn ich die Geometrie hatte vorangehen lassen, durch die ganze Arithmetik mit weit stärkern und schnellern Schritten vorwärts eilen konnte, als selbst in der Geometrie; und zwar nicht im Anfange derselben, denn da ist Langsamkeit und Weitläufigkeit unvermeidlich, wenn der Grund ganz und tief genug gelegt werden soll, sondern in der Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren, wo der Lehrer oft nur leichte Winke zu ertheilen hat, um den Schüler zur Selbsterfindung in den Stand zu setzen. Begreiflich werden indeß dergleichen Erfahrungen dadurch sehr leicht, daß jede höhere Fähigkeit oder Aeußerungsart unserer Denkkraft alle bis zu ihr gedenkbaren niedrigern Fähigkeiten in einem gewissen Grade der Vollkommenheit voraus setzt, den sie nicht anders als durch Uebungen, die ihrer Natur durchaus angemessen sind, erhalten können; und sonach leidet es keinen Zweifel, daß von der Geometrie allemal der Anfang gemacht werden sollte.

Auch folgende Frage läßt sich eben so entscheiden: Darf man Anfängern die Elemente der Mathematik schon beym ersten Unterrichte nach der strengen mathematischen Lehrart vortragen? Vortragen nicht, sondern nur zu ihrer Erfindung leiten; aber wenn man dieses thut, so ist die strengste mathematische Methode nicht bloß erlaubt und möglich, sondern selbst die beste und leichteste, denn sie ist die natürliche. Seit zehn Jahren gehört es mit zu meiner Pflicht, erste Anfänger in den Elementen der Mathematik zu unterrichten. Nur dann, wenn ich bloß leite, und die Lernenden alles finden lasse, und das ist ja die strengste Mathematische Methode, weil dabey die größte Genauigkeit und Gründlichkeit nothwendig ist; erreiche ich am leichtsten, sichersten und schnellsten mein Ziel. In der dritten Classe des Gymnasiums, an welchem ich stehe, beschäftige ich mich auf diese Art mit jungen Leuten von zwölf und dreyzehn Jahren, wöchentlich, eine Stunde mit der Geometrie, und eine mit der Buchstabenrechnung. Am Ende jedes Jahres haben immer, mehrere wenigstens, das ganze erste Buch der Euclideischen Elemente, ohne dasselbe selbst in der Hand gehabt zu haben, auswendig gelernt, denn vom verstanden haben braucht nicht die Rede zu seyn; und in der Arithmetik werden z. B. die Sätze von den Kennzeichen der Prim- und zusammengesetzten Zahlen zu einander, in völliger Allgemeinheit, Schärfe und Vollständigkeit durchgenommen, nicht schwerer gefunden, als die geometrischen Lehrsätze. Ich führe dieses ausdrücklich an, weil das Vorurtheil gar zu gemein ist, als seyen, vorzüglich die Elemente der Mathematik, für die ersten Anfänger zu schwer und zu trocken. Da soll der Lehrer alles nur historisch bekannt machen, und vom Anfang an, durch

das

das Salz der praktischen Anwendungen, der losen Speise gleichsam Geschmack ertheilen. Die Mathematik ist eine Wissenschaft der Vernunft, und so verlangt sie auch vom Anfang an getrieben zu werden, oder sie rächt sich. Damit sie aber auch ein Recht habe, unerbittlich in ihren Forderungen zu seyn, läßt sie sich zuerst bis zu dem sinnlichen Menschen, und also auch bis zu Kindern herab. Und ist etwa mein Urtheil nicht wichtig genug, so ist hier der Ausspruch von Deutschlands erstem Mathematiker, Herrn Kästner: *) „Kindergeometrien hat man mehr als eine; es könnte aber auch wohl geschehen, daß ich keine von ihnen wählte, sondern bey der ältesten Kindergeometrie bliebe, die man in allen Sprachen hat. Euclides erste vier Bücher lassen sich einem Kinde verständlich machen, wenn es nur die Geduld hat von Satz zu Satz fortzugehen.“ Auch das will ich noch hersetzen, daß meine Schüler bey meinen Unterredungen mit ihnen nicht eine Zeile aufschreiben dürfen, daß ich ihnen nicht einmal rathe, sich meine Versuche in Sokratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie anzuschaffen, und zur Repetition zu gebrauchen. Aufsetzen müssen sie zu Hause, was wir gehabt haben, und von Zeit zu Zeit mir einige Aufsätze überreichen, das

ist

*) Im siebenten Stücke des braunschweigischen Journals, philosophischen, philologischen und pädagogischen Inhalts, vom Jahr 1788. S. 257.

ists alles. Also können die Elemente der reinen Mathematik nicht schwer seyn, und dies beweiset auch die Lust, welche die Lernenden beweisen; denn selten zeigt der, der auf die beschriebene Art geführt, die Mathematik trocken findet, Fähigkeiten, die ihn zum Studieren berechtigten.

Ob die einseitigen Begriffe und Sätze, welche in Ansehung des Positiven und Negativen, desgleichen in Ansehung der Multiplication und Division allgemein aufgenommen worden sind, den Grad der Vollkommenheit haben, daß jede darin etwa vorgeschlagene Verbesserung, ohne alle weitere Untersuchung, durch einen bloßen Machtspruch, als ganz unnütz und überflüssig, zurückgewiesen werden dürfe? läßt sich nunmehr ebenfalls ausmachen. Bey diesem Punkte muß ich ausführlich seyn, weil ich dabey nicht bloß die wahre Beschaffenheit der Sache zu zeigen, sondern auch schon erfahrnem Widerspruche zu begegnen habe. Ich fange vom Positiven und Negativen an.

Woher ist es zuvörderst gekommen, daß man die positiven und negativen Größen in die Mathematik eingeführt hat? oder, da es leicht seyn könnte, daß die entgegengesetzten Größen in die Mathematik nicht eingeführt worden wären, sondern sich eingeschlichen oder aufgedrungen hätten: Woher rührt der Gebrauch der positiven und negativen Größen in der Mathematik? In

der

der Encyclopédie methodique, deren mathematische Theile die Herren *d'Alembert*, *Bossut*, *de la Lande*, *de Condorcet*, und andere ausgearbeitet haben, so wie auch in der Histoire des Mathematiques des Herrn *Montucla* finde ich darüber nichts. Also darf ich wenigstens als Muthmaßung annehmen, daß man auf die entgegengesetzten Größen, als auf eine besonders zu betrachtende Gattung, dadurch aufmerksam gemacht worden sey, weil bey jeder Zusammennehmung zweyer von ihnen die kleinere von der größern abgezogen werden muß, wenn man statt ihrer Eine ihnen gleiche Größe finden will. Diese Muthmaßung wird auch dadurch bestätiget, daß man nicht nur die entgegengesetzten Größen gewöhnlich durch solche erklärt, die, zusammengenommen, einander entweder ganz oder zum Theil aufheben, sondern auch die negativen Größen so oft durch solche, die kleiner als Null sind, beschreibt. Daß man sich durch den angeführten Umstand zuerst auf die entgegengesetzten Größen hat aufmerksam machen lassen, dawider ist nichts zu sagen; aber daß man bey dem, was auf diese Art größtentheils der Zufall herbeygeführt hat, stehen geblieben ist, kann auf keine Weise rühmlich seyn; und daß man, wenn jemand aus der wahren Quelle zu schöpfen sucht, ihn als einen Verirrten betrachtet, ist gar unverzeihlich. Neper kam durch eine besondere Veranlassung auf die Erfindung seiner Logarithmen, aber er selbst gab dem Urheber unserer jetzigen gemeinen Logarithmen, Heinrich Brigg, den

Rath,

Rath, ein anderes System zu berechnen. Was wären die wichtigsten Erfindungen geblieben, wenn es zum Gesetze hätte gemacht werden können und gemacht worden wäre, nie etwas dazu zu setzen? Doch zu der Frage: Auf was für eine Art gelangt man, bey der oben beschriebenen Methode, zu den entgegengesetzten Größen? Man gehe entweder am Ende der Planimetrie schon, oder auch erst nach der reinen Stereometrie, zur Buchstabenrechnung und Algebra fort, so muß man den Begriff der Größe überhaupt, von den einzelnen bis dahin betrachteten Größen abstrahiren, und, an Genauigkeit und zum scharfen Blicke im Bemerken gewöhnt, ist es wohl sehr natürlich, daß man aus diesem Begriffe kein Merkmal, was er, ohne Schaden der Allgemeinheit, enthalten kann, weglassen darf und wird. Nun hat man alle in der Geometrie untersuchten Gegenstände irgendwo sich denken müssen, und wenn sie ganz bestimmt gedacht werden sollten, so war es allemal nöthig, einen Punkt willkührlich festzusetzen, und von diesem aus alle Linien, die entweder an und für sich, oder zur Bestimmung anderer Größen nöthig waren, anfangen zu lassen. Indeß war dieses allein noch nicht hinlänglich, sondern es mußte noch außerdem die Richtung, in welcher die gedachten Linien, von dem festgesetzten Punkte aus, sich fort erstrecken sollten, dazu kommen. Um sich nun diese Richtung genau vorzustellen, war allemal wieder die Annahme einer Ebene und einer geraden Linie in dieser

Ebene,

Ebene, und zwar so, daß der angenommene Punkt in beyden lag, erforderlich; aber sobald diese festgesetzt waren, so blieb, außer Winkeln, weiter nichts nöthig, als die Anzeige, ob die zu gedenkenden Linien nach der einen oder nach der andern ihr entgegenstehenden Seite hin liegen sollten. Auf diese Art bestimmt hat man nun zwar nicht jedesmal die in der Geometrie untersuchten Gegenstände gedacht, sondern die Lage, außer in so fern sie durch Winkel gegeben wurde, willkührlich angesehen, und daher auch bis jetzt aus der Acht gelassen. Aber nunmehr will man ins Allgemeine gehen, und dazu ist es nöthig, daß man sich die einzelnen Dinge, von welchen man den allgemeinen Begriff abstrahiren will, nach allen, deutlich oder dunkel sonst gedachten, Bestimmungen vorstelle. Wendet man sich also mathematisch, und erst nach der Geometrie, zur Buchstabenrechnung und Algebra, so bemerkt man, beym Rückblicke auf die bis dahin betrachteten Gegenstände, allenthalben Menge der Theile, d. h. Größe. Eben so läßt sich allemal, ob es gleich noch nicht geschehen, bey diesen Gegenständen außer der Menge ihrer Theile, die immer wesentlich zu jeder Größe gehört, eine zufällige Eigenschaft, die ihnen unter entgegengesetzten Bedingungen zukommen kann, gedenken, und wenn man es thut, so werden sie dadurch genauer bestimmt, ohne gleichwohl als Größen das geringste von ihrer Allgemeinheit zu verlieren. Auf diese Art hat man also eine doppelte Gattung der Größen: einmal solche, bey denen

bloß

bloß auf das Wesentliche, die Menge der Theile, gesehen wird, und diese mögen absolute Größen heißen; zweytens solche, bey denen man außerdem auch auf eine zufällige Eigenschaft sieht, die unter entgegengesetzten Bedingungen da seyn kann, und diese wollen wir positive Größen in weiterer Bedeutung nennen. Jede absolute Größe kann demnach die gedachte zufällige Eigenschaft auf eine zwiefache Weise bekommen. Das erste Mal, da man ihr dieselbe beylegt, nennt man sie schlechtweg positive Größe; giebt man sie ihr aber darauf unter der andern entgegenstehenden Bedingung, so führet sie den Namen: negative Größe. Logische und metaphysische Wahrheit kömmt allen diesen Begriffen offenbar zu, da sie selbst in Ansehung vieler Anschauungen Realität haben; und da, um Begriffe als Begriffe zu untersuchen, nichts weiter als diese Wahrheit erfordert wird, so ist durch das Angeführte der Gegenstand der Buchstabenrechnung und Algebra in jenen Begriffen gegeben.*)

Auf

*) Es ist unstreitig ein gutes Kennzeichen für diese Herleitung und Bestimmung des Positiven und Negativen, daß sich daraus alles dasjenige, was Herr Kant in seinem Versuche, den Begriff der negativen Größe in die Weltweisheit einzuführen, Königsberg 1763, zur genauen Bestimmung des Begriffs der mathematischen entgegengesetzten Größen überhaupt und der negativen insbesondere gesagt hat, auf die leichteste Art herleiten läßt. Ich setze daraus folgendes her. Nachdem Herr Kant gleich anfänglich

Auf diese Art lernt man, um auch dieses hier gelegentlich zu berühren, den Gesichtspunkt, aus welchem die

lich bemerkt hat, daß die Opposition bey den entgegengesetzten Größen der Mathematiker keine logische, sondern eine reale Opposition ist, sagt er S. 13. 14. Bey dieser Realentgegensetzung ist folgender Satz als **Grundregel** zu bemerken. Die Realrepugnanz findet nur statt, in so ferne zwey Dinge als positive Gründe eins die Folge des andern aufhebt. Es sey Bewegkraft ein positiver Grund: so kann ein realer Widerstreit nur statt finden, in so fern eine andere Bewegkraft mit ihr in Verknüpfung sich gegenseitig die Folge aufheben. Zum allgemeinen Beweise dient folgendes. Die einander widerstreitenden Bestimmungen müssen erstlich in eben dem Subjekte angetroffen werden. Denn gesetzt, es sey eine Bestimmung in einem Dinge, und eine andere, welche man will, in einem andern, so entspringet daraus keine wirkliche Entgegensetzung. Zweytens, es kann eine der opponirten Bestimmungen bey einer Realentgegensetzung nicht das contradiktorische Gegentheil der andern seyn; denn alsdann wäre der Widerstreit logisch. Drittens, es kann eine Bestimmung nicht etwas anders verneinen, als was durch die andere gesetzt ist; denn darin liegt gar keine Entgegensetzung. Viertens, sie können, in so ferne sie einander widerstreiten, nicht alle beyde verneinend seyn, denn alsdann wird durch keine etwas gesetzt, was durch die andere aufgehoben würde. Demnach müssen in jeder Realentgegensetzung die Prädikate alle beyde positiv seyn, doch so, daß sich in der Verknüpfung die Folgen in demselben Subjekte gegenseitig aufheben. Auf solche Weise sind Dinge, deren eins als die Negative des andern betrachtet wird, beyde vor sich betrachtet, positiv, allein in einem Subjekte verbunden, ist die Folge

davon

die Buchstabenrechnung und Algebra zu betrachten sind, sogleich im Anfange in seiner wahren Beschaffenheit kennen, und ist dadurch vor so manchem Irrthume, und so manchem Fehltritte gesichert, welchem ohne denselben, nicht bloß Unwissende, sondern selbst große Buchstabenrechner ausgesetzt sind. Wenn man auf diesem Wege zur Buchstabenrechnung und Algebra gekommen ist, so weiß man, daß man es darin lediglich mit Begriffen zu thun hat, und kann daher auch den Sätzen derselben, weiter keine, als bloß die logische und metaphysische Wahrheit, beylegen. Dadurch gezwungen, untersucht man vor jeder Anwendung dieser Wissenschaften auf besondere Arten der Größe, theils, wie weit die anzuwendenden Behauptungen, in Rücksicht auf diese Größen, Realität haben, theils von welchen Seiten das Besondere durch das Allgemeine bestimmt und nicht bestimmt werden kann. Daß etwas logisch und metaphysisch wahr seyn könne, ohne deswegen für einzelne, der wirklichen Darstellung fähige, Gegenstände Realität zu haben, ist bekannt, und eben so,

davon das Zero. — Ueberhaupt mögte die Mathematik, gehörig behandelt, wohl schwerlich je auf Begriffe und Sätze führen, welche mit der wahren Philosophie nicht in der vollkommensten Harmonie ständen. Aber wenn man darin die Erklärungen entweder willkührlich annimmt, oder von einigen wenigen individuellen Fällen abstrahirt, so kann ein unnatürliches Verfahren in der Mathematik eben so wenig als in andern Wissenschaften ohne nachtheilige Folgen bleiben.

so, daß das Besondere durch das Allgemeine nicht erschöpft, oder durchaus und auf die leichteste Art bestimmt wird. Hat man dieses bey der Anwendung der Buchstabenrechnung und Algebra auf besondere Arten der Größe vor Augen, so findet es sich, sowohl mit dem davon zu erwartenden Nutzen, als auch mit der Verminderung der sonst unausbleiblich sich darstellenden Schwierigkeiten, fast von selbst. Daß man aber dagegen oft gefehlt habe, werden die nachher anzuführenden Beyspiele hinlänglich zeigen.

Zu der Vorstellung, daß die negativen Größen weniger als Null seyn, kommt man auf dem beschriebenen Wege, wenigstens so weit er dargelegt ist, und folglich im Anfange, gar nicht. Quantités négatives, sagt Herr d'*Alembert* im zweyten Theile des zweyten Bandes der Mathematiques in der Encyclopédie methodique, in dem Artikel Negatif; sont celles, qui sont affectées du signe —, et qui sont regardées par plusieurs mathématiciens, comme plus petites que zèro. Cette derniere idée n'est cependant pas juste. Les quantités négatives sont le contraire des positives: où le positif finit, le négatif commence. Il faut avouer qu'il n'est pas facile de fixer l'idée des quantités négatives, et que quelques habiles gens ont même contribué à l'embrouiller par les notions peu exactes, qu'ils en ont données. Dire que la quantité négative est au-dessous du rien,

 c'est

c'est avancer une chose qui ne se peut pas concevoir. Ceux qui prétendent que 1 n'est pas comparable à — 1, et que le rapport entre 1 et — 1 est différent du rapport entre — 1 et 1, sont dans une double erreur: 1°. parce qu'on divise tous les jours, dans les opérations algébriques, 1 par — 1: 2°. l'égalité du produit de — 1 par — 1, et de + 1 par + 1, fait voir, que 1 est à — 1 comme — 1 a 1. Diese Stelle macht einige Anmerkungen nothwendig. Anstatt einer Erklärung der negativen Größen wird darin zuerst die Bezeichnungsart derselben, und wie sie von einigen angesehen worden sind, angeführt. Dann werden sie als das Gegentheil der positiven Größen kenntlich gemacht, und von diesen steht in dem Artikel, Positif: Quantité positive, c'est une quantité qui a, ou est censée avoir le signe +, elle est ainsi appellée par opposition à la quantité négative. Ferner heißt es: Ou le positif finit, le négatif commence. Wenn man die Reihe der natürlichen Zahlen rückwärts fortsetzt, also bey folgender Reihe

$$\text{ꝛc.} -5 -4 -3 -2 -1\ 0,\ +1 +2 +3 +4 +5 + \text{ꝛc.}$$

so ist dies wahr; allein wenn man die Reihe nimmt, deren allgemeines Glied x^2 ist, oder

$$\text{ꝛc.} +25 +16 +9 +4 +1 +0 +1 +4 +9 +16 +25 + \text{ꝛc.}$$

desgleichen die, welche zum allgemeinen Gliede $\sqrt{x}$ hat, oder

$$\text{ꝛc.} + \sqrt{-3} + \sqrt{-2} + \sqrt{-1} + 0 + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \text{ꝛc.}$$

so

so fängt in jener das Positive, da wo es aufhört, wieder von neuem an, und hier geht man aus dem Positiven Möglichen ins Positive Imaginäre. Wenn daher ein d'Alembert die negativen Größen auf eine so unvollkommene Art beschreibt, so ist freylich der Gedanke natürlich, daß es schwer seyn müsse, den Begriff des Negativen genau zu bestimmen. Allein, da er zu den Grundbegriffen gehört, so muß entweder die genaue Bestimmung desselben sich finden lassen, oder es wird alles darauf gebaute unsicher. Auch verlangt Herr d'Alembert, daß $+1$ zu -1 im Verhältnisse soll betrachtet werden können, und auf die vorgegebene Unmöglichkeit dieser Vorstellung haben dagegen wieder andere, nicht weniger große, Mathematiker ihre Theorie von den Logarithmen der verneinten Größen gegründet. Endlich: Dire que la quantité négative est au-dessous du rien, c'est avancer une chose qui ne se peut pas concevoir; und doch muß man in der Differential-Rechnung das Negative nicht nur als kleiner denn Null, sondern sogar als größer, denn das Unendliche, im eigentlichen Verstande, ansehen können, oder es bleibt nicht bloß die größte Undeutlichkeit, sondern selbst Verwirrung, und zwar bey den wichtigsten Lehren, zurück. — Betritt man den Weg, der nach dem Obigen der Weg der wahren mathematischen Methode ist, so erscheinen zu Anfange die negativen Größen, eben so wohl als die absoluten und positiven, in einer sehr leicht gedenkbaren Gestalt; von den absoluten terscheiden sie sich dadurch, daß bey ihnen zugleich auf eine zufällige Eigenschaft gesehen wird, und von den positiven dadurch, daß sie diese zufällige Eigenschaft unter der entgegengesetzten Bedingung an sich haben. Dies ist der allgemeine, an jeder einzelnen Art der entgegengesetzten Größen leicht klar zu machende, Begriff des Negativen, der im Anfange vollkommen zureichend ist, da alle besondere Vorstellungen, die man sich in der Folge davon zu bilden hat, da wo sie nöthig werden, sehr leicht, und mit voller Gewißheit und Deutlichkeit, aus ihm abgeleitet werden können.

Ob es gleich sey, jede Größe als eine absolute oder als eine positive, in engern Verstande genommen, zu betrachten? heißt hiernach: Ob es gleich sey, bey der Untersuchung jeder Größe bloß auf ihre wesentlichen Eigenschaften, oder außer diesen auch noch auf eine zufällige Beschaffenheit, und zwar unter einer bestimmten Bedingung, zu sehen? Wer wäre im Stande, hierauf Ja zu antworten! Aber daß man bis jetzt die absoluten Größen von den positiven meistens gar nicht unterschieden habe, und daß daraus sehr nachtheilige Folgen geflossen sind, habe ich bereits oben S. 20 berührt, und brauche es daher hier nicht zu widerholen.

Endlich was die berüchtigte Forderung betrifft, daß man bey den einfachen Operationen der Algebra die Einheit

heit allemal positiv müsse, so kann ich nicht umhin umhin, ausdrücklich anzuführen, daß mir erst ganz kürzlich der Recensent des ersten Theils meiner Uebersetzung der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen, im 41sten Stück der Greifswaldischen kritischen Nachrichten vom vorigen Jahre die Ehre erzeigt hat, mich gefälligst, wo nicht dieselbe zu lehren, doch daran zu erinnern. Wenn ich bey den Urtheilen, die über meine Schriften gefällt werden, vorzüglich auf Lob sähe, so hätte ich vielleicht Ursache, diesem Recensenten zu danken, und es fließt daher dasjenige, was ich sagen werde, nicht aus Erbitterung. Indeß kann es ein Recensent auch gut meinen, und demungeachtet durch sein Urtheil, wenn es der Sache nicht angemessen ist, insbesondere, wenn dabey der Gegenstand, vielleicht, weil er zu flüchtig betrachtet wurde, verwechselt worden, dem Autor und seiner Schrift nachtheilig werden; und in einem solchen Falle ist es unstreitig dem letztern nicht zu verdenken, wenn er nicht ganz gleichgültig dabey bleibt. Angenehm kann es vollends auf keine Weise seyn, wenn man wegen ihres Einflusses äusserst wichtige Materien von den Dunkelheiten und Schwierigkeiten zu befreyen sucht, welche sich dabey finden, und sich bey seinen Untersuchungen die strengste Sorgfalt zur Pflicht macht, und nur dann von den Meinungen anderer abzugehen sich erlaubt, wenn sowohl die Folgen als die Gründe davon es zur Pflicht machen; seine Untersuchungen bloß für ein nicht unnützes

Gedankenspiel erklärt zu sehen, und sich dabey zugleich über Dinge belehren zu lassen, die Niemanden unbekannt seyn können. Was mir aber in seiner Recension vorzüglich mißfällt, ist folgendes. Ich habe der gedachten Uebersetzung dreyzehn Bogen Zusätze beygefügt, wovon die Hälfte nichts als Auszüge aus Herrn Eulers übrigen Schriften enthält. Auf etwa zwey bis drey Bogen suche ich die Lehre von den Logarithmen zu vervollständigen, und von den darin bisher gewesenen Irrthümern zu reinigen. Ein Paar Seiten brauche ich, um eine gewisse Vorstellungsart von den Zahlen mitzutheilen. Diese Vorstellungsart von den Zahlen nun nennt der Recensent die meinige; und nicht ich will sie einführen, sondern die höhere Arithmetik, vorausgesetzt, daß man ihre Stimme verstehe, befiehlt, daß man sie bey ihren Lehren zu Hülfe nehme. Ferner soll diese Vorstellungsart von den Zahlen das wichtigste in den gedachten Zusätzen seyn. Sollte damit gemeint seyn, daß ich auf wenig Seiten wichtigere Dinge gesagt hätte, als Herr Euler auf mehrern Bogen, so wäre ein solches Lob das sicherste Kennzeichen, daß meine ganze Theorie von den Logarithmen der vermeinten Zahlen, denn diese kann ich mir allerdings zueignen, durchgestrichen zu werden verdiene. Aber ich soll auch eine nothwendige und allgemein angenommene Bedingung geändert haben, und es daher kein Wunder seyn, daß ich auf Sätze komme, die bisher allgemein angenommenen Behauptungen widersprechen. Dergleichen Kunstgriffe überlasse ich Recensenten, wie dem, der den zweyten Theil meiner Anleitung zur juristischen und politischen Rechenkunst in der allgemeinen deutschen Bibliothek angezeigt hat. Nenne er mir doch eine einzige Behauptung unter den meinigen, die einer allgemein angenommenen widerspräche. Herrn Eulers Theorie von den Logarithmen der negativen Zahlen habe ich verworfen, allein Herr d'Alembert hat in seinen Opuscules mathematiques ja auch schon behauptet, Herr Euler habe diese Sache noch nicht ins Reine gebracht. Was man in der Lehre von den Logarithmen ganz allgemein angenommen hat, weil man unumstößliche Gründe dafür hatte, habe ich unangetastet gelassen, und werde es sicher nie antasten. Aber die Lücken, die noch da waren, habe ich auszufüllen, die Widersprüche, die statt fanden, aus dem Wege zu räumen gesucht; und dabey mußte ich freylich, was man, ohne Grund, als allgemein gültig angesehen hatte, in seine gehörigen Grenzen zurückweisen. Doch zur Sache.

Die Einheit soll also allemal positiv angenommen werden müssen. Was ist Einheit? Einheit ist, nach welcher jedes Ding Eins heißt; sagt Euclides im siebenten Buche seiner Elemente, und ich finde bey keinem Neuern etwas besseres. Wenn also + 1 die Einheit bey Zahlen seyn soll, so muß entweder — 1 auch + 1, oder

— 1 nicht 1 seyn. Eine Zahl ist ferner die aus Einheiten bestehende Vielheit. Da man keine negative Zahl bekommt, man mag die positive Einheit wiederholen und theilen, wie und wie vielmal man will, so wären folglich die negativen Zahlen gar keine Zahlen. Das sind doch wohl offenbarere Widersprüche, als wenn ein unendlich kleines in einer Rücksicht, in anderer Betrachtung ein unendlich großes genannt wird! Schon dieses kann darauf führen, daß man, wenn vom Allgemeinen die Rede ist, die Einheit absolut anzunehmen habe: wenn von blossen Zahlen gesprochen wird, dann kann man sie auch positiv setzen, aber nothwendig ist es nicht, außer, wenn man nicht im Stande ist, aus Begriffen zu folgern; indeß eine vollständige Auseinandersetzung dieses letztern gehört hier nicht her. Dagegen aber noch die Frage: Was hat man für ein Recht, die gedachte Behauptung zu einer Forderung zu machen? Etwa das, daß man dieselbe einsieht, sobald man die Worte versteht? Daß man die Einheit positiv annehmen könne, sieht man freylich dabey ein; allein daß man sie allemal so betrachten müsse, das läßt sich ja nicht einsehen, wenn man die Worte, insbesondere das **Müssen**, versteht, denn es verträgt sich nicht mit dem Begriffe der Einheit. Zwey Punkte sich zu gedenken, ohne ihre Entfernung sich zugleich vorzustellen, ist uns unmöglich. Daher ist der Satz: Zwischen jeden zwey gegebenen Punkten eine gerade Linie zu ziehen, wahre Forderung;

aber

aber jene Behauptung ist ja willkührlich, und nur daher angenommen worden, weil man sich nicht besser zu helfen wußte, und dabey die Schwierigkeiten übersah, in welche sie in der Folge führt. Den Einwurf aber halte ich kaum des Berührens werth, daß, in der Mathematik, Möglichkeit Wirklichkeit sey; denn bey genauerer Untersuchung zeigt sich zu offenbar, daß nur der, der das Wesen der Mathematik gar nicht kennt, im Stande ist, diese Behauptung in dem gewöhnlichen Sinne zu gebrauchen.

Ehe ich das, was sonst noch hieher gehört, anführe, muß ich zuvor der gewöhnlichen Begriffe von der Multiplication und Division gedenken. Das erste, was der Mathematiker, nachdem er die Begriffe der Größe, sowohl überhaupt, als auch der absoluten und in weitern Verstande positiven, und darauf der schlechthin sogenannten positiven und negativen Größe, festgesetzt hat, thun muß, ist dieses, daß er für alle diese Größen schickliche Zeichen aufsucht. Er habe sie gefunden, und seine Größen auf die gewöhnliche Art construirt, so frägt sich, was er nun mit diesen Constructionen anzufangen habe? Er hat schon in der Geometrie mit Constructionen sich beschäftiget; er überblickt also das, was er mit den geometrischen Constructionen vorgenommen hat, und führt auch diese einzelnen Operationen ins Allgemeine. Oder vielmehr, er überlegt die Veränderungen, die er in den geometrischen Constructionen mit den dadurch ausgedruckten

druckten Größen unternommen. Diese Veränderungen, ins Allgemeine geführt, sind, Zusammennehmen und Trennen, Zusammensetzen und Auflösen. Er untersucht daher, ob sich diese Veränderungen auch mit der Größe überhaupt und ihren verschiedenen Arten, in willkührlichen Construktionen vornehmen lassen; er nimmt solches wahr und setzt daher für sie bequeme Zeichen fest. Auf diese Art entdeckt man die Quelle der einfachen algebraischen Operationen, und wenn man diese Operationen mit den Worten, Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren benennen will, so ist dawider nichts einzuwenden, ja es finden sich selbst in der Folge, aber auch da erst, nicht unwichtige Gründe dazu. Allein was man mit einem jeden dieser Ausdrücke für einen Begriff verknüpfen wolle, das ist nicht willkührlich, denn der Begriff muß früher da seyn, als seine Benennung. Auf diese Art wird es auch Forderung, jede zwey gegebene Größen nach den einfachen Operationen zu verändern, und das Uebrige ist oben schon kürzlich angezeigt worden.

Was heißt nun also Multipliciren, oder eigentlich, was muß Multipliciren heißen? Es muß dadurch nothwendig eine Operation angezeigt werden, wobey zwey gerade Linien, mit einander multiplicirt, ein Rechteck geben; und die allgemeine Bedeutung ist folglich: Größen mit einander multipliciren, heißt: aus ihnen eine Größe finden, welcher die Eigenschaften der gegebenen zusammen zukommen. Die Eigenschaft einer geraden Linie z. B. ist, daß sie eine Dimension darstellt, oder hat. Zwey gerade Linien mit einander multipliciren, heißt also eine Größe finden, die zwey Dimensionen darstellt, oder zwey Dimensionen hat, und das ist ja nichts anders als ein Rechteck. Ueberhaupt hat dieser Begriff das Schwere nicht, was ihm einige beygelegt haben, und doch lassen sich alle bey den besondern Arten der Größe brauchbare speciellere Vorstellungen sehr bequem aus ihm ableiten. Da ich bey meinem Unterrichte in der Buchstabenrechnung und Algebra, ich mag ihn Kindern, oder Jünglingen, oder Männern ertheilen, denselben allemal zum Grunde lege, so darf ich mich bey dieser Versicherung auf viele Erfahrungen, ja selbst auf vorsätzlich angestellte Versuche berufen. Bey bloßen Zahlen ist er freylich nicht sogleich sichtbar, allein man nehme aus der angewandten Mathematik, z. B. die Fälle, wo man Kräfte mit ihren Entfernungen, oder Lichtmengen mit Ebenen multipliciren soll, und frage sich, wie hier das Produkt im Allgemeinen beschaffen sey. Auch darf dabey das nicht aus der Acht gelassen werden, daß dieser Begriff bey der Untersuchung der besondern Arten der Größe jedesmal weiter bestimmt werden muß, und daß man denselben, wo man will, allemal mit folgendem vertauschen kann: Zwey Größen mit einander multipliciren, heißt, aus der einen auf eben die Art eine neue Größe hervorbringen, auf welche die andere aus der ersten absoluten Einheit, oder aus Eins entsteht. Doch gesetzt auch, daß die gewöhnliche Erklärung der Multiplication an und für sich leichter zu fassen sey; so kommt es in der Mathematik auf Definitionen an; und deren Leichtigkeit muß darnach bestimmt werden, ob die daraus abzuleitenden Sätze aus ihnen ungezwungen, und ohne ermüdende Umwege fliessen. Wie es sich in diesem Stücke mit jener Vorstellung verhalte, davon habe ich bereits in der ersten Abtheilung des ersten Abschnitts gesprochen; daß aber die vorhin mitgetheilte Erklärung der Multiplication bey dem Gebrauche sich desto mehr empfehle, je weiter man in der Mathematik fortgeht, dieses muß ich jetzt, auch wegen einiger mich betreffenden Gründe, ausführlicher darthun.

Ich habe nemlich meinen Begriff von der Multiplication bereits, theils im zweyten Theile meiner Anleitung zur praktischen Rechenkunst, in dem Abschnitte, der geometrische Rechnungen enthält, theils in meinen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra mitgetheilt. Der Recensent der ersten Schrift in der allgemeinen deutschen Bibliothek fertigt dieselbe, nachdem er über das Wohlgefallen der Autoren an ihren Ideen gespottet hat, durch den Machtspruch ab: Das Produkt zweyer geraden Linien ist allemal wieder eine gerade Linie; und sagt zugleich, daß ihm die Lust vergangen sey, meine Theorie zu ergründen. Der andern Schrift ist, so viel ich weiß, bis jetzt bloß in den Göttingischen

gelehr-

gelehrten Anzeigen gedacht worden. Ich habe darin alle die Abänderungen, welche mir in der Buchstabenrechnung und Algebra nöthig scheinen, auch ein Paar neue Sätze in der Lehre von den Logarithmen, kurz dargelegt, und mich in einer, zwey und zwanzig Seiten langen, Vorrede über die Nothwendigkeit derselben erklärt. Von diesem allen steht in jener Anzeige kein Wort, sondern es ist dieselbe lediglich ein Auszug aus einer auf zwey kurzen Seiten stehenden Vorrede, die anfänglich für diese Schrift bestimmt war, aber bey nachmals erweitertem Plane ganz unpassend wurde. Solche Geringschätzung zu erfahren, könnte von aller Schriftstellerarbeit abschrecken, wenn man nicht, theils sich seiner Absicht und seiner Sache bewußt wäre, theils aus andern sicherern Gründen, als öfters Recensionen sind, überzeugt wäre, daß man zum wirklichen Nutzen arbeite.

Was die Unergründlichkeit meiner Theorie von der Multiplication betrifft, so sagt Herr Kästner in seinem schon angeführten Aufsatze, über die beste Art, Kindern Geometrie und Arithmetik beyzubringen, gelegentlich: „Privatissima, bey denen es dem Lehrlinge ein Ernst ist zu lernen, geben dem Lehrer die Schwierigkeiten zu erkennen, die ein oder der andere Lernende bey dieser oder jener Darstellung findet, und veranlassen, darauf zu denken, wie man solche Schwierigkeiten hebt, oder ihnen ausweicht; und demnach mag es mir mein Tadler nicht verdenken, wenn ich meinem eigenen, auf eine Menge von Beobachtungen gegründeten, Urtheile mehr Wahrheit beylege, als dem seinigen. Daß man meine Darstellung als unwichtig betrachtet, muß ich mir gefallen lassen; aber natürlich ist es, unter den angeführten Umständen und bey meiner gegenwärtigen Absicht, auch, daß ich nun das Gegentheil, so gut es mir möglich seyn wird, zu zeigen suche.

In was für Schwierigkeiten die Behauptung verwickele, daß das Produkt gerader Linien allemal wieder eine gerade Linie sey; habe ich oben S. 12—18 an mehrern Beyspielen aus einander gesetzt, und es wäre sehr leicht, ihre Anzahl zu vergrößern. Jetzt nehme man an, daß meine Erklärung von der Multiplication als Definition zum Grunde liegen, und also das Produkt zweyer geraden Linien als ein Rechteck, das Produkt aus dreyen als ein rechtwinkliges Parallelepipedum, und das Produkt aus mehrern als eine in Anschauung nicht darstellbare Größe von eben so viel Dimensionen betrachtet werden müsse: so ist zuvörderst die aus Herrn Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen, oben S. 16. 17 angeführte Behauptung nicht nur durchaus gegründet und nothwendig, sondern sie kann dann selbst, so wie es eigentlich seyn muß, gleich im Anfange der algebraisch-analytischen Untersuchung der Curven ihren Platz bekommen.

men. Ferner fällt alle, bey einer vollständig deutlichen Auseinandersetzung der Natur der durch algebraische Gleichungen ausgedruckten Curven, sonst unvermeidliche und ermüdende Weitläuftigkeit weg, und man kann alle auf die einfachen Operationen sich beziehende Ausdrücke im eigentlichen Verstande nehmen. Insbesondere wird dadurch die Lehre von der Construktion der Gleichungen erleichtert, in ein helleres Licht gesetzt, zum Gebrauche fruchtbarer gemacht, und erweitert, *) indem sich dabey die jedesmal einzuschlagenden Wege von selbst und mit allen ihren Gründen darbieten; und überhaupt findet auf diese Art die vollkommenste Harmonie zwischen den Lehren der Buchstabenrechnung und Algebra, und den Sätzen der Geometrie statt.

Daß einerley Zeichen bey zwey Faktoren im Produkte + und verschiedene — geben, läßt sich, wenn man die

*) Diese Behauptung kann, ja sie muß vielleicht, diejenigen befremden, welche dieselbe noch nicht in ihrer wahren Bedeutung und nach allen ihren Gründen untersucht haben. Gleichwohl sehe ich mich genöthiget, ihre Rechtfertigung, weil dabey theils eine gründliche Theorie der Anwendung der Buchstabenrechnung und Algebra auf die Geometrie vorausgesetzt, theils eine ausführliche Erläuterung an einzelnen Beyspielen erfordert wird, dem Versuche einer vollständigen Theorie der mathematischen Methode, dessen in der Vorrede gedacht worden ist, vorzubehalten.

die Multiplication als innige Vereinigung der gegebenen Größen zu Einer betrachtet, auch ohne den Satz darthun, daß man die Einheit allemal positiv annehmen müsse; und zugleich nimmt man dabey die Fälle wahr, in welchen allein jene Behauptung volle Wahrheit hat. Eben so verhält es sich auch, wenn man von der Erklärung ausgeht, daß zwey Größen mit einander multipliciren heiße: aus der einen eine neue Größe auf die Art hervorbringen, wie die andere aus Eins entsteht. Doch es wird nicht undienlich seyn, über diese Materie, die in der ganzen Mathematik von der äußersten Wichtigkeit ist, und gleichwohl noch immer mit manchen Schwierigkeiten zu kämpfen hat, etwas ausführlicher zu reden.

Es sey $a \times b = c$, so findet man nach jeder von den gedachten Erklärungen

$$+a \times +b = ++c$$
$$+a \times -b = +-c$$
$$-a \times +b = -+c$$
$$-a \times -b = --c$$

und wenn also bey den Faktoren auf eine zufällige Eigenschaft unter entgegengesetzten Bedingungen gesehen wird, so muß eigentlich das Produkt aus zwey Faktoren jedesmal eine zwiefache, von dergleichen Eigenschaften hergenommene, Bestimmung erhalten. Auf diese Art geben jede zwey Faktoren ein vierfaches Produkt. Will man

indeß

indeß im Allgemeinen bleiben, und dieses ist in der Buchstabenrechnung und Algebra, an sich genommen, nothwendig: so kann man jene vier Fälle bloß darnach von einander unterscheiden, ob die beyden in Erwägung zu ziehenden zufälligen Eigenschaften, von einerley oder von verschiedener Art sind. Man findet also in der Buchstabenrechnung durch die Multiplication zweyer positiven Größen, in weiterer Bedeutung, eigentlich nichts mehr als zwey Gattungen von Produkten, davon jede zwey durchaus bestimmte Produkte unter sich begreift. Ferner sind diese Gattungen einander entgegengesetzt, und es kann folglich die eine als positiv und die andere als negativ angesehen werden. Nach der Regel endlich: Von entgegengesetzten Größen erhält allemal die den Namen der positiven, welche zuerst gesetzt wird; kommt derjenigen Gattung, wobey beyde in Erwägung zu ziehende zufällige Eigenschaften von einerley Art sind, die Benennung positiv zu. Daß man auf diesem Wege den bekannten Lehrsatz von der Beschaffenheit des Produkts zweyer in weiterm Sinne positiver Größen finden könne, leidet hoffentlich keinen Zweifel; allein daß derselbe eine größere Fertigkeit im allgemeinen Denken bey dem Schüler voraussetze, und also auch schwerer sey, als der gewöhnliche, will ich eben so wenig leugnen. Der daher mögliche Einwurf läßt sich indeß durch folgende Betrachtung aus dem Wege räumen.

Wenn der Schüler der Mathematik auf die oben beschriebene Art sich erst nach der reinen Geometrie zur Buchstabenrechnung wendet, so kann ihm die Fertigkeit im allgemeinen Denken nicht entstehen, die erfordert wird, eine Auseinandersetzung, wie die vorhergehende, mit Leichtigkeit und voller Deutlichkeit zu fassen; und sie kann folglich nur für den zu schwer seyn, der sich zu früh an die Buchstabenrechnung macht. Aber was für ein wichtiger Vortheil ist dagegen auf der andern Seite der, daß man bey der mitgetheilten Entwickelung die positiven und negativen Produkte sogleich, nicht als durchaus bestimmte Größen, sondern als Gattungen kennen lernt? Wie oft ist dem Lernenden, der den gewöhnlichen Weg geführt worden ist, in der Lehre von der Ausziehung der Quadratwurzel der Satz auffallend, daß jedes positive Quadrat zwey einander entgegengesetzte sonst gleiche Wurzeln habe? da es hingegen Niemanden anders als sehr natürlich vorkommen kann, daß eine Größe, die man sich auf eine zwiefache Art aus gleichen Bestandtheilen zusammengesetzt vorstellen soll, auch auf eine zwiefache Weise in diese Bestandtheile müssen aufgelöset werden können. Auch macht man jene Beschaffenheit der positiven Quadrate jedesmal hiedurch begreiflich; allein bey dem gewöhnlichen Verfahren wird der Schüler erst hinterher darauf geführt, da er es bey dem hier beschriebenen schon vorher und von selbst weiß. Noch größer aber wird dieser Vortheil bey den Produkten aus drey und mehrern Faktoren.

Wenn

Wenn bey zwey Faktoren einerley Zeichen ein positives, und verschiedene ein negatives Produkt geben, so ist, nach einer bekannten Art zu schließen, das Produkt aus mehrern Faktoren allemal positiv, wenn entweder alle Faktoren positiv, oder die negativen in gerader Anzahl da sind; negativ hingegen, wenn unter den Faktoren negative in ungerader Anzahl vorkommen. So wie aber die positiven und negativen Produkte aus zwey Faktoren nicht einzelne Produkte, sondern Gattungen sind, so findet dieses auch bey den Produkten aus mehrern Faktoren, und zwar auf die Art statt, daß diese Gattungen desto mehr durchaus bestimmte Produkte unter sich begreifen, je größer die Anzahl ihrer Faktoren ist. Es sey z. B. $abc = p$, so ist

$$+p = \begin{cases} +a \,.\, +b \,.\, +c \\ +a \,.\, -b \,.\, -c \\ -a \,.\, +b \,.\, -c \\ -a \,.\, -b \,.\, +c \end{cases} \text{und}$$

$$-p = \begin{cases} -a \,.\, -b \,.\, -c \\ -a \,.\, +b \,.\, +c \\ +a \,.\, -b \,.\, +c \\ +a \,.\, +b \,.\, -c \end{cases}$$

Ferner sey $abcd = p'$ so ist

$$+p' = \begin{cases} +a\,.\,+b\,.\,+c\,.\,+d \\ +a\,.\,+b\,.\,-c\,.\,-d \\ +a\,.\,-b\,.\,+c\,.\,-d \\ +a\,.\,-b\,.\,-c\,.\,+d \\ -a\,.\,+b\,.\,+c\,.\,-d \\ -a\,.\,+b\,.\,-c\,.\,+d \\ -a\,.\,-b\,.\,+c\,.\,+d \\ -a\,.\,-b\,.\,-c\,.\,-d \end{cases}$$

$$-p' = \begin{cases} +a\,.\,-b\,.\,-c\,.\,-d \\ -a\,.\,+b\,.\,-c\,.\,-d \\ -a\,.\,-b\,.\,+c\,.\,-d \\ -a\,.\,-b\,.\,-c\,.\,+d \\ -a\,.\,+b\,.\,+c\,.\,+d \\ +a\,.\,-b\,.\,+c\,.\,+d \\ +a\,.\,+b\,.\,-c\,.\,+d \\ +a\,.\,+b\,.\,+c\,.\,-d \end{cases}$$

Ueberhaupt aber hat jedes positive oder negative Produkt eine so vielfache Bedeutung, als die Potestät 2^{n-1} Einheiten enthält, wenn n die Zahl der Faktoren in jenen Produkten bedeutet.

Dieses wollen wir auf die positiven und negativen Potestäten und ihre Wurzeln anwenden. Gewöhnlich legt man jeder positiven oder negativen Potestät so viel reelle oder imaginäre Wurzeln bey, als ihr Exponent Einheiten hat, ohne daß man dabey dessen im mindesten Erwähnung thut, daß diese Behauptung nur unter ge-

wissen

wissen Umständen wahr ist, und also nur eine eingeschränkte oder bedingte Allgemeinheit hat. Bey der zweyten Potestät entsteht daher keine Schwierigkeit, aber bey der dritten fängt sie schon an, sich zu äußern. Wenn durch einen nach Belieben angenommenen Punkt drey gerade Linien auf einander senkrecht gelegt werden, um darnach die Lage eines Würfels genau zu bestimmen, so sind offenbar acht verschiedene Fälle möglich, und davon gehören viere dem positiven, und viere dem negativen Würfel zu. Bey dem einen von den positiven Würfeln sind ferner alle Seiten positiv, und bey dem einen negativen eben so alle Seiten negativ. Bey ihnen läßt sich also auch die Seite oder Wurzel durchaus auf einmal angeben, aber bey den übrigen ist dieses unmöglich, weil ihre Seiten theils positiv theils negativ sind. Hiernach hat also jeder positive Würfel vier Wurzeln, eine reelle positive, und drey imaginäre; und jeder negative Würfel eine reelle negative Wurzel und drey imaginäre. Auf ähnliche Art kommen jedem positiven oder negativen Biquadrate acht Wurzeln, jeder fünften Potestät sechszehn, und überhaupt jeder positiven oder negativen $n$ten Potestät 2^{n-1} Wurzeln zu, und zwar so, daß wenn n eine gerade Zahl ist, die positive Potestät allemal zwey, die negative hingegen gar keine reelle Wurzel hat; ist hingegen n eine ungerade Zahl, so hat jede positive Potestät eine reelle positive, und jede negative eine reelle negative Wurzel, und die übrigen sind imaginär. Wie verträgt sich dieses mit der Behauptung, daß $\sqrt[n]{x}$ allemal $n$fach sey?

Bey der Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie ist es etwas sehr gewöhnliches, die Seite des Quadrats als die Wurzel desselben zu betrachten, und eben dieses mit der Seite des Würfels in Ansehung des Würfels zu thun. Bey dem Quadrate stimmen die geometrischen Construktionen aufs vollkommenste mit den arithmetischen Sätzen überein, und man pflegt auch öfters auf diese Uebereinstimmung den Schüler hinzuweisen. Kann man nicht zeigen, woher die Verschiedenheit schon bey den Würfeln rührt, und bey den folgenden Potestäten immer größer wird, so entsteht hier, wenigstens für diejenigen eine Schwierigkeit, welche, allenthalben deutliche Einsichten zu bekommen, gewöhnt sind. Gehoben kann indeß dieselbe leicht werden, und zwar auf folgende Art. Alle bey a^n mögliche Fälle, wenn a in weiterer Bedeutung positiv seyn soll, sind diese. Es können in a^n enthalten seyn.

positive a	negative a
n	o
n — 1	1
n — 2	2
n — 3	3
.	.
.	.
3	n — 3
2	n — 2
1	n — 1
o	n

Ist

Ist nun n eine ungerade Zahl, so ist a^n positiv, wenn darin enthalten sind,

positive a	negative a
n	0
n — 2	2
n — 4	4
.	.
.	.
.	.
3	n — 3
1	n — 1

negativ aber, wenn darin enthalten sind,

positive a	negative a
n — 1	1
n — 3	3
n — 5	5
.	.
.	.
.	.
4	n — 4
2	n — 2
0	n

Ist hingegen n eine gerade Zahl, so ist a^n positiv, wenn darin enthalten sind,

positive a	negative a
n	0
n — 2	2
n — 4	4
.	.
.	.
.	.

4	$n - 4$
2	$n - 2$
0	n

und negativ, wenn darin enthalten sind,

positive a	negative a
$n - 1$	1
$n - 3$	3
$n - 5$	5
.	.
.	.
.	.
5	$n - 5$
3	$n - 3$
1	$n - 1$

Es kann demnach $+ a^n$, wenn man dabey auf die Menge der positiven und negativen a, woraus es entstehen kann, Rücksicht nimmt,

wenn n ist	Bedeutungen haben
eine ungerade Zahl	$\frac{n + 1}{2}$
eine gerade Zahl	$\frac{n + 2}{2}$

und $- a^n$ bekommt,

wenn n ist	Bedeutungen
eine ungerade Zahl	$\frac{n + 1}{2}$
eine gerade Zahl	$\frac{n}{1}$

Unter

Unter den $\frac{n+1}{2}$ Bedeutungen, die $+a^n$ und $-a^n$ haben, wenn n eine ungerade Zahl ist, ist ferner bey beyden eine, wo alle Wurzeln von a^n einerley Zeichen haben; und unter den $\frac{n+2}{2}$ Bedeutungen, die $+a^n$ hat, wenn n eine gerade Zahl ist, sind dergleichen zwey; in allen übrigen Fällen ist $+a^n$ und $-a^n$ aus verschiedenartigen Wurzeln zusammengesetzt. Es hat demnach, wenn n eine ungerade Zahl ist, sowohl $+a^n$ als $-a^n$ eine reelle, und $\frac{n-1}{2}$ imaginäre Wurzeln; wenn aber n eine gerade Zahl ist, so kommen $+a^n$ zwey reelle Wurzeln, eine positive und eine negative, und $\frac{n-2}{2}$ imaginäre, und $-a^n$ lauter imaginäre Wurzeln und zwar $\frac{n}{2}$ zu. Auf diese Art hat also jede positive und negative Dignität eben so viel und eben solche reelle, aber dagegen jedesmal nur halb so viel imaginäre Wurzeln als nach der gewöhnlichen Vorstellung, und die Verschiedenheit ist wenigstens schon geringer, als vorhin. Da aber die imaginären Wurzeln, bey der gegenwärtigen Bestimmung, nicht sowohl selbst, als vielmehr bloß ihren Quellen nach, angegeben, bey dem gewöhnlichen Verfahren hingegen, so weit als möglich entwickelt, in Construktionen dargestellt werden, so ist auch leicht einzusehen, daß man im letztern Falle eine größere Anzahl bekommen

muß;

muß; und daß dieselbe gerade doppelt so groß ist, rührt daher, weil man bey der gedachten Darstellung der imaginären Wurzeln, ihren imaginären Theil durch der Ausziehung der Quadratwurzel bestimmt, und diese Wurzel theils positiv theils negativ nimmt. Es läßt sich demnach die Frage: Wie viel Wurzeln einer jeden positiven oder negativen Potestät zukommen? auf eine dreyfache Art beantworten. Nach der ersten von mir beschriebenen Art ist z. B.

$$\sqrt[3]{+1} = \begin{cases} \sqrt[3]{(+1 . +1 . +1.)} = +1 \\ \sqrt[3]{(+1 . -1 . -1)} \\ \sqrt[3]{(-1 . +1 . -1)} \\ \sqrt[3]{(-1 . -1 . +1)} \end{cases}$$

Nach der andern von mir beschriebenen Art hingegen wird

$$\sqrt[3]{+1} = \begin{cases} \sqrt[3]{(+1 . +1 . +1 .)} = +1 \\ \sqrt[3]{(+1 . -1 . -1)} \end{cases}$$

Und nach der gewöhnlichen Art, die Cubikwurzeln insgesammt zu finden, ist

$$\sqrt[3]{+1} = \begin{cases} \sqrt[3]{(+1.+1.+1)} = +1 \\ \sqrt[3]{(+1.-1.-1)} = \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2} \\ \dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

so

so daß in den beyden letzten Fällen die mit + 1, — 1, — 1 möglichen Versetzungen nicht in Betrachtung gezogen werden. Es führt demnach meine Vorstellung von der Multiplication und von den entgegengesetzten Größen, auch hier auf keine Sätze, welche mit allgemein angenommenen und streng erwiesenen Behauptungen in wirklichem Widerspruche ständen; sondern sie veranlaßt nur, den jedesmal genommenen Gesichtspunkt genau zu denken und vor Augen zu behalten, und giebt zugleich noch andere an die Hand. Daß dieses in der Folge nicht ohne wichtige Vortheile bleiben könne, versteht sich fast von selbst. So lassen sich z. B. in der Lehre von den Wurzeln der Gleichungen daraus viele Umstände weit leichter, deutlicher und genauer bestimmen, als es ohne dasselbe möglich ist; nnd noch größer ist sein Einfluß bey der Auseinandersetzung der Natur der imaginären Größen, welche noch so mancher Entwickelung bedarf. Doch auch angenommen, daß es nur dazu diene, manche Frage zu beantworten, die, unbeantwortet, Zweifel über andere Gegenstände zurücklassen könnte, so wäre selbst dies schon in einer Wissenschaft, die nicht nöthig haben muß sich zu scheuen, ihre Behauptungen von allen Seiten betrachten zu lassen, und von der man fordern kann, daß sie alle Einwendungen, sie mögen noch so wenig oder noch so vielen Schein haben, aus dem Wege räume, wichtig genug.

Gesetzt, daß nunmehr alle Fälle aufgesucht werden sollen, welche bey der S. 17 und 18 berührten Aufgabe statt finden können, wenn man das Wort Summe algebraisch nimmt: so sind gegeben $s = x + y$, und $p = xy$. Setzt man also $p = qr$, so wird

$$+p = \begin{cases} +q \cdot +r \\ -q \cdot -r \end{cases} \text{ und } s = \begin{matrix} \begin{cases} +x+y \\ -x-y \end{cases} \\ \begin{cases} +x+y \\ -x-y \end{cases} \end{matrix}$$

$$-p \begin{cases} +q \cdot -r \\ -q \cdot +r \end{cases} \text{ und } s \begin{matrix} \begin{cases} +x-y \\ -x+y \end{cases} \\ \begin{cases} +x-y \\ -x+y \end{cases} \end{matrix}$$

Auf diese Art ergeben sich die oben gedachten acht Fälle ohne die mindeste Schwierigkeit, und läßt man p ein Rechteck, und s eine gerade Linie seyn, so kann man dieselben insgesammt vermittelst der beyden vorletzten Sätze im dritten Buche der Euclideischen Elemente geometrisch behandeln und aufgelöset darstellen, ohne dazu der Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren zu bedürfen.

Will man indeß die Lehre von den Proportional-Linien zu Hülfe nehmen, so kann man, wenn man das Produkt zweyer geraden Linien als ein Rechteck betrachtet, solches, ohne die willkührliche Annahme einer Einheit nöthig zu haben, und also auf eine bequemere Art thun, als wenn man die einseitige Behauptung, das das

Produkt

Produkt gerader Linien wieder eine gerade Linie sey, zum Grunde legt. Ist nemlich p ein Rechteck, so kann man allemal q willkührlich nehmen, und darauf r finden, so daß $p = qr$ sey. Man hat also $qr = xy$, folglich $q : x = y : r$, und außerdem $ſ = x + y$. Für $+ p = + q . + r = - q . - r$, ergiebt sich demnach

$$+ p : + x = + y : + r$$
$$+ p : - x = - y : + r$$
$$- p : + x = + y : - r$$
$$- p : - x = - y : - r$$

und für $- p = + q . - r = - q . + r$.

$$- p : + x = - y : + r$$
$$- p : - x = + y : + r$$
$$+ p : + x = - y : - r$$
$$+ p : - x = + y : - r$$

In den vier ersten Fällen ist also ſ eigentlich Summe, in den vier letzten aber kann man es auch als Differenz betrachten.

Ueberhaupt wird es mir nie einfallen, den Gebrauch der Lehrsätze von den Verhältnissen da, wo er vortheilhaft ist, zu verwerfen, und noch weniger, Größen Proportionalität abzusprechen, welchen dergleichen zukommt. Wenn aber ein Recensent sich solche Verdrehungen erlaubt, als derjenige, der mir dergleichen bey der Beurtheilung des zweyten Theils meiner Anleitung zur praktischen Rechenkunst, oder des dritten Theils meiner Versuche

suche in Sokratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der Arithmetik, in der allgemeinen deutschen Bibliothek Schuld gegeben hat, und deswegen von arger mathematischen Ketzerey spricht: so ist es leicht, die offenbarsten Wahrheiten in Lügen zu verwandeln. Wenn das von Unwissenden geschiehet, so verdient es nicht, daß man darauf merke; aber wenn die Ursache nicht im Mangel an Einsichten, sondern in andern unrühmlichen Quellen zu suchen ist, so weiß ich nicht, ob es möglich ist, dabey kaltblütig zu bleiben. Doch genug davon.

Nach dem Begriffe der Multiplication richtet sich natürlicher Weise der von der Division, und daß der gewöhnliche ebenfalls mit Vortheil allgemein gemacht werde, ließe sich leicht zeigen, wenn nicht diese Auseinandersetzung für den gegenwärtigen Ort zu weitläuftig wäre, und bey meiner jetzigen Absicht ausgesetzt bleiben könnte. Ich wende mich daher zu einem andern Punkte.

Ich habe S. 161 — 163 gesagt, daß man, wenn man bey der Erlernung der Mathematik den Weg der Erfindung geführt werde, vom Anfang an den Gesichtspunkt, aus welchem die Buchstabenrechnung und Algebra zu betrachten sind, in seiner wahren Beschaffenheit kennen lerne, und dadurch vor vielen Irrthümern und Fehltritten sicher sey. Die Gründe, auf welchen dieses leztere beruhet, sind S. 162 ebenfalls angeführt, und

jezt

jetzt will ich dieselben an einigen Beyspielen deutlicher vor Augen zu legen suchen.

Weiß man, daß man sich in der Buchstabenrechnung und Algebra mit bloßen Begriffen beschäftige, und daß man daher vor jeder Anwendung ihrer Behauptungen auf besondere Arten der Größen untersuchen und bestimmen müsse, wie weit jene Behauptungen, in Rücksicht auf diese Größen, Realität haben: so ist es zuvörderst leicht, jedesmal anzugeben, woher die Abweichungen und Besonderheiten der Ziefernrechnung, wenn man dieselbe mit der Buchstabenrechnung vergleicht, rühren. So wie jede Größe, so ist auch jede Zahl, Menge von Theilen, und so weit daher die Sätze der Buchstabenrechnung nur die Größen selbst betreffen, so weit gelten sie auch von den Zahlen ohne Einschränkung. Allein wenn man die Größen überhaupt betrachtet, so druckt das Zeichen + eine zufällige Eigenschaft aus, und bey den Zahlen ist dasselbe nur dann das Zeichen einer bey ihnen zu betrachtenden zufälligen Eigenschaft, wenn es als das Zeichen der Addition vorkommt. So lange man sich daher das Zeichen + als das Zeichen der Addition, und das Zeichen — als das Zeichen der Subtraction gedenken kann, so lange gelten allerdings die Sätze der Buchstabenrechnung durchaus von den bloßen Zahlen; und umgekehrt: so oft man die Sätze der Buchstabenrechnung ohne weitere Einschränkung auf die Zahlen anwenden will, so oft muß man auch die Zeichen + und — bloß als Zeichen der Addition und Subtraction betrachten können, und als solche wirklich betrachten. Nach dieser Regel läßt sich z. B. die bey den Formeln

$$x = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + p)} \text{ und } y = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 + p)}$$

S. 17 bemerkte Abweichung sehr gut erklären. Wenn hingegen die Zeichen + und — bey den Zifern nicht als Zeichen der Addition und Subtraction gedacht werden können, so druckt das Zeichen + nichts aus, was man sich nicht, auch ohne dasselbe, würde vorgestellt haben, indem schon jede Zifer an und für sich das Daseyn einer Menge Einheiten anzeigt; und das Zeichen — giebt allen den Zifern, vor welchen es steht, die Bedeutung, nach welcher sie weniger als 0 sind. In diesem Falle haben also die Sätze der Buchstabenrechnung bey der Anwendung auf die bestimmten Zahlen nur in so fern uneingeschränkte Gültigkeit, als man sich dabey Zahlen, die kleiner als 0 sind, denken kann und will. Dieses ist in vielen Fällen, selbst bey concreten Zahlen möglich. So ist z. B. jede Schuld in Rücksicht auf Kapital, jeder Weg nach Abend in Vergleichung mit einem Wege nach Morgen, weniger als nichts; und man hat also nicht Ursach, jene Vorstellung für durchaus unbrauchbar zu erklären: ja es erhellet auf diese Art, daß sich die gedachte Vorstellungsart den Mathematikern aufgedrungen hat, und nicht von ihnen willkührlich angenommen ist. Hiernach sind also — 1, — 2, — 3, — 4, ꝛc., wenn

man

man $-1 = 1-2$; $-2 = 1-3$; $-3 = 1-4$; $-4 = 1-5$, ꝛc. setzt, weniger als 0; und wenn man daher nach der Formel

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{1}{1-2} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{ꝛc.} = \frac{1}{-1}$$

$$\frac{1}{1-3} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + \text{ꝛc.} = \frac{1}{-2}$$

$$\frac{1}{1-4} = 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 + 4096 + \text{ꝛc.} = \frac{1}{-3}$$

macht, so stimmt es mit den ersten Begriffen von der Division aufs vollkommenste überein, daß 1 durch weniger als 0 dividirt, mehr als eine unendlich große Zahl im eigentlichen Verstande geben müsse. Bis jetzt ist also keine Schwierigkeit da. Allein man nimmt auch an, daß

$$\frac{1}{-1} = -1;\quad \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2};\quad \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{3}\ \text{ꝛc.}$$

sey; und so müßte man nach einem sehr bekannten Grundsatze aus dem Vorhergehenden zu folgern berechtigt seyn, daß auch

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{ꝛc.}$$

$$-\tfrac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + \text{ꝛc.}$$

$$-\tfrac{1}{3} = 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 + 4096 + \text{ꝛc.}$$

wäre. Hier entsteht die Frage: Wie kann eine negative Zahl weniger als nichts, und dann wieder mehr als das Unendliche in eigentlicher Bedeutung seyn? Darin liegt die Schwierigkeit nicht, daß eine Zahl, die größer als das Unendliche im eigentlichen Verstande seyn soll, gar nicht gedenkbar wäre; in Construktionen ist sie es allerdings. Denn da

1 † 1 † 1 † 1 † 1 † 1 † 1 ꝛc. ohne Ende.

offenbar eine Construktion einer unendlich großen Zahl im eigentlichen Verstande ist, so sind

1 † 2 † 4 † 8 † 16 † 32 † 64 † ꝛc. ohne Ende
1 † 3 † 9 † 27 † 81 † 243 † 729 † ꝛc. ohne Ende
ꝛc.

eben so offenbar Construktionen solcher Zahlen, die größer als eben jene unendlich große Zahlen sind. Es verhält sich vielmehr hiemit folgendergestalt. Für unsere Zahlen in der gewöhnlichen Bedeutung gelten die Lehren der Buchstabenrechnung und Algebra, ohne weitere Einschränkung, bloß unter den vorhin bestimmten Umständen. Wollen wir aber diese Sätze ohne alle Einschränkung auf die Zahlen anzuwenden berechtigt seyn, und nöthig ist diese Befugniß, weil sonst unauflösliche Knoten entstehen: so müssen wir unsere Vorstellungen von den Zahlen erweitern, die Reihe derselben auch jenseits Null und jenseits des Unendlichen fortgehen lassen, und überhaupt sie so uns gedenken, wie ich es in den Zusätzen zum achten Capitel des ersten Buchs der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen auseinander gesetzt habe. Alsdann fällt alle Einschränkung weg, aber dagegen bleibt die Bedeutung der sich ergebenden negativen Zahlen

len so lange ungewiß, bis man diesebe aus andern Umständen bestimmt hat. Diese Bestimmung kann in einzelnen Fällen keine Schwierigkeit haben, aber man darf sie auch, wenn man von dem Gefundenen fernere Anwendungen machen will, nicht vergessen. Auf diese Art erhellet, wie ich S. 168 habe sagen können, daß die gedachte Vorstellungsart von den Zahlen nicht meine Vorstellungsart sey, sondern daß die höhere Arithmetik befehle, sie zu Hülfe zu nehmen; so ist auch klar, daß sich die Mathematiker nicht mit Hirngespinsten beschäftigen, wenn sie von Größen reden, die kleiner sind als Null, und größer als das Unendliche, im eigentlichen Verstande genommen; denn sie verstehen darunter nicht Größen, die irgendwo an und für sich wirklich sind, sondern nur in willkührlichen Construktionen gedenkbare; auf diese Art sieht man endlich, daß von den Lehren, welche von diesen Größen, oder vielmehr von ihren Construktionen, behauptet und erwiesen werden, bey der Anwendung kein Irrthum zu befürchten ist, weil vor dieser Anwendung allemal erst der Grad der Realität, welcher ihnen zukommt, aufgesucht, und zur Richtschnur genommen wird. Uerhaupt aber entdeckt man, wenn man diesen Weg weiter verfolgt, den Grund aller Schwierigkeiten in der Lehre von denen Reihen, welche aus der Entwickelung der Brüche entspringen, und wird folglich auch dadurch in den Stand gesetzt, diese Schwierigkeiten in der Quelle selbst zu ersticken.

Da die Zeichen + und — bey den abstrakten Zahlen den Begriff derselben nicht in dem Maße und auf die Art ändern, als sie solches bey den Größen, überhaupt genommen, thun: so ist auch leicht einzusehen, daß die Sätze von der Beschaffenheit des Produkts solcher Zahlen, vor welchen diese Zeichen stehen, anders seyn und ausgedruckt werden können, als bey den positiven Größen in weiterer Bedeutung, und allgemein betrachtet. Da nemlich die Vorsetzung des Zeichens + den Begriff der Zahl unverändert läßt, so kann es auch in der Zifernrechnung bey der Multiplication keine Verschiedenheit hervorbringen, ob man die Einheit absolut oder positiv annimmt; aber nöthig ist es deswegen bey weitem noch nicht. Da ferner das entwickelte Produkt bey den Zahlen nicht mehr auf die Faktoren, sondern lediglich auf die erste Einheit bezogen wird, so kann dasselbe auch durch ein einziges Zeichen vollkommen bestimmt seyn. Hierauf gründen sich die in der Zifernrechnung gewöhnlichen Behauptungen von dem Zeichen des Produkts, und in ihr sind dieselben allerdings vollkommen richtig und brauchbar. Allein können sie hinreichen, wenn man aus der Zifernrechnung herausgeht? Und wie weit erstreckt sich gleichwohl ihr Einfluß?

Wahr ist es übrigens allerdings, daß wir jeder Ziffer eben so wohl als jedem Buchstaben nach Gefallen die Zeichen + und — vorsetzen können, und daß wir also, so

lange

lange wir die Zifern bloß als willkührliche Zeichen der Zahlen gedenken, ohne dabey den einmal festgesetzten und allgemein angenommenen Begriff der Zahlen vor Augen zu behalten, im Stande sind, mit den Zifern durchaus so zu verfahren, wie mit den durch Buchstaben ausgedruckten Construktionen der Größen. Alsdann beschäftigen wir uns aber auch lediglich mit willkührlichen Construktionen solcher Begriffe, deren Realität sich nicht weiter erstreckt, als so weit sich die positiven und negativen Zahlen mit der Erklärung vertragen, daß die Zahl die aus Einheiten bestehende Vielheit sey; und so wird bey dem Gebrauche der gefundenen Sätze in wirklichen Fällen alles das wieder nothwendig, was nach dem Vorhergehenden bey der Anwendung der Buchstabenrechnung und Algebra in der Ziferrechnung geschehen mußte. Wenn eine Zahl, die aus Einheiten bestehende Vielheit seyn soll, und so müssen wir sie uns in der Ziferrechnung vorstellen, so kann das Zeichen + dem Begriffe der Zifer, vor welcher es steht, an und für sich, nichts zusetzen, und man muß daher alle sogenannten positiven Zahlen durchaus wie absolute Größen behandeln, und das Zeichen + allenthalben bloß als das Zeichen der Addition ansehen. Das Zeichen — wird demnach hiedurch lediglich ein Zeichen der Subtraction, und daher kommt es, daß man in der Ziferrechnung die negativen Zahlen nicht anders deutlich denken kann, als wenn man sich dieselben kleiner als Null vorstellt. In der Ziferrechnung ist daher auch der Satz falsch, daß $\sqrt[n]{}+a$ allemal nfach seyn, sie ist nur eine, und allemal $=+\sqrt[n]{a}$. Eben so verhält es sich mit den benannten Zahlen, die Größen ausdrucken, bey welchen sich keine zufällige Eigenschaft unter entgegengesetzten Bedingungen gedenken läßt, oder wenigstens nicht dabey gedacht werden soll. Wenn daher aus $P=p\,(1-\frac{c}{C})^2$ S. 76. c entwickelt werden soll, so ist $\sqrt{\frac{P}{p}}$ nicht positiv und negativ, sondern darf als absolute Größe bloß das Zeichen $+$ bekommen. Alsdann wird nach und nach $\frac{P}{p}=(1-\frac{c}{C})^2$; $\sqrt{\frac{P}{p}}=1-\frac{c}{C}$; $-1+\sqrt{\frac{P}{p}}=-\frac{c}{C}$; $C\,(1-\sqrt{\frac{P}{p}})=c$. Aus diesem Grunde kann man daher auch nicht behaupten, daß lf aus der Formel S. 40.

$$lf = 2^n\,(f^{\frac{1}{2^n}}-1)$$

wenn man f positiv annimmt, einen doppelten Werth bekomme; also fallen auch hier mehrere, sonst unvermeidliche, große Schwierigkeiten weg, und es ist dann z. B. auch gleich, ob man n in folgender Formel

$$lf = n\,(f^{\frac{1}{n}}-1)$$

eine gerade oder eine ungerade Zahl bedeuten lassen will. Ganz anders hingegen wird der Fall, wenn sich die Zahlen

len, womit man sich beschäftiget, auf Größen beziehen wobey wirkliche positive und negative Größen nach der oben davon gegebenen Erklärung gedacht werden können. Hier fallen die vorigen Einschränkungen insgesammt weg, und so entsteht für die Untersuchung der Zahlen im Allgemeinen die Nothwendigkeit, dieselben allemal erst als absolute, und dann als positive in weiterer Bedeutung zu betrachten. In der Lehre von den Logarithmen hat man bisher diesen Umstand übersehen; allein da man die Logarithmen nicht bloß bey den abstrakten Zahlen, sondern auch in der Geometrie gebraucht, und hier positive und negative Größe im eigentlichsten Verstande vorkommen: so ist es auf keine Weise zu verwundern, daß daher in der Lehre von den transcendenten Curven nicht bloß Schwierigkeiten, sondern selbst Irrthümer entstanden sind. Auf diese Art erscheint also der Weg, den ich in der Theorie von den Logarithmen, sowohl in meinen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra, als in den Zusätzen zu meiner Uebersetzung des ersten Theils der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen, betreten habe, als ein nothwendiger Weg, und überhaupt habe ich auch bey der sorgfältigen Prüfung, die ich hinterher öfters damit vorgenommen habe, noch nicht einen Umstand entdecken können, der mir meine Theorie von einer verwerflichen Seite dargestellt hätte.

Daß man nach dem Bisherigen bey der Anwendung der Buchstabenrechnung und Algebra auf die Zifernrechnung die Umstände allemal sorgfältig aufsuchen und vor Augen behalten muß, unter welchen man diese Anwendung vornimmt, wird hoffentlich Niemand als etwas lästiges und als einen Grund zu Einwürfen ansehen. Man muß ja dieses auch bey den gemeinsten Anwendungen der Buchstabenrechnung auf die Geometrie thun. Es sey z. B. in einem geradlinigen Dreyecke ABC, $AB = a$; $AC = b$; $BC = c$, und dabey die Seite BC durch die aus A auf sie herabgefällte senkrechte Linie in die beyden Theile BD und DC getheilt, so ist, wie bekannt

$$BD = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$$

Auf was für Resultate könnte man aber nicht durch diese Formel in einzelnen Fällen geleitet werden, wenn man dabey vergessen wollte, daß darin von den Größen a, b und c allemal zwey zusammengenommen größer als die dritte seyn müssen? Ferner mögen o und x zwey Winkel bedeuten; so ist

$$\sin.(o + x) = \sin.o.\cos.x + \sin.x.\cos.o$$

$$\cos.(o + x) = \cos.o.\cos.x - \sin.o.\sin.x$$

Diese Formeln sind aber nur vollständig und wahr, wenn man sich die Sinus durch Zahlen ausgedruckt vorstellt. Denn will man dieselben in Linien darstellen, so muß man entweder

$$\sin.(o + x) = \frac{\sin.o\ \cos.x + \sin x\ \cos.o}{r}$$

$$\cos.(o + x) = \frac{\cos.o.\ \cos x + \sin.x.\ \sin.o}{r}$$

oder

$$r.\sin.(o + x) = \sin.o.\ \cos.x + \sin.x.\ \cos.o$$

$$r.\cos.(o + x) = \cos.o.\ \cos.x + \sin.x.\ \sin.o$$

setzen. Hierbey kann ich nicht umhin, gelegentlich einen Vortheil zu berühren, welchen der Satz gewährt, daß das Produkt zweyer geraden Linien ein Rechteck, das Produkt aus dreyen ein rechtwinkliges Parallelepipedum, 2c. sey. Man pflegt in den algebraischen Bestimmungen der trigonometrischen Linien aus einander den Radius wegzulassen, weil daraus manche Bequemlichkeit entsteht. Allein es kommen öfters Fälle vor, wo man denselben braucht, und also wissen muß, welche Stelle ihm in den allgemeinen Formeln zukomme. Man lasse das Produkt gerader Linien allemal wieder eine gerade Linie seyn, so macht die Bestimmung dieser Stelle nicht selten Schwierigkeit; bey jenem Satze ist solche nie mit der mindesten Ungewißheit verknüpft, indem man den S. 176 und 16, 17 angeführten Satz, der dann schon vorhergegangen ist, zu Hülfe nehmen kann.

Ich breche hier ab, weil ich diese Proben für hinlänglich halte, um die Wirklichkeit dessen, was ich oben S. 59—61 von dem Nutzen einer ausführlichen Theorie der

der mathematischen Methode gesagt habe, so weit es hier gefordert werden kann, darzulegen. Daß durch diese Theorie vieles in der Mathematik weit genauer bestimmt und in dem rechten Gesichtspunkte vom Anfang an gezeigt werde; daß dadurch die statt findenden Lücken aufgedeckt, und die Art und Weise sie auszufüllen, bekannt werde; daß dabey die eingeschlichenen Irrthümer und mangelhaften Beweise, eben so wenig, als die an ihre Stelle zu setzenden Wahrheiten und Demonstrationen verborgen bleiben können; und daß dabey durch die ganze Mathematik die mögliche Allgemeinheit, Genauigkeit, Klarheit und Einförmikeit zu erhalten stehe; dieses wird freylich durch die angeführten Beyspiele noch nicht außer allen Zweifel gesetzt; allein sie thun doch wenigstens schon etwas mehr, als daß sie jenen Behauptungen nur nicht widersprächen. Mehrere herzusetzen, ist mir, wegen der Schranken, innerhalb welcher ich mich halten muß, nicht erlaubt; und auffallendere zu wählen, wäre in mancher Absicht unzweckmäßig gewesen. Denn einmal würden dieselben ohne die gegenwärtigen nicht den erforderlichen Grad der Deutlichkeit erhalten haben, und zweytens durfte ich diese nicht weglassen, weil ich den wider meine Vorstellungsarten theils schon erfahrnen, theils noch zu befürchtenden Einwürfen lieber hier als in einem Versuche einer vollständigen Theorie der mathematischen Methode begegnen will. Freylich haben dadurch meine Auseinandersetzungen auch hie und da eine

unan-

unangenehme Weitläuftigkeit erhalten müssen; allein aus zweyen Uebeln wählt man natürlich, wenn man kann, das kleinere; und das hoffe ich meinen diesmaligen Richtern zutrauen zu dürfen, daß sie Beschaffenheiten, die aus Nebenumständen geflossen sind, nicht der Sache selbst zuschreiben werden. Auch kann das zu meiner Entschuldigung dienen, daß einzelne Materien, abgesondert betrachtet, selten mit der Kürze behandelt werden können, die dann eben so möglich als nothwendig ist, wenn man dieselben im Systeme untersucht. Auf diese Art glaube ich also mit Recht zu behaupten, daß das Erste, zur Vervollkommnung der Mathematik nöthige, eine ausführliche Theorie der mathematischen Methode sey.

2. Benutzung dieser Theorie zu einem solchen Lehrgebäude der Mathematik, welches außer der wünschenswerthen Vollständigkeit auch die nur immer mögliche Allgemeinheit, Genauigkeit, Klarheit und Einförmigkeit an sich habe.

Die Mathematik hat von jeher unter ihren Verehrern die größten Männer aufzuweisen gehabt, und daher rührt es unter andern Ursachen ebenfalls mit her, daß sie in Ansehung ihrer Vollkommenheit höher steht, als alle übrige Wissenschaften. Wenn man so wenig als möglich sagen will, so muß man gleichwohl behaupten, daß alle Materialien zu einem göttlichen Tempel bereit liegen;

liegen; hie und da verlangen einige noch eine etwas sorgfältigere Bearbeitung; aber das Meiste was zur gänzlichen Vollendung dieses Tempels noch nöthig ist, besteht in der Zusammenfügung der gedachten Materialien zu Einem Ganzen, nach einem davon entworfenen vollständigen Risse. Nach einer ausführlichen Theorie der mathematischen Methode wäre daher die Verfertigung eines vollständigen und vollkommenen Lehrgebäudes der Mathematik aus den vorhandenen Schriften derer Mathematiker, welche ihre Wissenschaft mit glücklichem Erfolge bearbeitet haben, allerdings ein weitläuftiges, viele Arbeit, Mühe und Zeit erforderndes Unternehmen; allein demungeachtet mehr ein Werk eines prüfenden Compilators, im guten Sinne dies Wort genommen, als daß dazu diejenigen aufgefordert werden dürften, die, ihrer Neigungen und Talente wegen, vorzüglich zur Erweiterung der Grenzen der menschlichen Kenntnisse geboren sind. So weit ich bis jetzt die Theorie der mathematischen Methode aufgesucht, entwickelt, und dem davon zur Vervollkommnung der Mathematik zu machenden Gebrauche nach überdacht habe, bin ich allenthalben auf Bestätigungen der Behauptungen gekommen, die ich S. 59. 60 kurz zusammengefaßt habe; und doch bin ich in jener Untersuchung wenigstens schon bis dahin fortgegangen, daß ich von dem bereits zurückgelegten Wege sicher auf die Beschaffenheit des noch übrigen Theils schließen kann. Räumt man mir ein, daß die Anord-

nung

nung sowohl der Theile der Mathematik als der einzelnen Sätze jedes Theils, die beste sey, wobey es möglich ist, sich vorzustellen, daß die ganze Mathematik aus der Seele selbst, ohne alle Beyhülfe der Erfahrung, geschöpft werden könne; giebt man mir zu, daß auch die Erklärungen, die Forderungen und Grundsätze, desgleichen die Lehrsätze mit ihren Beweisen, und die Aufgaben mit ihren Auflösungen, dann die beste Form haben, wenn dabey eben dasselbe leicht ist, und es übrigens nirgends an der erforderlichen Allgemeinheit, Genauigkeit, Klarheit und Einförmigkeit fehlt: so fürchte ich, wenn ich mich hierüber künftig ausführlicher erklären werde, keinen Widerspruch zu finden. Allein bey dem allen ist gleichwohl bis jetzt die Mathematik, als Eine Wissenschaft betrachtet, noch einer höhern Stufe der Vollkommenheit fähig, und ich theile hier einige Gedanken über die Art und Weise mit, wie dabey eine ausführliche Theorie der mathematischen Methode gebraucht werden kann.

Vorausgesetzt, daß nichts von der Erfahrung entlehnt, sondern alles aus der Seele selbst geschöpft werde, so besteht allerdings die mathematische Methode darin, daß von Erklärungen angefangen, und darauf zu Forderungen und Grundsätzen, Aufgaben und Lehrsätzen fortgegangen wird. Man findet indeß nicht alle Erklärungen, Forderungen und Grundsätze vor allen Aufgaben und Lehrsätzen, sondern man entdeckt dieses alles in der

Ordnung

Ordnung, daß die Erklärungen und Grundsätze zerstreut zwischen den Aufgaben und Lehrsätzen zu stehen kommen. Auch bilden die Sätze der Mathematik, auf die gedachte Art gesucht, keine Kette aus lauter einfachen Gliedern, sondern, es greift jedes Glied, und zwar je weiter es vom Anfange entfernt ist desto mehr, in eine Menge von Gliedern ein, und die ganze Kette geht von einem sehr geringen Anfange ohne Ende fort. Aus diesen Gründen ist es, wenn man die zum vollständigen Lehrgebäude der Mathematik gehörigen Materialien, nach Anleitung des ersten Abschnitts einer ausführlichen Theorie der mathematischen Methode, aufgesucht, und ihnen die erforderliche Form gegeben hat, nöthig, sie nun auch auf eine solche Art zu ordnen, daß der Ueberblick des Ganzen leicht werde. Man muß also zuvörderst das ganze Gebiet der Mathematik in mehrere größere und kleinere Theile theilen, und dies geschieht am besten, wenn man diese Theile theils nach den verschiedenen Arten und Unterarten der Größe, theils nach der Absicht, welche man sich bey ihrer Untersuchung vorsetzen kann, aufsucht, und sie darauf nach dem bey der Erfindung der Mathematik genommenen Gange ordnet. Die Hauptarten der Größe sind nun, die beständige und die veränderliche Größe, und darnach theilt sich die ganze Mathematik in die gemeine und in die höhere ein. Jede von diesen Hauptarten läßt sich ferner entweder in Anschauungen oder in willkührlichen Construktionen untersuchen, und daher ergeben sich,

ge-

gemeine Geometrie, Buchstabenrechnung und gemeine Algebra, höhere Geometrie, höhere Arithmetik. Jede von diesen Wissenschaften untersucht ferner die ihr untergeordneten Größen, welche nöthigenfalls vom neuen in Classen eingetheilt werden, entweder nach ihrer Gleichheit mit andern, oder nach dem Verhältnisse, in welchem sie gegen andere stehen. Hierdurch entspringen in jeder zwey oder mehr neue Abtheilungen, davon jede wieder nach genauer bestimmten Arten ihres Gegenstandes in mehrere Abschnitte getheilt werden kann. Bis jetzt besteht jeder Theil für sich und ohne Anwendung, es kann aber auch auf die Verbindung mehrerer und auf die Anwendungen, die von ihnen theils innerhalb, theils außerhalb der Grenzen der reinen Kenntnisse gemacht werden können, gesehen werden, und dadurch entstehen denn außer ihnen noch mehrere Theile. Ist man auf diese Art weit genug fortgegangen, und hat man darauf das Gefundene nach dem vorhin angezeigten Gesichtspunkte gehörig geordnet, so kann man sogleich im Anfange jedes Abschnitts allen Erklärungen von den darin zu betrachtenden Größen, ferner allen dabey nöthigen Forderungen und Grundsätzen ihren Platz anweisen, darauf die Aufgaben und Lehrsätze in der Ordnung, in welcher man sie aus sich selbst geschöpft hat, aber auf die leichteste Art zum Uebersehen dargestellt, folgen lassen, und überhaupt, wenn man zuvörderst sich zur Absicht vorgesetzt hat, bloße Elemente zu verfertigen, allen Theilen des ganzen Gebäudes die Form geben, welche Euclides seinen Elementen ertheilt hat.

Will man nicht bey Elementen stehen bleiben, so ist es, nachdem man sie gefunden hat, leicht, aus ihnen den vollständigsten Lehrbegriff zu Stande zu bringen. Man darf dazu nur, was die Sätze betrifft, vom Anfang an jeden folgenden Satz auf alle vorher schon betrachteten Fälle anwenden, und die auf diese Art sich darbietenden Erweiterungen und speciellen Sätze so früh einschalten, als es nach der Regel möglich ist, daß alles zum Verständnisse eines Satzes nöthige vor demselben vorhergehen müsse. Zum Theil muß dieses schon bey der Verfertigung der Elemente geschehen, aber da nicht weiter, als man ohne dasselbe nicht zu genauen Bestimmungen würde gelangen können. So wird z. B. der Satz: In jedem geradlinigen Dreyecke sind alle drey Winkel zusammengenommen so groß, als zwey rechte Winkel; so wie auch der vorhergehende: In jedem geradlinigen Dreyecke, dessen eine Seite verlängert worden, ist der äußere Winkel so groß, als die beyden innern gegenüberstehenden Winkel, auf die Art gefunden, daß man die Sätze von den Parallellinien auf das schon vorher betrachtete geradlinige Dreyeck mit einer verlängerten Seite anwendet. Allein beyde Sätze sind nothwendig, wenn man die Größe, sowohl des gedachten äußern Winkels als aller drey Winkel in einem Dreyecke, so genau bestim-

men

men will, als es in der Lehre von der Gleichheit der Figuren verlangt werden kann, und gehören daher allerdings in die Elemente. Auch kann man die Elemente öfters auf die Art erweitern, daß man die in ihnen einmal gebrauchten Lehrsätze und Aufgaben bey demselben Gegenstande öfters benutzt. Ferner bieten sich hinterher häufig noch andere Wege, einen Lehrsatz zu beweisen oder eine Aufgabe aufzulösen, dar, als man bey der ersten Untersuchung zu finden im Stande war. So oft dieses geschiehet, hat man daran ebenfalls Erweiterungen der Elemente, welche in einen vollständigen Lehrbegriff gehören. Endlich kann man, so wie man in den Elementen meistens gleichsam in gerader Linie vorwärts eilet, bey der Erweiterung derselben zu einem vollständigen Lehrbegriffe auch auf die Seite umherblicken, und das daselbst liegende Nutzbare dem Lehrbegriffe einverleiben. Der Erläuterung dieser Behauptungen durch einzelne Beyspiele kann ich überhoben seyn, weil sie von jedem leicht selbst hinzugesetzt werden können, und ich füge daher nur noch das hinzu, daß Anfangsgründe, welche zwischen den Elementen und einem vollständigen Lehrbegriffe das Mittel halten, so bald man die Elemente und deren vollständigen Lehrbegriff hat, nach diesem Gesichtspunkte nicht schwer zu finden seyn können.

So wie man bey der Untersuchung der mathematischen Methode von der Definition der Mathematik aus-

 gehen,

gehen, und aus derselben alles von dieser Methode zu behauptende herleiten und beweisen muß: eben so darf man bey der Bearbeitung der Mathematik nach der gefundenen Theorie nichts in die Elemente oder Anfangsgründe, oder den vollständigen Lehrbegriff aufnehmen, wovon man nicht nachweisen kann, daß und wie es in der Seele selbst gefunden, und ohne Beyhülfe der Erfahrung als nothwendig dargestellt werde. Diese Nachweisung selbst gehört aber, auch nach dem Muster, welches uns Euclides gegeben hat, nicht in das Lehrgebäude der Mathematik, sondern die Theorie von der mathematischen Methode muß alles das enthalten, was nöthig ist, um die jedesmal gebrauchten Quellen ohne Mühe aufzufinden.

Nun entsteht folgende Frage: Muß derjenige, der die Mathematik auf die bisher beschriebene Art bearbeiten will, alles vor ihm darin geleistete als gänzlich ungeschehen angesehen, und ganz und gar unbenutzt lassen? Unstreitig wäre dieses nicht bloß eine zu schwere, sondern auch eine schädliche Forderung. Um das, was man aus sich allein, nach der Natur der Seele und der Sache, schöpfen kann, wirklich in sich selbst wahrzunehmen, wird ein geübtes Auge des Geistes erfordert, und dieses Auge kann derjenige nicht haben, der das nicht kennt, was von andern in eben der Sache geleistet worden ist. Was hilft ferner auch die geübteste Sehkraft, wenn man nicht mit allen den Richtungen, die man ihr zu geben hat, bekannt ist? und auch in diesem Stücke ist Kenntniß dessen, was andere gethan haben, unentbehrlich. Drittens ist man bey bloß eigenen Wahrnehmungen zu sehr der Einseitigkeit und der Gefahr, öfters so gar das merkwürdigste zu übersehen, ja selbst den Täuschungen und Irrthümern ausgesetzt, und daher wird die Verbindung fremder Wahrnehmungen mit dem eigenen durchaus nothwendig. Viertens kann die Verschiedenheit der Wege, die andere gegangen sind, neue Aussichten eröffnen, die sonst ganz verborgen geblieben wären. Endlich erfordert die Dankbarkeit gegen die Verdienste großer Männer, daß man ihr Andenken auf alle Arten zu erhalten und zu verbreiten suche; und aus diesem Grunde müßte ein vollständiger Lehrbegriff der Mathematik, außer dem Vorigen, auch noch ausführliche Nachrichten von den Erfindern und Verbesserern sowohl ganzer Wissenschaften als einzelner Sätze enthalten. Würden dabey jedesmal die eingeschlagenen Wege sorgfältig geprüft, so könnte daher ein neuer Vortheil entstehen, aber auch, wo dies überflüssig oder zu weitläuftig schiene, würde wenigstens, hier eben so wie sonst, Kenntniß dessen, was geschehen, dem denkenden Kopfe ein nahrungsvolles Vergnügen gewähren.

Was ich bisher gesagt habe, betrifft vorzüglich die Mathematik selbst, oder die reine Mathematik. Was die angewandte und praktische Mathematik anlangt, so ist dafür schon sehr viel geschehen, sobald nur die reine ganz vollständig, und ohne die oben angeführten Lücken da ist. Wenn nemlich darauf auch der S. 79—82 stehenden Forderung ein Genüge geleistet worden, so ist es leicht, das Vorhergehende ebenfalls zur Vervollkommung der angewandten Mathematik zu gebrauchen; und für die praktische Mathematik ist das, was, meiner Meinung nach, dazu besonders nöthig ist, in den S. 85 — 107 stehenden Anmerkungen enthalten. Ueberhaupt aber muß ich mich hier daran begnügen, alles kurz und im Allgemeinen berührt zu haben. Denn wollte ich weiter gehen, und mich hier in ausführliche Auseinandersetzungen einlassen, so würde ich nicht nur die mir gesetzten Schranken zu sehr überschreiten, sondern es läßt sich auch das, was hier zu sagen wäre, nicht eher ganz deutlich machen und an einzelnen Fällen erläutern, als bis eine vollständige Theorie der mathematischen Methode als bekannt vorausgesetzt werden kann. Ich schließe daher gegenwärtige Abtheilung, um zu demjenigen Raum zu behalten, was ich noch über die Mittel, die Brauchbarkeit der Mathematik zu befördern, zu sagen habe.

Zweyter

Zweyte Abtheilung.

Von dem, was zur Vergrößerung der Brauchbarkeit der Mathematik erforderlich ist.

Ein vollständiges Lehrgebäude der reinen Mathematik, nach den vorgehenden Regeln aufgeführt, würde nicht nur die möglich größte Vollständigkeit und Ausführlichkeit haben, sondern auch nach allen seinen Theilen sehr leicht zu übersehen seyn. Die angewandte Mathematik verlöre dabey manche Untersuchungen, weil ihr die reine mehr vorgearbeitet hätte; allein eben dadurch wäre es ihr auch möglich, sich entweder über eine größere Menge von Gegenständen zu verbreiten, oder doch dieselben weiter im Speciellen zu verfolgen. Ihr Umfang würde also ebenfalls vergrößert werden, aber weil sie bey ihren Anwendungen mit der reinen einerley Weg ginge, so litte auch hier die erforderliche Leichtigkeit nicht. Was endlich die praktische Mathematik betrifft, so würde sie eben das gegen die angewandte Mathematik seyn, was diese gegen die reine wäre, außer daß sie, wegen ihres sonst unermeßlichen Umfanges mehr im Allgemeinen bliebe, mehr classenweise bestimmte, was für Lehren aus den vor ihr hergehenden Wissenschaften zu dieser oder jener Absicht gebraucht werden könnten, wie man sich dabey zu verhalten, und was man außer ihnen noch zu Hülfe zu nehmen habe; denn von den ganz speciellen praktischen Anweisungen ist hier nicht die Rede. Auf diese Art gliche also die ganze Mathematik Einer Kette, und wenn gleich die Glieder derselben auf vielfache und mannigfaltige Art in einander griffen, so herrschte doch durchaus die regelmäßigste Ordnung, und es müßte leicht seyn, von jedem Gliede in ununterbrochener Folge zu jedem andern zu kommen. Was giebt es also außer dieser Vollkommenheit noch für Mittel, die Brauchbarkeit der Mathematik zu vergrößern? Keine, vielleicht für diejenigen, welche sich der Mathematik um ihrer selbst willen ganz widmen, und sich daher dieselbe auch in ihrem ganzen Umfange eigen machen; allein es giebt viele, welche nur den Vorhof dieses Tempels betreten können, und noch mehrere, welche der Mathematik vorzüglich um des formellen Nutzens willen, einen Theil ihrer Zeit schenken. Wie für diese noch besonders gesorgt werden könne, soll der Gegenstand des Folgenden seyn.

1. Jeder,

I. Jeder, der es sey des materiellen oder des formellen Nutzens der Mathematik theilhaftig werden wollte, sollte wenigstens die ersten Elemente dieser Wissenschaft nach der strengen mathematischen Methode zu erlernen suchen.

Unter den ersten Elementen der Mathematik verstehe ich hier

1. die Elemente der Planimetrie und Stereometrie;
2. die Buchstabenrechnung und Algebra bis zu und mit der Lehre von den quadratischen Gleichungen, so wie auch der von den Verhältnissen;
3. die Anwendung der Buchstabenrechnung und Algebra,
   a. zur Erwerbung einer gründlichen und größern Kenntniß in der Ziffernrechnung;
   b. in der Planimetrie, ebenen Trigonometrie und Stereometrie;
4. die Elemente der algebraisch-analytischen Geometrie, so weit dazu das Vorhergehende hinreicht;
5. die Elemente der Differential- und Integral-Rechnung, so wohl selbst, als mit ihrer Anwendung auf arithmetische und geometrische Gegenstände, so weit dabey bloß die ersten Differentialien gebraucht werden;
6. eine allgemeine Einleitung in die angewandte Mathematik;

7. eine allgemeine Einleitung in die praktische Mathematik; beyde kurz und nach den obigen Grundsätzen;

8. eine kurzgefaßte Theorie der mathematischen Methode.

Unter denen, welche sich praktische Mathematiker nennen, würde unstreitig mancher, wenn er dieses Verzeichniß erblickte, den Kopf schütteln; und unter denen, welche sich den Wissenschaften widmen, und die Mathematik nur mittelbar für sich nützlich halten, mögten auch wohl mehrere die Forderung zu groß betrachten, daß sie das alles lernen sollen. Die Praktiker, die nur mit den Händen, nicht mit dem Kopfe arbeiten wollen, und die Studirende, denen es genug ist, wenn sie dereinst nur dem Namen nach nicht zu den Handwerkern gehören, nehme ich aus; den übrigen hoffe ich es zu beweisen, daß ich von ihnen zwar viel, aber zu ihrem Besten viel fordere. Ja es ist mir nicht genug, daß sie die gedachten Elemente nur lernen; eben so müssen sie dieselben lernen, als der, der sich der Mathematik allein widmet; so, daß sie jeden Satz mit allen seinen Gründen und Folgen, nicht bloß das Allgemeine, sondern auch die Modificationen desselben, wenn es bey speciellen Gegenständen gebraucht werden soll, und alles dieses aus der wahren Quelle geschöpft, sich bekannt zu machen suchen. Ich rede zuerst mit denen, welche die Mathematik vorzüglich

wegen

wegen der davon in Geschäften zu machenden Anwendungen lernen.

Der praktische Rechner, ohne Kenntniß der Buchstabenrechnung und Algebra, wie weit ist er im Stande, seine Kunst mit Einsicht zu gebrauchen? Nur einen Fall will ich anführen. Wenn man Sterblichkeitsordnungen hat, so lassen sich darauf verschiedene äußerst wichtige Rechnungen bauen. Legt man z B. die allgemeine Sterblichkeitsordnung in Herrn Florencourt's Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst zum Grunde, so kann man daraus die Wahrscheinlichkeit, daß ein zwanzigjähriger nach einem, nach zwey, nach drey Jahren ꝛc. noch leben werde, durch die Brüche $\frac{4933}{4987}$; $\frac{4879}{4987}$; $\frac{4824}{4987}$; ꝛc. ausdrücken, und hiernach sehr leicht berechnen, wie viel von jeder Anzahl zwanzigjähriger nach jeder Anzahl von Jahren wahrscheinlich noch am Leben seyn werden. Auf ähnliche Art kann man bestimmen, wie viel von jeder Menge Ehepaare vom gegebenen Alter, nach jeder gegebenen Zeit, theils noch bestehende Ehepaare, theils Wittwer und Wittwen übrig seyn werden. Auf jene Rechnung gründet man bekanntermaßen die Leibrenten, und auf diese die Wittwenkassen. Wer hier mit Einsicht verfahren will, muß vor allen Dingen wissen, auf was für Wegen die Sterblichkeitsordnungen gefunden, und zu der Beschaffenheit ge-

kom-

kommen sind, in welcher wir sie haben; und schon hier geht ihm vieles ab, wenn er nichts von der höhern Arithmetik versteht. Ferner kommt es bey der Berechnung der Leibrenten und Wittwenkassen nicht bloß darauf an, Zahlen zu finden, sondern die herausgebrachten Resultate sollen mit den Ereignissen im Leben aufs genaueste zusammentreffen. Hierdurch wird eine sorgfältige Untersuchung der Frage nöthig: In wie fern und wie weit kommt den bey der Berechnung gebrauchten und gefundenen Construktionen Realität zu? Wer die Buchstabenrechnung und Algebra nicht vom Anfang an aus ihrem eigentlichen Gesichtspunkte zu betrachten gewöhnt worden ist, und sowohl bey ihrer Anwendung auf die Zifferrechnung als bey dem Gebrauche von dieser in wirklichen Fällen, die so häufig eintretenden Einschränkungen kennen gelernt hat, findet vielleicht diese Frage sogar ganz überflüssig. Allein man lasse sie aus der Acht, so läßt sich sehr leicht der Fall gedenken, daß eine freye Wittwenkasse, nach allen Regeln der Mathematik berechnet, und auf das treueste und redlichste verwaltet, dennoch nicht Bestand habe. Die hiesige allgemeine Wittwenkasse vermehrt von Zeit zu Zeit die Bedingungen, worunter sie den Eintritt erlaubt. Unwissende machen ihr darüber nicht selten Vorwürfe, Kennern aber ist solches ein Zeichen, daß die Männer, denen ihre Verwaltung anvertrauet ist, ganz die dazu erforderliche Einsicht und Klugheit besitzen. Den Eingetretenen wird alles gehalten,

was

was ihnen versprochen ist; was darf man weiter fordern, da Niemand zum Eintritt gezwungen wird. Was die Beantwortung jener Frage betrifft, so gehören dazu eine Menge von Beobachtungen, welche nicht anders als von den Verwaltern einer großen Wittwenkasse angestellt werden können. Auf was für Fälle hat man sein Augenmerk besonders zu richten? Was für Beobachtungen sind dabey anzustellen? Wie sind diese Beobachtungen zu gebrauchen? Was für Rechnungen sind nöthig, um den Zustand der Kasse zu jeder Zeit mit einem Blicke zu übersehen, und die etwa begangenen Fehler bey ihrer ersten Aeußerung zu entdecken? Was für Tabellen, damit diese Rechnungen in kurzer Zeit und, unter Anleitung, von bloß mechanischen Rechnern gemacht werden können? Auf was für Art lassen sich die begangenen Fehltritte fürs künftige vermeiden, und die Folgen davon, die nicht ganz weggebracht werden können, so unschädlich als möglich machen? Dies sind alles sehr wichtige Fragen; allein kann man dabey etwas von dem entbehren, was ich für jeden mathematischen Praktiker aus der Mathematik nothwendig halte?

Was den praktischen Geometer anlangt, so verdient keiner diesen Namen, wenn er nicht Herrn Mayers gründlichen und ausführlichen Unterricht zur praktischen Geometrie zu seinem Handbuche machen kann, und so habe ich demselben weiter nichts nöthig zu sagen. Alle diejenigen

jenigen endlich, welche bey ihren praktischen Anwendungen der Mathematik die Mechanik nöthig haben, sind ohne jene Kenntnisse ganz außer Stande, die Schätze zu gebrauchen, welche die größten Männer ihnen zum Gebrauche dargelegt haben. Was sollen ihnen die Schriften eines Eulers, eines Kästners, eines Karstens, eines Krafts, eines Belidors? Ich habe oben gesagt, daß den Praktikern von den Theoretikern häufig nicht genug gerathen werde. Hier muß ich den Praktikern eine Bedingung auflegen, wodurch ein großer Theil der Schuld auf sie gewälzt wird. Wenn die Praktiker nicht so viel Theorie lernen wollen, als schlechterdings nöthig ist, damit die Theoretiker ihnen wirklich in die Hand arbeiten und zu Hülfe kommen können; so sind sie es nicht werth, daß jene sich zu ihnen herablassen, denn alle Herablassung ist nicht weiter, als bis zu einem gewissen Punkte pflichtmäßig und nützlich.

Daß man zur Anwendung theoretischer Sätze und Regeln die Gründe und Quellen derselben nicht zu kennen brauche, ist ein sehr gewöhnlicher, aber nichts desto weniger großer und schädlicher Irrthum. Die Sätze und Regeln, welche man, ohne ihre Gründe und Quellen zu kennen, deutlich einsehen kann, sind selten von beträchtlichem Werthe; wer weiter nichts brauchen will, setzt sich, was für einen Namen er auch führen mag, in die Classe der Handlanger. Das wird man doch nicht verlangen,

langen, daß allemal ausdrücklich gesagt werden solle, was für ein Satz oder Regel angewandt werden müsse? Wie will man also, wenn man bloß Worte gemerkt hat, beurtheilen, was für Regeln jedesmal zu gebrauchen sind? Ferner muß jeder allgemeine Satz bey der Anwendung modificirt werden, und die Art und Weise dieser Modification schöpft man lediglich aus der Kenntniß seiner Gründe. Und wessen Gedächtniß ist vermögend, die große Menge der Regeln zu fassen, die entsteht, wenn man jede selbst und einzeln sich merken will? Wie will man sich helfen, wenn man mehrere von einander abweichende Anweisungen erhält? Wie, wenn Fälle sich ereignen, wofür keine Regeln in Büchern gegeben werden?

Aber woher sollen diejenigen, die sich auf die Praktik legen, und außer der Mathematik noch so manches andere erlernen müssen, die Zeit hernehmen, die zu so viel Theorie erfordert wird? Wenn es keinen andern Weg gäbe, so dürften sie nur die Zeit ihrer Vorbereitung verlängern; und vernünftiger und vortheilhafter wäre das immer, als daß man, höchstens halb vorbereitet, je eher je lieber zu Geschäften angestellt zu werden sucht. Indeß genau überlegt, ist es für den Praktiker nicht Zeitverlust, sondern Zeitgewinn, wenn er der an ihn gethanen Forderung ein Genüge zu leisten sucht. Er soll die Elemente der Mathematik nicht bloß historisch

kennen

kennen lernen, nicht bloß mit dem Gedächtnisse fassen, sondern darin eben so gründlich und nach der strengen mathematischen Lehrart unterwiesen werden, als derjenige, welcher dieselben entweder um des formellen Nutzens willen treibt, oder sich der Mathematik allein widmen will. Hiermit kann früh angefangen werden, und geschieht dieses, so kann der künftige Praktiker schon dann, wenn seine sonstigen Vorbereitungen ihren Anfang nehmen, den Vortheil geübter und erhöhter Denkfähigkeiten genießen. Dazu nun genommen, was sich durch Versuche bestätigen läßt, daß bey einer gründlichen Erlernung der Elemente der Mathematik weit weniger Zeit erfordert wird, um zu einer Fertigkeit in der Anwendung dieser Wissenschaft zu gelangen, als bey einer bloß historischen Treibung derselben nöthig ist, um einen weit kleinern Theil ihrer Lehren bloß ins Gedächtniß zu prägen; welcher künftige Praktiker kauft alsdann seine Vorbereitungszeit am gewissenhaftesten und nützlichsten aus? Der natürlichste Weg ist allemal der kürzeste. Wer die mathematischen Lehrsätze zerstreut und sprungweise, ohne Gründe, ohne seine eigene Denkkraft dabey zu gebrauchen, lernen will, und an die Anwendung sich macht, ehe er für dasjenige genugsam gesorgt hat, was er anwenden soll, der betritt Pfade, welche nicht die Natur, sondern Unwissenheit und Trägheit gezeichnet haben.

Aber

Aber wenn der künftige Praktiker die Elemente der Mathematik auf eben die Art und in eben der Vollkommenheit lernen soll, als der bloße Mathematiker, so muß er außer dem ihm Nutzbaren, auch viel für ihn überflüssiges treiben; und diese Mühe und Zeit könnte man ihm doch ersparen? Mit was für einem Rechte diese Forderung gethan werde, kann man am besten durch Beyspiele zeigen. Daß man also den künftigen Praktiker bemerken läßt, was für Zahlen unter die Form $a.10^m \pm n$ gehören, wenn a, m und n ganze Zahlen, und insbesondere a und n nach und nach alle von 1 bis 9 bedeuten, kann sehr überflüssig scheinen. Man habe es indeß bey der Addition der positiven und negativen Zahlen gethan, so werden sich ihm in der Multiplication bey dem Satze $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ von selbst die Fälle darstellen, welche man vermittelst dieser Gleichung sehr bequem im Kopfe und auf eine sehr kurze Art ausrechnen kann. Hierdurch wird ihm der Satz $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ selbst wichtiger, er prägt sich daher denselben fester ein, und dann hat er in der Lehre von dem Drucke des Wassers gegen vertical in demselben stehende Ebenen gewiß nicht nöthig zu suchen, wenn er ihn dabey als Hülfssatz braucht. — Daß man die künstliche Einrichtung unserer Art zu zählen genau entwickele, kann an sich dem Praktiker sehr gleichgültig seyn. Allein wenn er hinterher angeleitet wird, ähnliche Kunstgriffe bey denjenigen concreten Zahlen, womit er es vorzüglich zu thun hat, zu gebrauchen, und sich dadurch die deutliche und schnelle Kenntniß derselben zu erleichtern, dann auch? — Die Lehre von den Polygonal-Zahlen wird auch öfters als in der Theorie allein brauchbar betrachtet, aber was für Vortheile gewährt sie in der Lehre von der Schwere, die dem Praktiker doch sehr geläufig seyn muß. Am besten wäre es daher wohl, wenn jeder während der Zeit der Vorbereitung bey den zu erwerbenden Kenntnissen nur immer sich fragte: Ist das, was du lernen sollst, wahr? und hast du es ganz und nach allen seinen Gründen und deutlich gefaßt? Um den Nutzen braucht er nicht bekümmert zu seyn, der wird schon von selbst folgen.

Oefters räth man, den Unterricht in den Elementen durch praktische Anwendungen angenehm zu machen, und wenn derselbe künftigen Praktikern ertheilt wird, so betrachten solches manche so gar als nothwendig. Wenn vom Anfang an und ununterbrochen der Weg gegangen wird, welchen die mathematische Methode vorschreibt, so scheint es zwar anfänglich, als ob nur bloß für die Theorie gearbeitet werde. Allein man springe nur nicht, so muß der Schüler auch schon bey den Elementen das Besondere aus dem Allgemeinen so oft und unter so mancherley Umständen herleiten, daß es ihm am Ende des vorgeschriebenen Weges nicht an einer Fertigkeit mangeln kann, dasselbe weiter fortzusetzen. Wozu also das Ueber-treiben der Frucht, zumal da sie dadurch hier nicht bloß weniger schmackhaft, sondern völlig verdorben wird? Uebrigens habe ich hier von dem gesprochen, was für jeden Praktiker nothwendig ist, wenn er anders zum Selbsthandeln geschickt werden will. Daß zum vollkommenen Praktiker weit mehr erfordert werde, ist oben S. 87. angeführt worden.

Ich komme auf diejenigen, welche sich wissenschaftliche Kenntnisse von den der Mathematik und Philosophie nicht unterworfenen Dingen (S. 137) zu ihrem Entzwecke vorgesetzt haben. Herr Joh. Peter Eberhard hat in seinen 1769 zu Halle herausgegebenen Gedanken vom Nutzen der Mathematik und ihrem Einflusse in den Staat, die Nothwendigkeit mathematischer Kenntnisse in der Theologie, der Jurisprudenz, der Medicin, der Kriegswissenschaft, und im gemeinen Leben zu zeigen gesucht; und bey der unbegrenzten Anwendbarkeit der Mathematik, läßt sich allerdings keine Wissenschaft denken, die einen höhern Grad von Gemeinnützigkeit haben könnte. Nimmt man hiezu dasjenige, was ich oben S. 136—139 von dem Verhältnisse der Mathematik und Philosophie zu den übrigen Wissenschaften gesagt habe, so kann die Vernachlässigung dieser Wissenschaft für keinen Studirenden, selbst in Ansehung des Materiellen, ohne den größten Nachtheil bleiben. Gleichwohl will ich nicht sowohl hierauf, als vielmehr auf die Größe des von dem

Studium der Mathematik zu erwartenden formellen Nutzens die Behauptung gründen: daß dieses Studium allgemeines Vorbereitungsstudium für jeden, der sich den Wissenschaften widmet, seyn sollte, und daß auch er die vorhin abgesteckte Bahn durchlaufen müsse. Ich darf es nemlich hier nicht bey dem bewenden lassen, was ich in der dritten Abtheilung des ersten Abschnitts gesagt habe. Denn da Herr Rehberg, ein Mann, in welchem das Publikum einen scharfsinnigen Denker verehrt, im ersten Stücke der Berlinischen Monatsschrift des laufenden Jahres die Behauptung gegen einen seiner Gegner bestreitet, daß das Studium der Geometrie in einem höhern Grade zur allgemeinen Bildung des Geistes geschickt sey, als das Studium der alten Autoren: so wird es Pflicht, diese an sich schon äußerst wichtige Materie noch von einigen andern Seiten zu betrachten. Herrn Rehbergs Worte sind folgende.

„Mein Gegner *) meint: die Geometrie sey in einem höhern Grade zur allgemeinen Bildung der Geisteskräfte geschickt.

*) Herr Rehberg hatte im Februar und Merz der Berlinischen Monatsschrift vom Jahr 1788 einen vortreflichen Aufsatz über die Frage einrücken lassen: Sollen die alten Sprachen bey dem allgemeinen Unterrichte der Jugend in den höhern Ständen zum Grunde gelegt, oder den eigentlichen Gelehrten allein überlassen werden? In Beziehung hierauf geschrieben erschien im siebenten Stücke des Braunschweigi-

geschickt. Dies ist ein Vorurtheil, welches ich in ihm entschuldigen muß, weil er es mit sehr vielen, auch einsichtsvollern Männern gemein hat. Aber es ist demungeachtet ein Vorurtheil, gegen welches viele und wichtige Gründe streiten."

„Ueberhaupt ist allzustrenge wissenschaftliche Bildung von Kindheit auf, nicht der rechte Weg. Wenn der junge Mensch zu früh daran gewöhnt wird, nur eine Reihe abgesonderter Begriffe und Lehren zu verfolgen, so lernt er zwar bestimmt denken; aber er wird auch einseitig, unbehülflich, und verliert den schnellen und viel umfassenden Blick, der dem Menschen im gemeinen Leben das nöthigste ist. Die Mathematik aber ist die strengste Wissenschaft unter allen: die einzige Wissenschaft in ihrer Art. Sie hat alle Vortheile und Nachtheile des wissenschaftlichen Denkens. Ihr Wesen ist eine so strenge Folge von Beweisgründen, dergleichen nirgends anders statt findet, als etwa in der Logik und Metaphysik, welche aber auch deswegen (und weil sie

schweigischen Journals von Herrn Trapp: Ueber das allgemeine Studium der Sprachen; und, in Halle, Herrn Hensels Gegenstück. In der Recension dieser letzten Schrift im August und October des Braunschweigischen Journals steht die Behauptung: daß die Geometrie in einem höhern Grade zur allgemeinen Bildung der Geisteskräfte geschickt sey als die alten Sprachen, S. 243.

noch oben drein die allerabgezogensten Begriffe zu Gegenständen haben) mit gutem Grunde in einen spätern Zeitpunkt der Laufbahn des jungen Studirenden verwiesen werden. Die Geometrie hat noch oben drein zwar sinnliche Gegenstände, aber ganz willkührlich gebildete, und die von der wirklichen Welt abführen, wenn man sich ihren abstrakten Kontemplationen zu sehr überläßt. Kenntniß der Mathematik ist in sehr vielen Arten von Gelehrsamkeit unentbehrlich, dem Philosophen durchaus nothwendig, weil er ohne diese Kenntniß das Wesen des menschlichen Erkenntnißvermögens nicht zu erforschen vermag: aber als Schule für den Kopf ist sie, selbst in wissenschaftlicher Rücksicht, von sehr zweifelhaftem Nutzen. Eine Menge Beyspiele beweisen, daß auch große Mathematiker oft schlechte Philosophen sind. Es giebt viele Rechner, gegen einen, der seine Wissenschaft so wie Kästner mit philosophischem Geiste behandelt. Für die Bildung des Verstandes aber vollends, so wie der junge Mensch ihn in der Welt, im gemeinen Leben, und zu Geschäften, wo es auf Beobachtungsgeist ankommt, gebrauchen wird, ist das Studium der Mathematik nicht der beste Weg."

So stark und selbst bitter zum Theil die Vorwürfe sind, die Herr Rehberg hier der Mathematik macht, und so sehr sein Tadel dem oben dieser Wissenschaft ertheilten Lobe entgegen zu stehen scheint: so giebt es dennoch

noch einen Gesichtspunkt, wobey dieser Gegensatz gänzlich verschwindet, und es sehr Unrecht seyn würde, Herrn Rehberg der Uebertreibung zu beschuldigen. Herr Rehberg kann mit Recht sagen: Es giebt viele Rechner gegen einen, der, so wie Kästner, seine Wissenschaft mit philosophischem Geiste behandelt. Behauptet man doch selbst vom Herrn Euler allgemein, daß er in philosophischen Untersuchungen selten so glücklich gewesen sey, als im Calcul. Und was Herrn Kästner betrifft, so wäre dieser große Mann auch ohne Mathematik Deutschlands Lehrer geworden. Denn seitdem er kennen gelernt hatte, und dies geschah bey ihm eben so früh, als bey andern spät oder gar nicht, was ihm die Vorsicht zum Wohl auf dieser Welt zugedacht habe:

Ein redlich Herz, genügsam im Begehren
Und einen Geist, den Denken glücklich macht.

Seitdem glaubte er auch, Alles gehöre zu seinem Vergnügen, was einen denkenden Geist beschäftigen kann, und er gerieth, um seinen eigenen Ausdruck beyzubehalten, einmal auf die Eitelkeit, von allen Wissenschaften, mit denen er in einige Bekanntschaft kommen konnte, zu sagen:

Noster in has omnes ambitiosus amor. *)

*) Man sehe dessen vermischte Schriften, dritte Auflage, S. 337. 338.

Doch um nicht hierbey stehen zu bleiben, ist es nicht ganz gewöhnlich, die Mathematik wegen ihrer Strenge als eine viel schwerere Wissenschaft denn alle übrige, und zugleich als eine solche zu betrachten, die durchaus einen besondern, von keiner andern Wissenschaft zu betretenden Weg gehe? Wie oft hört man das Urtheil, daß zur Mathematik ein besonderer Kopf gehöre? Was insbesondere die Geometrie betrifft, wie gemein ist die Behauptung, daß die Gegenstände derselben von der Willkühr erschaffen werden, und daß insbesondere die Hülfslinien an keine Gesetze gebunden sind? Und dann wie benimmt man sich bey ihrer Erlernung? Wird der Anfang früh gemacht, so wird mechanisch gerechnet, Figuren gezeichnet, halbverstandene Erklärungen dem Gedächtnisse eingepräget, Sätze und Aufgaben historisch gemerkt, und bey der Lehre von der Gleichheit der Dreyecke vielleicht schon mit dem Messen auf dem Felde der Anfang gemacht. Wird später angefangen, wie selten wird dann bey den allerersten Lehren gehörig verweilt, und auf einmal der Grund tief und breit genug gelegt? Wie selten ist es dann dem Lehrer erlaubt, Vollständigkeit und Ausführlichkeit zu beobachten? Dazu setze man, daß der Gesichtspunkt, aus welchem die Mathematik stets angesehen werden sollte, so oft ganz und gar nicht erkannt wird, und daß man die Mathematik nicht für Formen-Kenntniß, sondern für Kenntniß wirklicher Dinge hält. Daher sucht man selbst den Punkt, die gerade Linie und die Ebene bey wirklichen Dingen auf, und glaubt wohl gar durch Herrn Kästners Verfahren in seinen Anfangsgründen der Geometrie dazu berechtiget zu seyn. Aber Herr Kästner beweiset sich auch hier als ein Mathematiker, der seine Wissenschaft mit philosophischem Geiste bearbeitet, und schon Herr Lempe in seinen Erläuterungen der Kästnerischen Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie verläßt sein Muster. Bey diesen Umständen kann allerdings der Nutzen, den das Studium der Mathematik für die Bildung des Kopfs hat, nur bey denen sichtbar werden, die würdige Schüler wahrer Mathematiker sind; und da beyder Anzahl nicht groß ist, und außerdem die Mathematik meistens mehr um ihres materiellen als um ihres formellen Nutzens willen getrieben wird, so läßt sich allerdings behaupten, daß das Studium des Mathematik, so wie es gewöhnlich betrieben wird, als Schule für den Kopf, selbst in wissenschaftlicher Rücksicht von sehr zweifelhaften Nutzen sey. Auch hatte Herr Rehberg Recht, bey der Widerlegung der einseitigen und in einer Absicht selbst übertriebenen und fehlerhaften Behauptung seines Gegners, nur das zu berühren, was ist, ohne sich auf dasjenige einzulassen, was seyn kann und seyn sollte; allein zum Nachtheile der Mathematik darf das nicht gereichen. Da also Herrn Rehbergs Weg mit dem meinigen sich nicht durchkreuzt, sondern beyde da, wo wir zusammentreffen, in Einem sich vereinigen, und nach einem reizenden Ziele führen; warum sollte ich denselben nicht etwas weiter verfolgen? Herrn Rehbergs Gesellschaft gereicht mir zur Ehre, vielleicht verschmäht auch Er die meinige nicht.

Herr Rehberg sucht in dem in der Anmerkung angeführten Aufsatze zu beweisen, daß ohne das Studium der alten Litteratur die Bildung der höhern Stände zu gründlicher wissenschaftlicher Einsicht, nach den jetzigen Umständen der Welt gar nicht, die Bildung der Sittlichkeit aber nicht besser, als durch dasselbe erreicht werden könne. Jenes darzuthun, führt er folgende Gründe an. Wir können der Bekanntschaft mit der Geschichte, mit der Verfassung, mit den Kenntnissen der alten Völker, mit allem, was man unter dem Namen ihrer Litteratur begreift, und aus ihr lernen kann, zum Behuf gründlicher wissenschaftlicher Kenntnisse nicht entbehren. Alle unsere Kenntnisse sind nicht nur in ihrem ersten Grunde aus der alten Litteratur entsprungen, sondern es beruht auch noch jetzt der größte Theil unserer wissenschaftlichen Kenntnisse auf jenem Grunde. Der Theologe und der Jurist kann der alten Litteratur gar nicht entbehren; ganz so nothwendig ist sie vielleicht dem Naturkundigen und dem Arzte nicht; allein überhaupt sind griechische und römische Begriffe so sehr in alle unsere Gelehrsamkeit und noch ganz vorzüglich in alle unsere Werke der schönen Wissenschaften und Künste verwebt,

daß

daß man einige Kenntnisse gar nicht entbehren kann, wenn man nur einigermaßen verstehen will, womit sich der Theil des menschlichen Geschlechts vergnügt, der mehr in der Bildung des Geistes als in körperlicher Beschäftigung seine Bestimmung sucht. Wenn auf diese Art die Kenntniß der alten Litteratur dem Gelehrten unentbehrlich wird, so ist auf der andern Seite überhaupt Denken die Bestimmung des Menschen, nicht Wissen. Nicht allein die innere Wirksamkeit der Menschen, auch die äußere Brauchbarkeit des Bürgers beruht nicht auf der Masse der erworbenen Kenntnisse, sondern auf der Bildung der Denkkraft, durch welche er in den Stand gesetzt wird, seine Kenntnisse anzuwenden, und den Umständen gemäß zu handeln. Es ist also der gewöhnliche Gegensatz speculativer Köpfe nur in einem sehr eingeschränkten Sinne gegründet. Das Talent: allgemeine Wahrheiten in der Abstraktion nicht nur einzusehen, sie zu verfolgen, zu entwickeln und vorzutragen, ist freylich sehr von dem Talente verschieden, das dazu erfordert wird: geschwind und sicher zu entscheiden, welche allgemeine Gesetze in vorliegenden Fällen Anwendung verstatten. Sie finden sich sogar nur sehr selten mit einander in einem Kopfe vereiniget. Es ist ein sehr gewöhnlicher Irrthum nicht sowohl speculativer Köpfe, als vielmehr praktischer, denen es an Theorie fehlt, und die fühlen, daß sie ihrer nicht entbehren können: daß man nur von dem gründlichen Studium der Theorie ausgehen dürfe,

und

und wenn man diese vollständig im Kopfe habe, einer sichern Anwendung gewiß seyn könne. Aber eben so wenig als die Theorie den Praktiker bildet, eben so wenig kann er sie entbehren. Die gründliche Einsicht und Geläufigkeit theoretischer Grundsätze ist es allein, welche dem Praktiker einen Faden giebt, um sich nicht in der unendlichen Mannigfaltigkeit der Erscheiuungen zu verlieren, unsichern und täuschenden Analogien zu folgen, und in beständige Widersprüche zu fallen. Wenige Kenntnisse des Einzelnen, mit gründlicher Einsicht in den Zusammenhang desselben und in die Methode, ist unendlich mehr werth, als die ausgebreiteteste Kenntniß ohne Theorie. Denn die Einsicht in allgemeine Wahrheiten ist es eben, welche lehrt, einzelne Wahrheiten aufzusuchen und zu entdecken. Wenn aber dieses in allen Wissenschaften also ist, so bedarf auch der praktische Gelehrte eben so wohl einer gründlichen theoretischen Einsicht, als der historischen Kenntniß, welche ihn Gelehrsamkeit ohne eigene Erfahrung lehrt, und welche letztere ohne theoretische Einsicht nicht einmal ihren Namen verdient, und zu gar nichts zu gebrauchen ist. Zu der Bildung eines tüchtigen praktischen Kopfes gehört also gründliche wissenschaftliche Bildung. — Es ist ein ganz falscher Grundsatz neuerer Erziehungsphilosophen, auf dem sie ein äußerst verderbliches und ganz irriges System gründen: daß Menschen bestimmen können und sollen, was aus dem Charakter und Kopfe eines jungen Menschen

schen werden kann. Das vom Erzieher unabhängige Schicksal versetzt jenen in mannigfaltige Umstände, in denen sich seine natürliche Anlagen entwickeln. Dem Zufalle muß man also das freyeste Spiel lassen, die Gelegenheiten zur vollkommensten Ausbildung so viel als nur immer möglich ist, verstatten, den allgemeinen Unterricht auf möglichste Vervollkommung gründlicher Einsichten anlegen, es dem Schicksale überlassen, wie viel davon jeder nutzt, und lieber auch von dem großen Haufen, welchen der Staat erzieht, mehr fordern, als die mehresten fähig sind, zu leisten, damit nur von denjenigen, die dazu fähig sind, und deren immer nur wenige bleiben, keiner verloren gehe. — Freylich ist die alte Litteratur und besonders das Studium der Sprache, und derjenigen Schriftsteller, die in der Jugend am meisten gelesen werden, nur Vorbereitung. Allein sie ist nicht bloß eine sehr nothwendige Vorbereitung, sondern es würde auch zweckwidrig seyn, die Jugend frühe sehr viel mit den Wissenschaften zu beschäftigen, welche nach der alten Einrichtung auf diese Vorbereitung folgen sollen. Sie verliert dadurch nur das Interesse für Erkenntniß, welche in spätern Jahren nicht mehr in ihrer wahren Würde erscheinen kann, weil bie erste Leidenschaft zu ihr durch einen Schatten befriedigt worden ist. Es thun daher diejenigen, welche strengere Wissenschaften für Kinder und Jünglinge zurichten, um ihnen frühe Begriffe von allem zu geben, was sie dereinst als Männer wissen sollen,

len, einen unermeßlichen Schaden. Sie bilden im Allgemeinen nur flache Köpfe, die alles einzusehen vermeinen, und nicht mehr fähig sind, den Werth tiefer Einsichten zu fühlen. Es bedarf freylich der praktische Gelehrte eben so wohl der Kenntniß der Gegenstände, auf welche er seine Wissenschaft anwenden soll. Aber auch diese sogenannte Realkenntnisse sind nicht der allgemeinste angemessene Unterricht der Jugend. Ein gebildeter Verstand faßt in spätern Jahren nicht nur geschwind alles, wovon er einsieht, daß er es brauchen kann; sondern es ist sehr nützlich, daß er vorher noch nichts davon gewußt habe. Alsdann rührt der neue Gegenstand der Erkenntniß plötzlich die Einbildungskraft und den Verstand, welche eine lange Bekanntschaft dafür ganz abgestumpft haben würde. — Der Gegenstand des allgemeinen Unterrichts wird also dasjenige seyn müssen, was die nächste Beziehung auf den allgemeinsten Beruf jedes gebildeten Menschen hat, wodurch die Kraft zu denken am allgemeinsten ausgebildet wird. Und dieses ist: die Sprache. Nur durch Worte denkt der Mensch. Und wenn man die Entstehung der Sprache betrachtet, in welcher nur so wenige Vorstellungen durch eigene Worte angedeutet, und fast alles, vorzüglich aber die höhern Abstraktionen, deren wir uns, durch die beständige Uebung selbst unbewußt, unaufhörlich in dem alltäglichsten Gespräche bedienen, nur durch uneigentliche und unbestimmte Ausdrücke, mehr angedeutet,

deutet, als eigentlich genau angegeben werden; so erscheint die Kenntniß der Sprache in einem ganz andern Lichte, und man wird das Urtheil nicht mehr übertrieben finden, daß eine Sprache recht gründlich lernen, beynahe eben so viel heiße, als Denken lernen. Zudem sind viele Beschäftigungen mit der Sprache nichts anders, als vorbereitende philosophische Untersuchungen. Der Unterricht aus Büchern wird also nicht durch einen andern zu ersetzen seyn, der die Sachen selbst, anstatt der Zeichen, kennen zu lehren verspricht. — Die Behauptung: daß die sittliche Bildung des Bürgers in den höhern Ständen nicht besser als durch das Studium der Alten erhalten werde; gründet Herr Rehberg auf Folgendes. Die philosophische Sittenlehre ist unter den Händen der neuen Philosophen weit mehr zu einer speculativen Wissenschaft geworden, und hat gegen die Sittenlehre der Alten etwas Kleinliches und Ohnmächtiges. Wenn sie ja praktisch werden soll, so verfällt sie in einen sehr matten Ton. Es entsteht hierdurch eine Lücke in unserm philosophischen Unterrichte, die schwerlich besser wird können ausgefüllt werden, als durch das Studium der Alten, die in der philosophischen Sittenlehre deswegen immer über uns bleiben werden, weil sie ihre Vernachläßigung durch nichts anders ersetzen konnten. In Ansehung des Umfangs, und des innern Gehalts der ersten Grundbegriffe über die sittliche Natur des Menschen, bleiben wir weit unter den Alten. Noch weit mehr als alle Philosophie

wirkt,

wirkt, vorzüglich auf die erste Bildung der Jugend, Dichtkunst und Geschichte. Es fehlt aber der Litteratur neuerer Völker im Ganzen nicht nur an dem originalen Geiste der Alten; sondern die mehresten von den großen neuern Schriftstellern sind ohne einige Kenntniß der alten griechischen und römischen Litteratur gar nicht einmal zu verstehen. Ueberſetzungen aber ersetzen den Mangel dieser Kenntniß nicht.

Ich habe Herrn Rehbergs Behauptungen mit ihren Gründen ausführlich und mit seinen eigenen Worten hergesetzt, nicht bloß weil alles so äußerst wichtig und zugleich so schön gesagt ist, sondern weil eben die Gründe, wodurch Herr Rehberg die Nothwendigkeit des Studiums der alten Litteratur zur Bildung der höhern Stände beweiset, gebraucht werden können, um dieselbe Nothwendigkeit von dem Studium der Mathematik darzuthun. Wenn ich dieses gezeigt haben werde, so bin ich vielleicht im Stande, nicht nur für die Nothwendigkeit beyder Studien zur zweckmäßigen Bildung der Jugend noch einige andere Gründe hinzuzufügen, sondern auch das Verhältniß zu bestimmen, in welchem beyde mit einander stehen und getrieben werden müssen. Ausschweifung aber darf diese Untersuchung deswegen nicht scheinen, weil bey so wichtigen Materien nothwendig auf die Zeitumstände Rücksicht genommen werden muß, unter welchen man davon spricht.

Ich habe S. 227 berührt, daß die Mathematik auch wegen ihres materiellen Nutzens jedem Studirenden wichtig sey. Eben dieses giebt Herr Rehberg zu, wenn er sagt: Kenntniß der Mathematik ist in sehr vielen Arten von Gelehrsamkeit unentbehrlich, dem Philosophen durchaus nothwendig, weil er ohne diese Kenntniß das Wesen des menschlichen Erkenntnißvermögens nicht zu erforschen vermag. Ob das Studium der Mathematik als Schule für den Kopf, selbst in wissenschaftlicher Rücksicht, von zweifelhaftem Nutzen sey? darüber kann ich mich theils auf dasjenige berufen, was ich in der dritten Abtheilung des ersten Abschnitts gesagt habe, theils die Entscheidung den Alten überlassen. Und welche Wissenschaft ist in eben dem Grade im Stande, die reine himmlische Wollust zu gewähren, die nur dem noch süßern Bewußtseyn sittlichedler Thaten weicht, die Wollust, seinen Geist zum innern Anschauen der Wahrheit zu erheben, in einsamer Stille der ernsten Betrachtung derselben nachzuhängen, und von ihren Flügeln umschattet, den edlen Durst nach Erkenntniß zu sättigen? Auf der andern Seite giebt es gleichfalls gegen einen Heyne, der meines Lobes nicht bedarf, eine Menge solcher, die aus der alten Litteratur nichts als Worte und todte Kenntniß geschöpft haben. Folglich ist man im Stande, so wie durch eben die Gründe, auf welche Herr Rehberg die Nothwendigkeit des Studiums der Alten für jeden Studirenden gebauet hat, diese Nothwendigkeit für das Studium der Mathematik zu beweisen, also auch denselben Tadel, mit welchen er die Größenlehre belegt hat, auf das Studium der Alten zurückfallen zu lassen. Dergleichen Möglichkeiten sind allemal ein sicheres Kennzeichen, daß der Gesichtspunkt nicht ganz bestimmt genommen worden ist, und Thorheit wäre es, streiten zu wollen, wo eine deutlichere Erklärung den ganzen Zwist aus dem Wege räumen kann.

Das kann selbst der wärmste Freund der Alten nicht behaupten, daß das Studium ihrer Litteratur, auf jede Art getrieben, den Nutzen gewähre, welcher allerdings davon erhalten wird, wenn man den wahren Weg einschlägt. Auch lehrt die Erfahrung, daß der junge Mensch, um dieses Nutzens theilhaftig zu werden, zu der Lesung der Alten schon einen gewissen Grad der Bildung mitbringen muß. Wie müssen also zuvörderst die Alten gelesen werden? Dichter und Geschichtschreiber, deren Lesung zur ersten Bildung der Jugend vorzüglich benutzt werden muß, in Ansehung der Sachen, unstreitig am besten so, wie Horaz den Homer gelesen hatte, da er dem Lollius schrieb:

Trojani belli scriptorem, maxime Lolli,
Dum tu declamas Romae, Praeneste relegi;
Qui, quid sit pulchrum, quid turpe, quid utile, quid non,
Planius ac melius Chrysippo et Crantore dicit.

das heißt, so, daß der Schüler mit seinem Autor, und wie derselbe, anschaue, empfinde, denke. Dies war

das

das Mittel, wodurch Horaz im Homer mehr und besser dargestellte Weisheit fand, als selbst in den Schriften des Chrysippus und Crantor; man lese nur, was er in dem zweyten Briefe des ersten Buchs nach den angeführten Worten sagt. Eben darauf dringen auch die wahren Kenner, wenn sie verlangen, daß der Schüler vor allen Dingen seinen Autor verstehen solle; und damit solches vom Anfang an möglich sey, wollen sie, daß jedesmal nur solche Autoren oder solche Stellen gelesen werden sollen, welche den Fähigkeiten des Jünglings angemessen sind. In Ansehung der Sprache aber wird der daraus mögliche Nutzen eben so offenbar nur dann ganz erreicht, wenn der Schüler den Grund, warum gerade die gegenwärtigen Worte und keine andere gewählt sind, und warum dieselben gerade in der stattfindenden Verbindung und Ordnung und in keiner andern stehen, in den Gedanken, welche der Autor ausdrucken wollte; und den Grund von diesen, sowohl überhaupt, als mit allen ihren Nebenbeschaffenheiten, in der Absicht, in den Umständen, und in der Denkart des Autors finden lernt. Soll nun hiernach bestimmt werden, was der Schüler mitbringen muß, um die Lesung der alten Autoren mit Nutzen anzufangen: wer sieht nicht, daß er ohne bereits geübte Denkkraft dessen gar nicht fähig ist? Er muß im Stande seyn abgezogene Begriffe zu fassen, sie zu zergliedern, und das, was darin die Sache selbst betrifft, von dem abzusondern, was aus Nebenumständen hergeflossen ist; er muß die

Fähigkeit haben, mit Leichtigkeit Mengen von Vorstellungen in eine zusammenzufassen, und deutlich sich zu gedenken; er muß, nicht bloß einfache Begriffe, sondern selbst in hohem Grade zusammengesetzte, richtig, genau und schnell mit einander vergleichen können; sein Blick muß scharf und eindringend, seine Aufmerksamkeit stark, geschmeidig und wohlgeordnet, seine Vergleichungs- seine Unterscheidungs- seine Urtheilskraft schon geübt und gestärkt seyn. Vor allen Dingen aber ist nöthig, daß ihm bereits das Streben nach deutlichen und vollen Erkenntnissen Bedürfniß, und das Forschen nach Gründen Gewohnheit geworden sey; daß er Wahrheitsgefühl besitze, und Geschmack an Untersuchungen finde. Je mehr von allen diesen Eigenschaften da ist, desto größerer Männer Schriften kann er lesen; so lange er sich dieselben noch in keinem Grade erworben hat, so lange können ihm die classischen Werke der Alten nicht in ihrer wahren Würde erscheinen, und der Schatten derselben, den er allein kennen lernt, und durch seine eingeschränkte Denkfähigkeiten gezwungen ist, für den Körper zu nehmen, wird von ihm in spätern Jahren als bloß für Kinder gehörig angesehen.

Wenn also das Studium der Mathematik, auf die rechte Art getrieben, die Nachtheile nicht hat, welche Herr Rehberg von demselben behauptet; wenn es möglich ist, diese Wissenschaft, ohne weder ihrer Gründlich-

keit

keit zu nahe zu treten, nach der Schwäche der Lernenden Gewalt anzuthun, vor der Lesung der alten Autoren dem Anfange nach vorhergehen zu lassen, und darauf mit derselben zu verbinden; wenn dieses möglich ist, ohne deswegen die Lesung der Autoren zu lange zu verschieben, noch derselben etwas von der dazu erforderlichen Zeit zu entziehen: wozu dann Entgegenstellung, wo Vereinigung größere Vortheile verschafft? wozu Erhebung des Einen auf Unkosten des Andern?

Die Mathematik soll die strengste Wissenschaft unter allen, die einzige Wissenschaft in ihrer Art seyn. Zugegeben, so darf Niemand in dieser Wissenschaft unwissend seyn, der auf die Benennung eines gebildeten, eines denkenden Kopfes Anspruch macht; denn er kennte ja alsdann eine von allen andern sich unterscheidende Art der menschlichen Erkenntnisse nicht. Und wenn man ohne Mathematik das Wesen des menschlichen Erkenntnißvermögens nichts zu erforschen vermag, so wird sie auch dadurch allgemein für jeden Denker nothwendig. Oder kann man um den Gebrauch seines Erkenntnißermögens ganz in der Gewalt zu haben, der deutlichen Kenntniß desselben entbehren? Ohne darüber zu streiten, ob auch in andern Wissenschaften vollkommene Definitionen, Axiome und Demonstrationen möglich sind, so lernt man wenigstens das Wesen dieser Dinge nicht anders als durch die Mathematik vollkommen kennen. Endlich wenn die Mathematik die strengste Wissenschaft unter allen ist, so muß es dem, der sie besitzt, leicht seyn, jede weniger strenge Wissenschaft sich eigen zu machen. Doch die Mathematik soll wegen ihrer Strenge auch zugleich die schwerste Wissenschaft seyn, deswegen in einen spätern Zeitpunkt der jungen Studirenden gehören. Dies leugne ich, und so ungern ich mich des Ausdrucks bediene, so muß ich es ein Vorurtheil nennen, das zwar sehr gemein, aber dadurch nur um so schädlicher ist. Die Geometrie insbesondere soll es zwar mit sinnlichen, aber ganz willkührlich gebildeten Gegenständen zu thun haben. Das erste ist wahr, das letzte aber ist es nur von einer Seite, und in so fern es statt findet, in so fern streitet es für das, wowider es angeführt worden ist. Ich will mich näher erklären.

So bald vorausgesetzt ist, daß die Mathematik nichts von der Erfahrung entlehnen, sondern alles in und aus der Seele selbst schöpfen müsse, so bald bleibt in ihr nicht das mindeste willkührlich, sondern alles erhält im höchsten für uns möglichen Grade Nothwendigkeit. Hierüber habe ich mich bereits an einem andern Orte erklärt. Daß wir die Mathematik an jenes Gesetz binden, mag willkührlich scheinen; allein da unsere Seele nicht bloße bildsame Wachstafel, welche nur diejenigen Charaktere enthält, die ihr von außen aufgedruckt werden, sondern ein Kraft ist; da sie als Kraft die Vorstelstellungen, welche sie durch Eindrücke empfängt, selbstthätig aufnimmt, bearbeitet, und aus und durch sich selbst entwickelt und vermehrt; da sie in dem, wobey sie der äußern Hülfe der Erfahrung nicht bedarf, als ein durchgängig bestimmtes, unwandelbares Wesen, und stets und bey allen gleich sich beweiset; da sie die Kenntnisse, welche sie aus sich selbst schöpft, unentbehrlich braucht, um die von wirklichen Gegenständen ihr möglichen nicht bloß vom Zufalle zu erwarten, sondern dieselben, so wie sie ihr nöthig werden, selbst aufzusuchen, und sich auf die leichteste Art und in der erforderlichen Menge, Mannigfaltigkeit, Genauigkeit, Vollständigkeit und Gewißheit zu verschaffen: so ist es unverantwortlich, wenn der junge Mensch, der zum Denken gebildet werden soll, nicht so frühzeitig als möglich, zur Erkenntniß der Formen, oder der Gegenstände, welche die Seele unabhängig von der Erfahrung sich denken und untersuchen kann, geführet wird. Man setze mir hier nicht die Nothwendigkeit anschaulicher Kenntnisse entgegen. Ich weiß, daß man, wenn man der Natur unserer Seele ganz gemäß handeln will, allenthalben von anschaulichen Vorstellungen ausgehen, und allemal zu dergleichen zurückkommen, und bey ihnen endigen muß. Ich gebe zu, daß dieser Gang nicht nur überhaupt, sondern auch bey jeder erweiterten und neuen Untersuchung eines Gegenstandes nöthig ist; selbst bey der Beschäftigung mit den Formen ist der Weg, den ich in dem Vorhergehenden, als den ein-

einzigen durchaus zweckmäßigen und natürlichen darzustellen gesucht habe, ganz mit diesem Gesetze übereinstimmend. Aber unsere Kenntniß, auch von wirklichen Dingen, soll nicht bloß anschaulich, sie soll zugleich deutlich, mit leichtem Ueberblicke verbunden, viel umfassend und ganz in unserer Gewalt seyn; und ohne den Gebrauch der Formen-Kenntniß bleibt sie verworren, schwer zu übersehen, kann sich nur auf wenige Dinge erstrecken, und wir sind dabey mehr vom Zufalle abhängig. So wichtig mir daher auf der einen Seite der vortrefliche Versuch des Herrn Lieberkühn über die anschauende Kenntniß, und die schöne Abhandlung über die Nothwendigkeit, Kinder zu anschauender und lebendiger Kenntniß zu verhelfen, und über die Art, wie man dies anzufangen habe, von Herrn Stuve, im zehnten Theile der allgemeinen Revision des gesammten Schul- und Erziehungswesens ist; so schätzbar ich darin die Anweisung finde, allgemeine Begriffe anschauend zu machen: eben so ungern vermisse ich die Bestimmung, wie lange das Kind bloß mit anschaulichen Begriffen beschäftiget, und die Forderung, daß über dem Streben nach Anschaulichkeit die Kenntniß der Formen nicht bey Seite gesetzt, sondern so früh als möglich gesucht, und zur leichtern und bessern Erwerbung anschaulicher Kenntnisse benutzt werden müsse. Was hilft die Kenntniß heilsamer Arzneyen, wenn man die jedesmal zu nehmende Dosis nicht weiß, unbekannt ist mit den Umständen, unter welchen allein sie heilsam sind?

Und

Und welches ist der Weg, nicht nur auf die leichteste Art und früh, sondern überhaupt zur Kenntniß der Formen und dem Gebrauche derselben zu gelangen? Etwa der, daß man dieselben von wirklichen Dingen oder aus deren Begriffen abstrahire? Zu allgemeinen sinnlichen Begriffen kommt man auf diesem Wege freylich, aber nicht zu Formen. Und gesetzt, dies letztere fände statt, so wird die Abstraction nur dann erst möglich, wenn man das Einzelne oft und von vielen Seiten und unter verschiedenen Umständen wahrgenommen hat, und es wäre also dieser Weg äußerst weitläuftig und schwer. Ferner hat der dadurch erhaltene Begriff, als reeller Begriff, nie gänzliche Allgemeinheit, weil man ihn nie von allen ihm untergeordneten einzelnen Begriffen abstrahiren kann. Endlich wird auf diese Art das Gemüth nicht vom Sinnlichen abgezogen, sondern daran unzertrennlich geknüpft, und doch ist das gerade das größte Hinderniß bey der Erforschung der Wahrheit, daß so wenige im Stande sind, ihren Geist über das Sinnliche zu erheben. Und wie will man auf diesem Wege kennen lernen, was in unsern Erkenntnissen von Eindrücken herrührt, und was darin die Seele aus sich selbst hergegeben hat? Es bleibt demnach kein anderes Mittel übrig, als frühe Erlernung der Mathematik und zwar nach aller Strenge ihrer Methode.

Frühe Erlernung sage ich, denn der Zeitpunkt tritt bey den Menschen bald ein, wo die Seele so ans Sinnliche gewöhnt seyn kann, daß ihr das Aufschwingen zu den Formen entweder gar nicht mehr, oder doch nur sehr schwer, und dabey gleichwohl nicht vollkommen möglich ist. Und warum wollte man nicht früh damit anfangen, da jedes Kind dazu reif ist, so bald es die fünf ersten Erklärungen des Euclides und seine drey Forderungen verstehen kann? Bey Befolgung der strengsten mathematischen Methode hat überdem der Lehrer nichts weiter zu thun, als sich den Fähigkeiten des Kindes gemäß mit ihm zu unterreden, und zwar über Dinge, die in Anschauungen dargestellt werden können. Wenn er auch das Allgemeine betrachten läßt, so läßt er dasselbe im Einzelnen betrachten, er führt die Gegenstände herbey, legt sie unter verschiedenen Umständen dar, und das Kind hat weiter nichts zu thun, als wahrzunehmen. Wer kann behaupten, daß das zu strenge Beschäftigung für Kinder sey?

Freylich wenn man von dem Begriffe der Mathematik und ihren Theilen anfängt, wohl gar jene als reine Vernunftwissenschaft aus der Construktion der Begriffe erklärt, und diese nach logischen Regeln aufsucht und feststellt; oder wenn man die Geschichte der Mathematik eben so als Vorbereitung vor der Mathematik vorhergehen lassen will, als man durch die Geschichte der Philosophie am besten zur Philosophie selbst vorbereiten zu können glaubt; wenn man die Begriffe und Sätze der

Ma-

Mathematik docirt, nicht zu ihrer Erfindung leitet; wenn man ihre Lehren historisch bekannt macht, und durch einzelne wirkliche Fälle erläutert und bestätiget; wenn das zu absolvirende Pensum nach der Zeit, und nicht nach der Fähigkeit der Lehrlinge bestimmt wird; wenn das Vorgetragene durch kindische Wiederholung und nicht durch natürliche und deutliche Darstellung dem Gedächtnisse eingeprägt wird; wenn Bücher als Quellen gebraucht werden, wo lediglich aus der Seele geschöpft werden muß: dann gehört die Mathematik nicht für das Kind, das ist noch zu unverdorben, als daß es daran in dieser Gestalt Geschmack finden könnte; dann muß diese Wissenschaft erst in spätern Jahren angefangen werden, wo schon mehr Verdrehung der Denkkräfte vorhergegangen seyn kann. Durch verkehrte Methoden richtet man bey verdrehten Gemüthern öfters das meiste aus; aber die Schuld der Mathematik ist es nicht, wenn sie, verkehrt behandelt und in einen unrechten Zeitpunkt verschoben, den Nutzen nicht gewährt, den sie ihrer Natur nach gewähren kann.

Was die Beschuldigung betrifft, daß man durch das Studium der Mathematik einseitig, unbehülflich werde, daß man dadurch den schnellen und vielumfassenden Blick verliere, der dem Menschen im gemeinen Leben das nöthigste ist, und daß ihre abstracten Kontemplationen von der wirklichen Welt abführen: so hätte ich darüber nicht ein Wort zu sagen, wenn ich bey dem Gegenwärtigen die Absicht hätte, Herrn Rehberg zu belehren, und nicht vielmehr die, die flüchtigen Leser seines Aufsatzes von einem Misbrauche abzuhalten, den sie von seinen Aeußerungen machen könnten. Herr Rehberg beweiset sich auch bey den Vorwürfen, die er der Mathematik überhaupt und der Geometrie insbesondere macht, als scharfsinnigen Denker; wer auf alle Bedingungen Acht hat, unter welchen er seine Behauptungen vorträgt, muß ihm unter denselben Recht geben; und daß die Mathematik aus dem Gesichtspunkte, unter welchem er sie betrachtet, von ihren Lehreen leider! nur zu oft angesehen und behandelt werde, ist ebenfalls wahr. Aber man treibe die Mathematik so, wie es ihre Natur, ihr Wesen erfordert, entferne sich insbesondere bey den ersten Elementen der Geometrie in keinem Stücke von Euclides: so ist sie bloß darin eine strenge Wissenschaft, daß sie nichts duldet, was auf Erfahrung beruht; übrigens tränkt sie allemal erst mit Muttermilch, ehe sie härtere Speisen zur Nahrung vorsetzt. Geschmeidigkeit des Geistes, ein schnell nach allen Seiten sich wendender, vielumfassender Blick, ist sicher ein Geschenk, womit die Mathematik alle diejenigen belohnt, die nicht auf halbem Wege stehen bleiben, und insbesondere weder an den reinen Elementen allein sich begnügen, noch von denselben sprungweise zu individuellen Anwendungen fortschreiten. Wenn man die Lehren der Mathematik von einigen wenigen einzelnen Fällen abstrahirt

strahirt, und im höchsten Grade allgemeine Sätze, unmittelbar und ohne andere Kenntnisse mit zu Hülfe zu nehmen, zu praktischen Anwendungen misbraucht, dann ist freylich das Gegentheil unvermeidlich; allein ist dies der Natur der Mathematik und den Vorschriften ihrer Methode gemäß? Wenn man sich den abstracten Kontemplationen der Mathematik zu sehr überläßt, so kann man allerdings dadurch von der wirklichen Welt abgeführt werden. Allein die Mathematik weiset ja vom Anfang an darauf hin, daß man das nicht thun solle; sie zwingt selbst in ihren reinen Theilen, das Abstracte aus dem rechten Gesichtspunkte anzusehen und zu gebrauchen; und wo ist eine Art von Dingen in der Natur, deren Kenntniß sie nicht demjenigen nothwendig machte, der auch ihre Anwendung kennen lernen will?

Bisweilen betrachtet man auch deswegen das Studium der Mathematik für das Leben nachtheilig, weil man dadurch gewöhnt werde, bloß an apodictisch gewissen Wahrheiten Geschmack zu finden. Wenn jemand weiter gar nichts treibt, als reine Mathematik, so ist dieser Nachtheil schwerlich zu vermeiden; allein auf ähnliche Art behält jeder, der sich ausschließungsweise nur mit einer Wissenschaft beschäftigt, endlich nur Sinn für das, was nach der Methode dieser Wissenschaft behandelt werden kann. Der Mathematiker wird freylich nicht so leicht zu befriedigen seyn, als der, der das Or-

gan

gan seiner Seele nicht zu reinigen und zu beleben gesucht hat. Allein wenn er seine Wissenschaft nach der wahren Methode erlernt hat, so sind es nicht apodictische Beweise, welche er verlangt, wenn er glauben, wenn er überzeugt seyn soll, sondern, selbst zu denken, selbst zu forschen gewöhnt, wird er allemal zufrieden seyn, wenn man ihn zu den Quellen führt, aus welchen durch eignen Gebrauch der Denkfähigkeiten dasjenige geschöpft werden kann, was er annehmen soll.

Wenn daher die Mathematik auf der einen Seite die übertriebenen Lobsprüche verschmäht, die ihr von manchen ertheilt werden: so kann sie sich auf der andern eben so gut gegen jeden unbilligen Tadel rechtfertigen. Ist insbesondere von Vorbereitungs-Studien die Rede, so behauptet sie auch darunter den ersten Platz, aber sie thut dieses, ohne irgend eines von den übrigen, und vorzüglich ohne das Studium der alten Litteratur, zu verwerfen. Um diese Behauptung zu begründen dürfte ich nur fragen, ob die Vortheile, die ich oben in dem Absatze von dem Verhältnisse der Mathematik zur Philosophie, insbesondere S. 125—128 berührt habe, in eben der Menge, Ordnung, Größe und Leichtigkeit von irgend einem andern Studium erwartet werden können? Zur Bildung des Geschmacks kann freylich die Mathematik so nicht dienen, als das Studium der unerreichbaren Werke der Alten; aber das Wahrheitsgefühl, ohne welches der gebildete Geschmack nicht statt finden kann, wird dagegen weit besser durch die Mathematik erweckt, geübt, gestärkt, und vervollkommet. Was das Herz betrifft, so bereitet die Mathematik dasselbe der Tugend auf mehr denn eine Art. Wahrheit und Tugend sind Schwestern, und wer mit jener durch das Band der innigsten Freundschaft verknüpft ist, kann dieser den Zutritt nicht verwehren, auch sie ist ihm willkommen. Wie mächtig entzieht ferner das intellectuelle Vergnügen, welches das Studium der Mathematik so rein, und in solcher Menge und Größe darbietet, den Geist dem Reize der Sinnlichkeit, dieser so großen Feindinn der Tugend? Und untersucht man mit Hülfe der Mathematik die Dinge, welche uns umgeben, welche Vortheile entstehen alsdann? Daß unser Geist einer so vollkommenen Herrschaft über die sinnlichen Eindrücke fähig sey, daß er alle Gewalt, die sie besitzen, gänzlich zernichten kann; die Umstände, unter welchen, und die Art und Weise, wie er dazu im Stande ist; kann man an anschaulichen und unbezweifelten Fällen in der Optik lernen, und wie wichtig ist diese Ueberzeugung, diese Kenntniß für die Moral! Mit was für Herzerhebenden Gedanken erfüllt die Astronomie, wenn sie die, alle Einbildungskraft übersteigende Größe des Weltalls dem Geiste darstellt? Herr Kästner hat Recht, wenn er der Mathematik in seiner Abhandlung: De eo quod studium Matheseos facit ad virtutem, einen größern Einfluß als bloß auf den Verstand beylegt.

Eine

Ein Hauptgrund aber, warum das Studium der Mathematik für jeden, der Denken lernen soll, unentbehrlich ist, und weswegen es, wenn eins von beyden wegfallen sollte, vor dem Studium der Alten beybehalten werden müßte, ist der, weil ohne dasselbe die Fertigkeit, abstracte Begriffe ganz zu fassen, und sich damit zu beschäftigen, unmöglich ist. Daß diese Fertigkeit eine höchst nothwendige und wünschenswerthe Fertigkeit sey, fließt schon daraus, daß wir uns selbst in den alltäglichsten Gesprächen unaufhörlich der höhern Abstractionen bedienen. Man sage nicht, daß man diese Abstractionen auf dem Wege der Absonderung aus einzelnen Begriffen lernen müsse; ein sehr großer Theil wird uns von Kindheit an unmittelbar durch die Sprache vorgeführet und beygebracht. Auch ist es nicht der rechte Weg, abstracte Begriffe durch Herbeyziehung des Einzelnen und Wirklichen zu veranschaulichen; wir müssen die Gegenstände, an welchen wir diese Ideen deutlich denken wollen, selbst zusammensetzen, gleichsam selbst schaffen. Denn geschieht dieses nicht, so wird der Geist zum Sinnlichen herabgezogen, und der schnelle Blick, der sonst möglich ist, erschwert. Ein anderer Fall ist, wenn allgemeine, abstracte Vorstellungen aufs Einzelne Wirkliche angewandt werden sollen. Wenn daher in der Sprache nur so wenige Vorstellungen durch eigene Worte angedeutet, und fast alles, vorzüglich aber die höhern Abstractionen, deren wir uns, durch die beständige Uebung selbst unbewußt,

un=

unaufhörlich in dem alltäglichsten Gespräche bedienen, nur durch uneigentliche Ausdrücke, mehr angedeutet, als eigentlich genau angegeben werden: so erscheint allerdings die Kenntniß der Sprache in einem andern Lichte, und es ist das Urtheil nicht übertrieben, daß eine Sprache recht gründlich lernen, beynahe eben so viel heiße, als Denken lernen. Allein um eine Sprache recht gründlich lernen zu können, werden auch schon vor der Erlernung derselben Fertigkeiten erfordert, die man anders woher zu nehmen hat, und die nächste, die sicherste, die ergiebigste und leichteste Quelle derselben ist das Studium der Mathematik.

Sollen insbesondere die alten Sprachen bey uns durch die Lesung der darin übrig gebliebenen Muster gelernt werden; soll der junge Mensch mit dem Autor, den er lieset, denken und empfinden: so muß er sich in die Gedankenreihe und in die Umstände desselben zu versetzen im Stande seyn, die Data und Mittel dazu aus dem Autor selbst nehmen, und aus diesen das Uebrige zusammensetzen. Daß er wirkliche Fälle gebrauche, um sich dieses Geschäfte zu erleichtern, ist allerdings nicht zu verwerfen, oft ist es selbst zweckmäßig; allein wer keine andere abstrakte Vorstellungen zu haben im Stande ist, als solche, die er auf dem Wege der sinnlichen Abstraction sich erwerben kann, der ist nur des Anschauens, nicht des Denkens fähig. Wenn man daher überdenkt, wie die Mathematik ihre Schüler arbeiten läßt, so muß man allerdings zugeben, daß die Uebungen, welche sie nothwendig macht, auch bey dem Lesen der Alten, in Ansehung der Sachen, die vortheilhaftesten Wirkungen haben; und wenn man dazu nimmt, daß die Mathematik ihren Schülern alles fehlerhafte Benehmen bey diesen Uebungen unmöglich machen kann, so wird sie auch hierdurch als Vorbereitungs-Studium auf den ersten Platz erhoben.

Der vortheilhafteste Weg bey der Bildung der Jugend zum gründlichen und nützlichen Denken, scheint demnach zu seyn, wenn das Studium der Mathematik mit dem Studium der Alten auf die Art verbunden würde, daß durch dieses letztere das ergänzt und vollendet würde, was durch das Studium der Mathematik angefangen wäre, und daß daher beyde neben einander, aber das Studium der Mathematik immer einige Schritte voraus ginge. Dieses wird auch deswegen nothwendig, weil auf der einen Seite ein großer Theil der Werke, welche uns die Alten hinterlassen haben, ohne Mathematik in vielen Stellen durchaus dunkel bleiben müssen, und auf der andern Seite die Anwendungen der Mathematik eine Menge anderweitiger gründlicher Kenntnisse bedürfen, zu deren Erwerbung das Studium der Alten die beste Vorbereitung ist. Dieses letztere zu behaupten, bewegen mich außer den von Herrn Rehberg angeführten auch folgende Gründe.

So wie die Mathematik vor allen übrigen Wissenschaften den Vorzug der Vollkommenheit, der Festigkeit und Gewißheit hat, und eben deswegen von jedem als Uebungswissenschaft getrieben werden sollte: so haben auch die griechische und römische Sprache, in Ansehung der Vollkommenheit, vor allen andern mehrere gar nicht zu verkennende Vorzüge, und sind als todte Sprachen nicht der Ungewißheit und der Veränderlichkeit unterworfen, die bey neuern Sprachen unvermeidlich sind. Dieses macht sie zu Gegenständen der Uebung geschickt, und die Vortheile, die daher möglich sind, lassen sich durch nichts anders ersetzen. Aus eben diesem Grunde müssen auch beyde Sprachen nicht so wie lebende erlernt werden, man müßte denn dabey bloß den materiellen Nutzen zur Absicht sich vorsetzen; und werden sie auf eine ihrer Natur und der Natur der menschlichen Seele gemäße Art getrieben, so steht die Beschäftigung mit ihnen zwischen der mit den reinen Gegenständen der Mathematik, und zwischen den ganz sinnlichen in der Mitte, und wird dadurch durchaus nothwendig.

Wenn auf diese Art die Lesung der alten Autoren schon bloß um ihrer Sprache willen wichtig wird, so wird dieselbe aus ähnlichem Grunde auch wegen der darin enthaltenen Sachen zur Uebung und Vorbereitung der Denkkräfte unentbehrlich. Für uns gehören diese Sachen, theils wegen der Entfernung der Zeit, theils wegen der verschiedenen Umstände, mehr zu dem Gedenkbaren, als zu dem Anschaulichen; weil aber alles im Einzelnen dargestellt ist, so sind wir gleichwohl im Stande, völlige Vorstellungen uns davon zu verschaffen: und so halten die Sachkenntnisse, welche wir aus den Alten schöpfen können, ebenfalls das Mittel zwischen bloßer Kenntniß der Formen und zwischen den Anschauungen des Wirklichen. Wie unentbehrlich aber und durch nichts zu ersetzen die Erwerbung solcher Kenntnisse sey, habe ich nach dem, was ich oben von der Nothwendigkeit der Formen-Kenntniß gesagt habe, nicht weiter aus einander zu setzen.

Es leidet also keinen Zweifel, daß das Studium der Mathematik für jeden Studirenden, selbst bey und zur rechten Betreibung des Studiums der Alten unentbehrlich sey; und es frägt sich daher nunmehr: Wie viel sollte ohne Ausnahme jeder von der Mathematik, und wie sollte er es zu erlernen suchen? Auf den ersten Theil dieser Frage kenne ich keine bessere Antwort als: So viel ohne Schaden der Gründlichkeit, und ohne Nachtheil der übrigen außer der Mathematik nöthigen Studien irgend geschehen kann. Von einer so wichtigen, und jedem, der Fähigkeiten zu Disciplinen hat, so angenehmen Wissenschaft sollte doch billig nicht gefürchtet werden, daß man zu viel davon lernen werde; und wenn ihr auf Schulen und Gymnasien in der vierten und dritten Classe wöchentlich sich drey, und in der zweyten und ersten vier Stunden, und auf Akademien eine verhältnißmäßige Zeit gewidmet würde; was für Eintrag geschähe dadurch den übrigen Studien? Daß jeder Gelehrte und selbstdenkende Geschäftsmann zu seiner Wissenschaft und zu seinen Geschäften so viel mathematische Kenntnisse brauche, als der oben beschriebene Cursus möglich macht, läßt sich wohl nicht behaupten; aber eben so wenig läßt sich in der Zeit der Vorbereitung bestimmen, ob nicht dereinst künftig noch mehr ihm nöthig seyn werden. Und da jeder wenigstens so viel Verstandesübung nutzen kann, als die Erlernung der Elemente der Haupttheile der Mathematik gewährt, so wäre zu wünschen, daß die Gelegenheit dazu nicht so sehr fehlen, und die Benutzung dieser Gelegenheit zugleich nicht ohne alle Aufmunterung seyn mögte. Wie weit oder nicht weit aber auch die Erlernung der Mathematik fortgesetzt werden mag, so ist das unerläßliche Forderung, daß allenthalben gründlich, und genau so, wie es die Natur der Denkkraft unserer Seele und die vorgesetzte Absicht es erfordern, gegangen werde. Kein Voreilen zum Sinnlichen, keine Lücken, keine Sprünge müssen statt finden. Anwenden, praktisch anwenden soll der Schüler lernen, aber nicht eher, als bis er hat, was er anwenden kann. Selbst zur Bemerkung des Ganges, den die Seele beym Denken nimmt, muß er nicht weiter angehalten werden, als so fern er alles an schon behandelten einzelnen Fällen selbst zu finden im Stande ist. Ueberhaupt mag die Mathematik getrieben werden, von wem und zu welcher Absicht es sey, so sollte sie bey den Elementen sich nie weiter nach ihren Schülern zu bequemen gezwungen werden, als daß sie nach Maßgabe der Fähigkeiten dieser in ihren Erläuterungen entweder weitläuftiger wäre oder kürzer sich faßte. Sie hat ein Recht strenge zu seyn, denn sie ist es dem Schüler zum Besten, und wer die Strenge derselben nicht früh empfunden hat, wird auch schwerlich je Ursach haben, sich ihres wohlthätigen Einflusses ganz zu rühmen.

2 Eine gründliche Kenntniß der Elemente der Mathematik in dem angenommenen Umfange vorausgesezt, könnte ein gut angelegtes mathematisches Lexicon die Benutzung jener Wissenschaft denen sehr erleichtern, welche dieselbe nicht zu ihrer Hauptwissenschaft machen könnten oder wollten.

Wer die Elemente der Mathematik in dem angenommenen Umfange und gründlich erlernt hat, besitzt allerdings außer der Fähigkeit, sich selbst weiter aus Schriften zu unterrichten, eine nicht unbeträchtliche Menge der nutzbarsten Kenntnisse; aber so wie diese nicht immer theils zu den wissenschaftlichen Gegenständen, theils zu den Geschäften des Lebens, wozu Mathematik erfordert wird, hinreichen, so kann auch nicht jeder alle Bücher besitzen, aus welchen das Uebrige geschöpft werden muß. Ein gut angelegtes ausführliches mathematisches Lexicon würde daher sowohl für Gelehrte, die andere Wissenschaften zu ihrem Hauptstudium gemacht hätten, als für mathematische Praktiker sehr nützlich seyn. Vielleicht irre ich nicht, wenn ich dabey folgende Eigenschaften nothwendig halte. Zuvörderst müßte sich dasselbe nicht bloß über die reine Mathematik erstrecken, sondern sich mit eben der Ausführlichkeit über alle Theile der angewandten Größenlehre ausbreiten. Dies letztere wäre um so nöthiger, da von der reinen allerdings mehr als bekannt angesehen werden könnte, als von der angewandten. Zum andern könnten daraus alle systematischen Auseinandersetzungen und Beweise weggelassen werden, weil die Absicht bey einem solchen Werke, wegen der sonst unvermeidlichen zu großen Weitläuftigkeit, nicht die seyn kann, darin einen vollständigen Lehrbegriff der ganzen Mathematik in alphabetischer Ordnung zu liefern, sondern vielmehr bloß die Wahrheiten der Mathematik zum Gebrauche mitzutheilen. Dies könnte und müßte insbesondere bey demjenigen geschehen, was zu den Elementen gehörte, denn die gründliche Kenntniß davon muß vor dem Gebrauche eines solchen Werks vorhergehen. Aber alle die Gründe dürften gleichwohl drittens nicht fehlen, ohne welche die mitgetheilten Wahrheiten nicht den Grad der Verständlichkeit haben können, der zu einer geschickten Anwendung derselben unentbehrlich ist; und je leichter dieselben zu fassen wären, und je mehr sich dieselben unmittelbar an die Elementar-Kenntnisse anschlössen, desto besser würde uns seyn. Viertens müßte dasjenige, was von einem jeden Gegenstande angeführt würde, so populär als möglich ausgedruckt, und in einer natürlichen und leicht zu übersehenden Ordnung angeführt seyn. Fünftens müßten allenthalben die nächsten, allgemeinere sowohl als speciellere Gegenstände nachgewiesen seyn, damit man jedesmal im Stande wäre, über das, was man nachschlüge, eine vollständige Kenntniß zu erhalten. Sechstens müßten bey jedem wichtigen Gegenstande die vornehmsten Quellen angeführt werden, aus welchen man im Stande wäre, ausführlichere Belehrung und insbesondere die Gründe zu schöpfen. Wenn über einen Gegenstand verschiedene Meinungen statt fänden, so dürften auch diese nicht unangezeigt bleiben, und daß von allen irgend brauchbaren Gegenständen keiner ausgelassen werden dürfte, versteht sich von selbst. Endlich müßte über die Art, und den Grad des Gebrauchs, der von den mitgetheilten Behauptungen und Vorschriften gemacht werden könnte, so wie über die damit nach der Verschiedenheit der Umstände vorzunehmenden Modificationen gesprochen, und zugleich dasjenige berührt werden, was zur gänzlichen Behandlung jedes Gegenstandes noch außer der Mathematik erforderlich ist. Ueber den großen Nutzen, den ein solches Werk stiften könnte,

habe

habe ich, da er von selbst in die Augen fällt, nicht nöthig zu reden, und eben so ist bekannt, daß es noch zur Zeit daran fehle.

3. Wenn die Regeln, nach welchen sich unser Verstand bey der Erfindung der Mathematik richtet, gesammlet, in eine systematische Ordnung gebracht, und nach den Elementen der Mathematik gebraucht würden, um die Kenntniß der Natur unsers Erkenntnißvermögens und des rechten Gebrauchs desselben darauf zu gründen; so würde dadurch unstreitig der gründlichen Gelehrsamkeit mancher Vortheil zuwege gebracht werden.

Wer die Mathematik nach der wahren Methode getrieben hat, muß sich dadurch allerdings zum rechten Gebrauch seiner Verstandeskräfte manche Fertigkeit erworben haben, und kann auch darüber nicht ohne alle deutliche Erkenntniß seyn; allein was in Ansehung dieser deutlichen Erkenntniß bey dem Unterrichte in der Mathematik selbst geschehen darf, besteht bloß darin, daß hinterher der bey einzelnen Untersuchungen gegangene Weg überdacht, und für die fernern Untersuchungen in der Mathematik gemerkt wird. Dadurch wird aber der von der Mathematik hier mögliche Nutzen noch nicht in seiner ganzen Größe erreicht, sondern es muß darauf, wenn dieses seyn soll, am Ende des mathematischen Cursus das Augenmerk noch besonders gerichtet werden. Man hat seinen Verstand auf die rechte Art gebraucht, und diese Art sich gemerkt; aber die Bemerkungen, welche man sich gesammlet hat, liegen noch zerstreut, sind noch nicht in der gehörigen Ordnung und Verbindung; man muß sie also vor allen Dingen sammlen, wo es nöthig ist, ihre Menge vergrößern, sie weiter entwickeln, ordnen, in eine leicht zu übersehende Verbindung stellen, und diejenigen Fälle dazu setzen, welche hinterher zu ihrer Erläuterung und Bestätigung dienen können, so wie sie anfänglich die Quellen derselben waren. Bliebe man hierbey stehen, so hätte man, was man für die Mathematik brauchte. Allein die Grundgesetze des Denkens sind wesentlich unveränderlich; eben die Wege, welche unser Geist bey der Untersuchung mathematischer Gegenstände betritt, muß er auch bey der Untersuchung anderer Dinge einschlagen; denn so verschieden diese Dinge von den Gegenständen der Mathematik immer seyn mögen, so kommen sie doch darin mit ihnen aufs genaueste überein, daß sie entweder der Anschauung fähig oder bloß in in willkührlichen Zeichen gedenkbar sind. Aber wegen der gedachten Verschiedenheit kann man das Verfahren des Mathematikers bey der Untersuchung anderer Dinge nicht gerade hin als Muster sich vorsetzen, man muß daraus erst dasjenige absondern, was allein die Natur der Größen möglich macht, und dann das wieder dazu setzen, was die unterscheidenden Beschaffenheiten ande-

rer

rer Dinge nothwendiger Weise erfordert. Zu der vollständigen Sammlung der Regeln, welche unser Verstand in der Mathematik befolgt, muß daher noch, wenn sich der mathematische Geist auch außer der Mathematik in tadelloser Gestalt zeigen soll, eine Anweisung kommen, wie man dieselben Regeln, nach gehöriger Modification, ebenfalls bey andern Gegenständen zu gebrauchen im Stande ist. Eine solche Anleitung zum rechten Gebrauche unserer Erkenntnißfähigkeiten würde vor jeder andern mancherley Vorzüge haben; ich will einige anführen.

Zuvörderst erweckt schon das ein gutes Vorurtheil dafür, daß Herr Rehberg, der doch den Nutzen der Mathematik als Schule für den Kopf selbst in wissenschaftlicher Rücksicht für zweifelhaft hält, gleichwohl die Kenntniß der Mathematik deswegen für nothwendig erklärt, weil man ohne sie die Natur des Erkenntnißvermögens nicht zu erkennen im Stande sey. Und wo könnte man auch das Wesen unseres Geistes besser kennen lernen, als da, wo er unabhängig von der Erfahrung, seine Wirksamkeit, frey und mit so glücklichem Erfolge äußert? Wo giebt es Gegenstände, über welche eine solche Uebereinstimmung herrsche, als in der Mathematik? und woher sollte diese Uebereinstimmung kommen, wenn nicht die Gesetze, nach welchen sich unser Verstand in dieser Wissenschaft richtet, mit unveränder-

lichen

lichen Buchstaben in unserer Seele geschrieben stünden? Aus diesem Grunde habe ich daher oben S. 127 behauptet: Wenn wir durch Erfahrung und Abstraction mit den Wegen bekannt werden, die wir sowohl bey sinnlichen Gegenständen, als bey allgemeinen Dingen mit Nutzen gehen können, um in ihre Natur einzudringen: so zeigt uns die Mathematik in beyden Fällen die Wege, welche wir gehen müssen.

Man hält das Studium der Logik für allgemein nützlich und nothwendig, und sie verdient es, da sie die Wissenschaft ist, welche die formalen und nothwendigen Gesetze alles Denkens ausführlich darlegt und strenge beweiset. Die Erweiterungen, welche ihr mehrere Neuere zu geben gesucht haben, indem sie theils psychologische Capitel von den verschiedenen Erkenntnißkräften, theils metaphysische, über den Ursprung der Erkenntniß und die verschiedene Arten der Gewißheit nach Verschiedenheit der Objekte, theils anthropologische, von den Vorurtheilen, mit ihr zu einem Ganzen verbunden, so wie auch die Versuche, populäre und auf Erfahrungen vorzüglich gegründete Anleitungen zum rechten Gebrauche unseres Erkenntnißvermögens zu geben, zeigen indeß, daß die Logik im strengen Sinne genommen, die Vortheile nicht immer gewährt habe, welche allerdings von ihr zu erwarten stehen, so bald man im Stande ist, sie recht zu gebrauchen. Daher rühren denn auch die häufigen

gen Klagen, daß das Studium der Logik nicht die Fertigkeit im Denken, sondern höchstens die, über das Denkgeschäfte zu sprechen, befördere, und daß ein mäßiger Theil natürlicher Logik alle künstliche in Ansehung des Nutzens weit überwiege. Man treibe aber nach dem Studium der Mathematik die Anweisung zum rechten Gebrauche des Verstandes, wovon vorher geredet worden ist: so wird man weder zu früh zur Logik im strengen Sinne kommen, noch sie als Wissenschaft kennen lernen, die bloß für den speculativen Kopf gehöre.

Der Gedanke ist auf keine Weise neu, die Logik auf die Mathematik zu gründen; wir haben erst kürzlich von Herrn Schübler einen Versuch bekommen, der Einrichtung unseres Erkenntnißvermögens durch Algeber nachzuspühren, und Herrn Hentschens Versuche *) sind zu eben diesem Zwecke geschrieben. Aber es kömmt hierbey nicht

*) Es sind derselben viere. Der erste führt den Titel: Introductio plana in Philosophiam, complectens genuinas, juxta quas intellectus humanus operatur leges, Geometriae Euclideae ope erutas atque dilucidatas, Autore Jo. Jacobo Hentschio. Lipsiae 1761. Der andere enthält Logicam quantitatum, der dritte verbreitet sich über die Notiones communes, metaphysicas vulgo dictas, und der vierte endlich enthält Philosophiam magnitudinem. Herr Hentsch legt durchaus den Euclides zum Grunde, wiewohl nicht weiter, als bis zu und mit dem sechsten Buche seiner Elemente.

nicht darauf allein an, daß die Mathematik gebraucht werde, sondern die Art, wie solches geschieht, ist sogar das vorzüglichste. Herr Jacob Bernoulli sagt an einem Orte: Omnes disciplinae Mathesi indigent; Mathesis nulla, sed per se sola sibi sufficit; und Herr Herder behauptet eben so richtig, daß unser Verstand zwar finden, aber nicht erfinden könne. Wenn daher Herr Schübler selbst Herrn Kants Philosophie für nöthig hält, um in der Mathematik zur völligen Gewißheit zu gelangen, und seinen Kenntnissen volle Deutlichkeit zu geben, und Herr Hentsch die Regeln der Logik und die Sätze der Philosophie allemal vorausschickt: so ist das nicht der rechte Weg. Die Seele muß zuerst nach den Gesetzen, an welche ihre Denkkräfte unzertrennlich gebunden sind, handeln, dann den Weg bemerken, welchen sie gegangen ist, einen und denselben Weg öfters und bey verschiedenen Gegenständen gehen, und öfters und mit den vorkommenden Verschiedenheiten bemerken, ferner diese Bemerkungen, so wie sie dieselben nach und nach erhält, sammlen, und dieselben ordnen, untersuchen was darin bloß auf mathematische Gegenstände, bey welchen sie dieselben gefunden hat, anwendbar ist, dies absondern und dadurch ihren Bemerkungen einen höhern Grad der Allgemeinheit geben, und endlich den Modificationen nachspühren, welche dieselben nun noch erhalten müssen, wenn sie auch mit Nutzen bey andern Gegenständen gebraucht werden sollen. Auf diese Art lernt man zuvörderst die Einrichtung unsers Erkenntnißvermögens und den Gebrauch desselben auf die Art kennen, daß man bloß bemerkt, bloß wahrnimmt; aber die Bemerkungen, die Wahrnehmungen, welche man macht, macht man an solchen Gegenständen, und unter solchen Umständen, daß man dieselben als unveränderlich betrachten kann und muß. Zum andern gehen dann vor den allgemeinen Regeln, welche man sich sammlet, die einzelnen Fälle, die zu ihrer Erläuterung und Bestätigung dienen können, in der erforderlichen Menge und Mannigfaltigkeit und deutlich erkannt vorher, und es ist daher die Kenntniß derselben keine todte Kenntniß. Drittens fängt man dabey von ganz einzelnen Dingen an, und geht also den Weg der Abstraction, so wie er gegangen werden muß, wenn man sich nicht von der Natur entfernen will. Viertens kann es, da man das Allgemeine aus einzelnen Fällen abstrahirt hat, nicht schwer werden, dasselbe auch wieder ins weniger Allgemeine, ja selbst ins individuelle zu führen. Und dieses alles also zusammengenommen, leidet es keinen Zweifel, daß kein Weg zu einer sicherern, vollständigern, deutlichern und brauchbarern Erkenntniß der Einrichtung unsers Erkenntnißvermögens und des rechten Gebrauchs desselben führe, als der durch die Mathematik, und es wird daher das Studium der Mathematik nicht bloß dem Philosophen, sondern selbst jedem, der auf gründliche Kenntnisse Anspruch macht, nothwendig und unentbehrlich.

Nach-

Nachschrift.

Es ist allemal etwas gewagt, wenn man Meinungen behauptet oder Vorschläge thut, die von allgemein angenommenen Sätzen abweichen, und insbesondere ist man dann der Gefahr, nicht sowohl Widerspruch zu erfahren, als mit Gleichgültigkeit gelesen zu werden ausgesetzt, wenn diese Meinungen und Vorschläge nichts auffallendes an sich haben, oder dieses sich vorzüglich bey dem angebrachten Tadel befindet. Es ist daher meine Pflicht, mich hier noch über die Veranlassung und die Gründe zu erklären, welche mich bewogen haben, vorstehende Gedanken öffentlich mitzutheilen, und die Absicht genauer anzuzeigen, welche ich dadurch zu erreichen wünsche.

Die Lage, in welcher ich bin, hat es mir vom Anfang an nothwendig gemacht, auf die Erleichterung der Mathematik ohne Schaden ihrer Gründlichkeit zu denken, und über die Proben, die ich von meinem Verfahren von Zeit zu Zeit dem Publikum vorgelegt habe, haben mehrere Kenner das Urtheil gefällt, daß ich in der Erreichung dieser Absicht nicht ganz unglücklich gewesen sey. Hierdurch ermuntert, habe ich mein Bestreben

fort=

fortgesetzt, und glaube nun, nach einer Menge von Beobachtungen und Versuchen, mit angestrengtem Nachdenken verbunden, endlich den Weg kennen gelernt zu haben, der so wie unter allen der leichteste, also auch der Natur der Natur der Sache, und der Beschaffenheit unsers Verstandes der angemessenste ist. So oft ich diesen Weg gegangen bin, die Umstände, unter welchen, und die Subjekte, mit welchen ich ihn ging, mochten seyn, welche sie wollten, hat auch der Erfolg meinen Vorstellungen davon entsprochen; und ich habe daher kein Bedenken getragen, mich darüber ausführlicher zu erklären, vorzüglich um durch die Einsichten und Urtheile anderer in den Stand gesetzt zu werden, meine Kenntnisse davon zu erweitern, und meine Untersuchungen mit glücklichem Erfolge weiter fortzusetzen.

Soll die Mathematik auf die Art gelehret werden, daß der Lehrer weiter nichts als Handleiter sey, und der Schüler alles in sich selbst finde; und dies muß geschehen, wenn auch die subjective Kenntniß des Schülers nicht auf Erfahrung und Autorität gegründet seyn soll: so muß der Lehrer zuvor alle Sätze dieser Wissenschaft nach Regeln, die jeder als unserer Seele wesentlich erkennen muß, aus sich selbst zu entwickeln gesucht, und ihnen die Form gegeben haben, in welcher sie sich auf diesem Wege darstellen. Da die Mathematik, so wie wir sie besitzen, nicht bloß aus der Seele geschöpft, sondern häufig, dem ersten Stoffe wenigstens nach, von der Erfahrung entlehnt ist: so ist es nicht zu erwarten, daß sie in allen ihren Theilen die Beschaffenheit habe, die ihr, ihrem Wesen nach, allerdings zukommt; auf diese Art wird hie und da Abänderung nöthig, und so hat mich die Absicht, die Mathematik ohne Nachtheil ihrer Würde möglichst zu erleichtern, unvermerkt in die Nothwendigkeit verwickelt, über den gegenwärtigen Zustand dieser Wissenschaft und über die Art, ihre Vollkommenheit und Brauchbarkeit zu vergrößern, nachzudenken.

Diese Veranlassung ist aber auch Ursache, daß ich keine vollständige Schilderung des gegenwärtigen Zustandes der Mathematik, und keine ins Detail gehende Beschreibung der Mittel, wodurch ihre Vollkommenheit und Brauchbarkeit vergrößert werden kann, sondern bloße Gedanken über beydes mitgetheilt habe. Am angenehmsten wäre es mir, wenn man dieselben als die ersten Linien zu einem vollständigen Risse ansehen und beurtheilen wollte. Was ich gesagt habe, ist hinreichend, mir die Belehrungen von Kennern zu veranlassen, welche ich vorzüglich wünsche; was ich noch hätte hinzufügen können, würde dem Ganzen zwar ein mehr in die Augen fallen=

fallendes Ansehen gegeben haben, allein es ist mir um Belehrung über dasjenige zu thun, wodurch, wenn es einmal festgesetzt ist, das Uebrige sich von selbst ergiebt.

Bey einigen Materien des zweyten Abschnittes bin ich vielleicht manchem zu weitläuftig gewesen. Eine Ursache davon liegt darin, weil gerade diese Materien mehr als andere für problematisch gehalten werden, und gleichwohl auf sie, weil sie zu den Elementar-Gegenständen gehören, so viel beruht. Ueberhaupt kommt es in der Mathematik hauptsächlich darauf an, daß das Elementarische und das Allgemeine gehörig bestimmt und festgesetzt ist, das Uebrige richtet sich durchaus hiernach, und deswegen habe ich mich auch darauf allein eingeschränkt.

In der zweyten Abtheilung des ersten Abschnittes, habe ich einen kurzen Entwurf einer vollständigen Abhandlung über die mathematische Methode mitgetheilt. Würdigen Kenner die in diesen Gedanken geäußerten Vorstellungen ihrer Aufmerksamkeit, und mich ihrer Belehrung, so werde ich vielleicht dadurch in den Stand gesetzt, nach einiger Zeit einen Versuch einer solchen Abhandlung zu liefern. Materialien dazu habe ich mir bereits in beträchtlicher Menge gesammlet, und habe ich

Gelegenheit, sie künftig zu dem gedachten Versuche zu benutzen, so hoffe ich, dasjenige, was in der gegenwärtigen Schrift entweder einseitig, oder unvollständig, oder nicht begründet genug scheint, auf eine befriedigende Art ins gehörige Licht zu setzen. Sehr ermunternd sind für mich die gütigen Urtheile gewesen, welche die Herren Verfasser der Anzeigen des ersten Theils meiner Übersetzung der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen, insbesondere in der Allgemeinen Litteraturzeitung, und in den Hallischen und Gothaischen gelehrten Nachrichten, über einige meiner Vorstellungsarten, welche ich auch in den Zusätzen zu diesem Werke äußern mußte, gefällt haben; und ich kann die Gelegenheit nicht vorbey lassen, diesen verehrungswürdigen Männern hier meinen Dank für das Vergnügen abzustatten, welches mit dem Lobe von verdienten Männern unzertrennlich verbunden ist. Ihre Billigkeit und die vor dem gefällten Urtheile angewandte Sorgfalt bestimmt mich aber auch zugleich, über den gegenwärtigen Versuch nicht ein Wort weiter hinzuzusetzen.