Anfangs-Gründe
der

Analysis endlicher Größen

zum Gebrauch
der
Königl. Preußischen Artillerie
von

G. F. Tempelhoff
Königl. Preuß. Lieutenant bey dem Feld-Artilleriecorps.

FRIEDRICH BUCHNER

Berlin,
bey Arnold Wever, 1769.

2978

91628

An

Ihro Majestät

dem

König.

An

Ihre Majestät

die

Königin.

Allerdurchlauchtigster, Großmächtigster, Allergnädigster König und Herr!

Ich halte es meiner Schuldigkeit gemäß, Ew. Majestät in tiefster Ehrfurcht eine Arbeit zu überreichen, die ich auf Verlangen derer unternommen habe, welche Ew. Majestät unter dem Artilleriecorps dienen, und die Absicht haben, sich in den mathematischen Wissenschaften hinlängliche Kenntnisse zuverschaffen. Ew. Majestät kennen nach Dero hohen Einsichten, welche sich über alle Theile

der Wissenschaften ausbreiten, den Einfluß, welchen die Meßkunst auf die Kriegeskunst hat, und haben dieselbe jederzeit als einen Gegenstand betrachtet, welcher der Aufmerksamkeit eines Officiers würdig ist. Dieses ist der Bewegungsgrund, warum ich dieselbe mit zu einem Theil meiner Beschäftigungen mache, und in der Hofnung daß ich dadurch Ew. Majestät allerhöchsten Willen erfülle, geniesse ich eine völlige Beruhigung. Ich ersterbe in tiefster Ehrfurcht

Allerdurchlauchtigster,
Großmächtigster,
Allergnädigster König und Herr!

Ew. Majestät

Berlin, den 1 Febr.
1769.

allerunterthänigster
G. F Tempelhoff.

Vorrede.

Wenn man betrachtet, mit welchem glücklichen Erfolge die Meßkunst auf die Naturlehre und andern Wissenschaften angewendet wird, so kann man nicht ohne Grunde hoffen, daß auch aus derselben beträchtliche Vortheile, in Absicht auf die verschiedene Theile der Kriegskunst, erwachsen müssen. Und in der That, wodurch kann man sich die Fertigkeit, eine Gegend richtig zu beurtheilen, oder ein geschwindes und sicheres Augenmaas, diese nothwendige Wissenschaft eines Officiers, besser

verschaffen, als durch eine gründliche Kenntnis der Geometrie, und durch eine vernünftige Anwendung derselben, auf die verschiedenen Gegenstände, welche man in der Natur antrift? Um aber darinnen desto glücklicher fortzukommen, muß man sich um die Eigenschaften verschiedener Figuren bekümmern, und genau acht haben, wie solche sich auf dem Felde dem Auge darstellen. Man muß untersuchen, wie sonst bekannte Gegenstände in verschiedenen Entfernungen erscheinen, und was die Abwechselung der Höhen und Tiefen, der Wälder und Flüsse vor Würkungen hervorbringt, und wie alle diese Gegenstände aus verschiedenen Gesichtspunkten zu beurtheilen sind.

Dieses ist aber noch lange nicht der Abriß von dem, was den ganzen Umfang des militärischen Coup d'Oeil bestimmt. Um dieses also zu erhalten, begreift man leicht, daß einige wenige Sätze aus der Geometrie, die man ohne Ueberzeugung, und wie man sagt, praktisch,

tisch, das ist, tappend erlernet, nicht hinreichend sind; vielmehr daß dazu eine gründliche Einsicht in verschiedene Theile der mathematischen Wissenschaften erfordert wird. Es ist nicht zu läugnen, daß sich dabey verschiedene Schwürigkeiten zeigen, und ein Praktikus erschrickt, wenn er dieses weite Feld übersieht. Ein Geometer hingegen setzt sich über alle Kleinmüthigkeit hinweg, und gleicht einen vernünftigen und unerschrockenen Krieger, dem eine wichtige Unternehmung aufgetragen wird. Nachdem dieser alle gehörige Maasregeln genommen, so stürzt er sich muthig in alle Gefahren, welche sich demselben darstellen. Nichts ist fähig denselben zurück zu halten. Er setzet über Ströme, marschiret durch unwegsame Gegenden, übersteiget Gebürge; und nachdem er tausend Schwürigkeiten überwältiget, gelangt er endlich sicher an den Ort seiner Bestimmung.

Nicht allein aber das Augenmaas, auch der wichtige Theil der Krieges-Kunst, die

Lehre von den Evolutions, kann durch Hülfe der Geometrie, nach und nach auf sichere Grundsätze gebracht werden. Wenn man die Stellung der Armee weiß, wenn man die Gegend kennt, auf welcher dieselbe sich befindet, so wird die Geometrie unter den verschiedenen Bewegungen, welche dieselbe machen kann, um eine andere Stellung anzunehmen, um diese oder eine andere Absicht zu erreichen, bald diejenige bestimmen, durch welche dieses am geschwindesten und leichtesten zu erhalten ist.

Den grösten Nutzen aber kann sich die Befestigungskunst und Artillerie von der Mathematik versprechen. Ob die erstere schon auf sichre Grundsätze gebracht ist, kann man leicht erfahren, wenn man nur die verschiedenen Systeme in derselben untersucht. Um aber sich von der Möglichkeit zu überzeugen, daß man die leztere zu einem gewissen Grade der Vollkommenheit bringen kann, darf man nachsehen, wie weit

es ein Robins, ein Euler, ein d'Arcy, ein Lambert, und ein d'Antony gebracht, und wie vieles dieselben noch zurücke gelassen haben. Alsdenn aber wird man auch finden, daß man ohne eine gründliche Kenntnis der verschiedenen Theile des Calkuls seinen Fleiß umsonst verschwendet, die Schriften dieser Gelehrten zu verstehen, und die Hofnung, neue Entdeckungen zu machen, schlechterdings aufgeben muß.

Man kann die Artilleristen füglich in zwey Classen theilen. Die eine Classe hat die Mathematik gar nicht nöthig, sondern es ist genug, wenn dieselbe so ausgebildet wird, daß sie zur Ausführung desjenigen, was derselben aufgetragen wird, geschickt ist. Es ist gewisser Umstände wegen moralisch unmöglich, daß sie dieselbe gründlich erlernen kann, und daher bin ich völlig überzeugt, daß eine verwirte Kenntnis derselben, ihr mehr Schaden als Vortheil bringen würde.

Hinge-

Hingegen verhält es sich ganz anders mit der andern, und in dieser setze ich alle diejenigen, welche Lust haben sich eine gründliche Kenntnis ihrer Wissenschaft zu verschaffen, und dieses in der Absicht um in der Ausübung derselben, mit desto mehrern Vortheil verfahren zu können. Da man voraus setzen kann, daß diese aus Leuten besteht, welche das, was man Genie nennt, nach verschiedenen Graden erhalten haben, so werden dieselben sich mit desto mehreren Vergnügen mit ihrem Metier beschäftigen können, je vollständiger ihre Einsicht in der höheren Geometrie ist. Dadurch werden dieselben bey verschiedenen Vorfällen Gelegenheit haben, ihre Talente zu entwickeln, und sich von derjenigen Seite zu zeigen, welche den denkenden Krieger von den mechanischen Soldaten unterscheidet.

Das Corps der Artillerie, unter dem ich diene, ist schon seit langer Zeit bemüht gewesen,

das

das Praktische mit einer gründlichen Theorie zu verbinden, und diejenigen, welche demselben vorgesetzt sind, haben sich dahero angelegen seyn lassen, die mathematischen Wissenschaften in demselben bekannter zu machen. Ich bin dahero bewogen worden, die ersten Gründe der Algebra, oder Analysis endlicher Größen im gegenwärtigen Werke abzuhandeln. In demselben bin ich besonders bemühet gewesen, dasjenige vorzutragen, von dem ich geglaubt, daß es geschickt wäre, einem Anfänger in dem Calcul einige Fertigkeit zu verschaffen, und ihn so weit zu bringen, daß er sich in schwerern Fällen zu helfen, und diejenigen Schriftsteller mit Nutzen zu gebrauchen weiß, welche die verschiedenen Theile desselben vollständiger durchgehen. Ich fange dahero damit an, einen richtigen Begrif von den algebraischen Größen zu geben, und die verschiedene Schreibarten zu zeigen, deren man sich bedienet, um dieselben auszudrücken. Hierauf zeige ich die Auflösung

der

der Gleichungen vom ersten und zweyten Grade, und einiger andern, welche sich auf dieselben reduciren lassen. Dabey habe ich es meiner Absicht gemäß erachtet, die Methode, derer man sich bedienen kann, um seinen Endzweck zu erreichen, durch eine gute Anzahl von Beyspielen zu erläutern, und Gelegenheit zur Uebung und Anbringung verschiedener Kunstgriffe zu geben, welche ferneres Nachdenken erwecken können.

Die Natur der Gleichungen habe ich auf eine allgemeine und vielleicht bequemere Art abgehandelt, als sie gewöhnlich in den algebraischen Anfangsgründen vorgetragen werden. Ich muß gestehen, daß mir die Methode niemals gefallen hat, ihre Natur durch die Multiplication zu erklären. Dahero habe ich andere Grundsätze aufgesucht, die meines Erachtens besonders die Ursach anzeigen, warum in jeder Gleichung so viel Wurzeln seyn müssen, als der Exponent der höchsten Dignität der unkannten

bekannten Größe in derselben, Einheiten hat. Ich schreite ferner zu der Anwendung des trigonometrischen Calculs, der in verschiedener Absicht von besonderer Wichtigkeit ist. Ich bin dahero in demselben etwas weitläuftig gewesen, und um den Gebrauch der trigonometrischen Formeln desto besser vor Augen zu legen, habe ich verschiedene Exempel angeführt. Endlich trage ich die Lehre von den unbestimmten Aufgaben vor, und zeige, was man eigentlich unter die Funkzions versteht, und wie man dieselben durch krumme Linien geometrisch vorstellen kann. Dabey hätte ich nun gerne umständlicher seyn mögen, wenn ich nicht besorgt hätte, dieses Werk alzuweitläuftig zu machen. Inzwischen werde ich das, was noch in diesem Stücke zurücke geblieben, in der Differential- und Integral-Rechnung nachzuholen suchen.

Wenn man übrigens in diesem Werke verschiedenes findet, was auch in andern Schriften angetroffen wird, so verspreche ich mir von meinen Lesern so viel Unpartheilichkeit, daß sie bedenken werden, daß ich dasselbe deswegen gewählet, weil ich geglaubt, daß es ihnen nützlich seyn, und besonders dazu dienen könnte, um ihnen deutliche und richtige Begriffe beyzubringen. Die Begierde beständig neu zu scheinen, ziehet öfters eine Dunkelheit im Vortrage nach sich, die ich mit allem Fleiß zu vermeiden gesucht habe.



Erster Abschnitt.

Von der Addition und Subtraction.

§. 1.

Die Algebra oder vielmehr die Analysis ist eine Wissenschaft, welche diejenige Methoden zu erfinden lehret, deren man sich bedienen muß, um die in den Theilen der Mathematik vorkommende Aufgaben aufzulösen.

§. 2.

Ohngeachtet die Algebra sich öfters eben der Regeln bedienet, nach welchen die gewöhnliche Aritmetik verfähret; so muß man sich dieselbe doch nicht blos als eine allgemeine Rechenkunst vorstellen. Sie ist eine allgemeine Logik, welche uns lehret, die Kette der Schlüsse, welche man machen muß, um eine

Frage zu entscheiden, oder etwas unbekantes aus andern bekanten Dingen heraus zu wickeln, in sinnliche Bilder zu verwandeln, um dadurch desto leichter zu seinem Zweck zu gelangen.

§. 3.

Die Rechenkunst und Geometrie betrachten die Größen nur an und vor sich, und ziehen dabey nichts in Erwegung, als blos die Eigenschaften, die einer jeden Art von Größe, blos als Größe zukommen. Die Algebra geht weiter, und indem sie sich der in den vorigen beyden und in andern Wissenschaften bereits erwiesenen Wahrheiten bedienet, untersucht sie noch viel andere Eigenschaften der Größen, die bey ihnen besonders alsdenn angetroffen werden, wenn sie auf eine gewisse Art mit einander verbunden werden sollen. Der Geometer betrachtet z. E. bey den Figuren blos die Größe der Linien und Winkel; hier aber wird auch zugleich auf die Lage derselben gesehen. Der Geometer untersucht bey den Verhältnissen blos die Art, wie eine Größe aus der andern entsteht; der Algebrist giebt aber auch auf verschiedene andre Umstände acht, die bey der Entstehung der Größen aus andern von eben der Art vorfallen können.

§. 4.

Das vorzüglichste bey der Algebra ist die Methode, die Eigenschaften der Größen und die von ihnen bekanten Wahrheiten durch Zeichen auszudrücken. Um die Größen anzudeuten bedienet man sich der Buchstaben.

staben. Die Art aber, wie die Größen von einander abhängen, wird durch andere Zeichen ausgedruckt. Es war natürlich daß die Geometer auf ein Mittel denken musten, ihre Gedanken durch gewisse Zeichen auszudrücken, nachdem die Geometrie so weitläuftig wurde und Aufgaben vorkamen, die durch eine lange Reihe von Schlüssen aufgelöset werden musten. Wie man indessen verfahren um in diesem Stücke zu seiner Absicht zu gelangen, kann einiger maßen durch folgenden Aufgaben erläutert werden.

§. 5.

1. Aufgabe.

Es werden zwey Punkte B, C, gegeben, welche in einer geraden Linie liegen; man soll von dem Punkt C eine gerade Linie CD nach B zu ziehen, deren Länge gegeben wird, und diese gerade Linie soll in der Linie fallen, welche durch die gegebene Punkte geht. Man verlangt zu wissen wie weit der Punkt D von dem Punkt B entfernt seyn, und auf welcher Seite von B derselbe hinfallen wird. Fig. 1.

§. 6.

Vorbereitung.

Ein Geometer wird bey dieser Aufgabe so gleich die Lehrsätze der Geometrie anwenden, und da die beyde Punkte B und C gegeben sind, anmerken, daß auch die Entfernung derselben von einander gegeben ist. Dieselbe mag nun beschaffen seyn wie sie wolle, so kann man dieselbe mit einen gewissen

Buchstaben andeuten und mit diesen Buchstaben den Begrif verknüpfen, daß, wo derselbe vorkommt, dadurch die Entfernung der Punkte B und C angedeutet wird. Indessen ist offenbahr, daß derselbe willkührlich ist. Es sey also *a* die Entfernung der Punkte B und C.

§. 7.

Auf eben diese Art kann man die länge der Linie CD, die von C nach B zu gezogen werden soll, durch einen andern Buchstaben als z. E. *b* anzeigen.

§. 8.

Wenn die Entfernung der Punkte B und C und die Linie CD nach einem gewissen Maas gegeben werden, so ist gleich zu begreifen, daß sich alsdenn diese beyde Buchstaben, nach dem angenommenen Maas richten. Z. E. wenn die Punkte B und C 56 Ruthen von einander entfernt wären, so würde *a* eben so viel als 56 Ruthen seyn; und wenn die gerade Linie CD z. E. 80 Ruthen wäre, so würde *b* so viel als 80 Ruthen z. E. und so in andern Fällen.

§. 9.

Die Entfernung des Punkts D von B und auch die Seite auf der er sich von B befindet, hängt offenbahr von der Größe der Linie CD ab. Denn
Fig. 1. wenn CD kleiner ist als CB so wird der Punkt D zwischen B nnd C fallen ist aber CD größer als
Fig. 2. CB so ist offenbahr, daß der Punkt D der Figur

nach

nach linkerhand oder über B heraus, fallen muß. Man siehet also, daß man die kleinere Linie von diesen beyden von der größern wegnehmen muß, um die Entfernung des Punkts D von B zu bekommen. Die Seite aber, auf der D fällt, muß man dadurch bestimmen, daß derselbe Punkt zwischen B und D fällt, wenn CD kleiner als BC ist, und über B heraus, wenn CD größer als BC ist.

§. 10.

Es ist aber offenbahr, daß man dieses in allen Fällen durch ein paar bequeme Zeichen bewerkstelligen kann. Man stelle sich nemlich vor, daß die Linie von B nach C gezogen wäre; da nun die Linie CD von C nach B zu gezogen werden soll, so ist offenbahr, daß diese Linien nach verschiedenen Gegenden zu gezogen werden. Noch mehr; je näher der Punkt D nach B zu kommt, je kleiner wird die Entfernung desselben von B und endlich, wenn die Linie CD, die man ziehen soll, größer ist als CB, so geht der Punkt D auf die andre Seite von B, und seine Entfernung von B wird immer größer je weiter derselbe fortgeht.

§. 11.

Es ist also leicht einzusehen, daß man dieses verschiedene ziehen der Linien, auch durch verschieden Zeichen andeuten muß. Man wähle also das Zeichen + um die Linie anzudeuten, welche von B nach C zu gezogen wird und setze das Zeichen — vor die Linie die von C nach B zu gezogen werden soll;

Und weil doch der Punkt D von B in einer gewissen Weite liegen muß, so nenne man x die Entfernung des Punkts D von B.

§. 12.

Diese Entfernung ist nun offenbahr so groß als die Entfernung, welche entsteht, wenn man sich vorstellt, ein Punkt geht von B bis C, und von C in eben der Linie nach B zu, wieder so weit zurück, als die Linie CD groß ist. Da nun diese beyde Entfernungen einander gleich sind, und man wählt das Zeichen (=) um die Gleichheit zweyer Großen anzuzeigen, so ist die Aufgabe leicht aufgelöset.

Auflösung.

Es ist nemlich $x = + a - b$.

§. 13.

Anmerkung.

Diese drey auf diese Art mit einander verbundene Buchstaben, zeigen alle die weitläuftige Schlüsse, die man hat machen müssen, um diese Aufgabe aufzulösen, die außer dem so leicht ist, daß sie ein jeder der auch nicht daß geringste von der Geometrie weiß, auflösen kann. Und ich bin auch aus keiner andern Ursach so weitläuftig gewesen, als nur ohngefehr zu zeigen wie man sich verhalten könte um die algebraische Zeichen zu erfinden. Wenn nun die Linie *a* und *b* durch Zahlen ausgedruckt werden so ist es leicht, nicht allein die Entfernung des Punkts D von

D von B, sondern auch die Gegend zu bestimmen auf welche derselbe liegt.

§. 14.

Es sey z. E. $a = 16$ Ruthen $b = 13$ Ruthen; so wird $x = (16 - 13)$ Ruthen. Diese Verbindung der Zeichen zeigt aber daß man 13 Ruthen von 16 Ruthen wegnehmen muß, und wenn man dieses thut, so ist $x = +3$ Ruthen. Dieses Zeichen $+$ zeigt demnach daß der Punkt D zwischen B und C liegt.

Wäre aber $a = 25$ und $b = 31$ Ruthen so würde $x = (+25 - 31)$ Ruthen seyn. Zieht man nun die kleinere Zahl von der Größern ab, so bleibt $x = -6$ Ruthen. Da also vor der 6 das Zeichen $-$ stehet so bedeutet dieses, daß der Punkt D nicht wie vorhin zwischen B und C, sondern auf der andern Seite von B fält.

§. 15.

Dieses ist leicht einzusehen, und man wird zugleich gewahr, daß diese beyde Zeichen nicht allein das Verfahren anzeigen welches man anstellen muß um die Entfernung des Punkts D von B zu finden, sondern, daß sie zu gleicher Zeit keinen Zweifel in Absicht der Gegend übrig lassen, auf welcher der Punkt D liegt. Auf eben die Art kann man folgende Ausgabe auflösen.

§. 16.

2te Aufgabe.

Ein Schif gehet von einen gewissen Punkt A Fig. 3.

auf der See ab, und seegelt gegen Morgen nach C zu und legt den ersten Tag 60 Meilen zurück; den andern Tag geht es in eben dieser Linie nach dem Abend zu zurück und beschreibt einen Weg CD von 85 Meilen; am dritten Tage geht es in eben dieser Linie nach dem Morgen zu fort, und legt DE = 45 Meilen zurück; am vierten Tage geht es wieder nach eben der Gegend 65 Meilen = EF fort, seegelt aber den 5ten Tag 172 Meilen = FG in eben der Linie nach dem Abend zu zurück. Man will wissen, wie weit das Schif von A entfernt ist und auf welcher Seite es sich befindet.

§. 17.

Vorbereitung.

Diese Frage läst sich leicht beantworten. Indem das Schif von A nach C zu geht so entfernt es sich allerdings auf eben der Seite von A; so bald es aber wieder gegen Abend zurück geht, so nimmt die Entfernung desselben von A immer mehr und mehr ab. Gehet es nun wieder weiter nach dem Morgen zu, so entfernt es sich wieder von A, nähert sich aber diesem Punkt beständig so oft es gegen Abend zurück geht. Ist es nun nach einigen Tagen auf der Morgenseite in einer gewissen Entfernung von A, und es geht darauf nach dem Abend zu um einen weitern Weg zurück, so muß es nothwendig auf der Abendseite von A zu liegen kommen.

§. 18.

Von dieser doppelten Bewegung des Schifs hängt nun so wohl die Entfernung desselben von den Punkt A an

A an und vor sich, als auch die Gegend ab, auf der sich dasselbe in Ansehung des Punkts A befindet, und man wird leicht gewahr, daß die Bewegung gegen Abend die Entfernung auf der Morgenseite vermindert. Wenn man nun diese beyde verschiedene Bewegungen durch eben die Zeichen unterscheidet die man bey der vorigen Ausgabe gebraucht hat, so kann man durch Hülfe derselben nicht allein die wahre Entfernung des Schifs von A, sondern auch die Gegend bestimmen auf der es sich befindet.

§. 19.

Auflösung.

Man seze nur vor jeden Weg den das Schif nach dem Morgen zu beschreibt das Zeichen + und vor einen jeden Weg den es nach dem Abend zurück legt das Zeichen —, Und nenne die Entfernung in der es sich von A am letzten Tage befindet x. Der Buchstabe m bedeute eine Meile. Diesen angenommenen Zeichen lege man aber eben wie in der vorigen Aufgabe die Kraft bey, daß sie zu gleicher Zeit das Verfahren andeuten, welches man anwenden muß um die Entfernung x zu bestimmen. Alsdenn ist:

$$AG = x = +60m - 85m + 45m + 65m - 132m$$

§. 20.

Anmerkung.

Diese Aufgabe ist nunmehro völlig bestimmt und es ist nichts weiter übrig als daß man diese Ent-

fernung noch genauer und kürzer zu haben suche. Dieses geschicht eben wie in §. 14. Es ist nemlich $+60m-85m=-25m$. und $+45m+65m=110m$ Also wird $x=-25m+110m-132m$. Dieses kann weiter abgekürzt werden. Denn $-25m+110m=+85m$ und also $x=+85m-133m$ oder $x=-47m$. Es befindet sich also das Schif auf der Abendseite von A um 47 Meilen.

§. 21.

Auf eben die Art kann man bey andern Aufgeben verfahren, in denen Größen vorkommen, welche sich auf eben die Art aufeinander beziehen wie die vor und rückwerts gehende Bewegung, oder überhaupt wenn Größen vorkommen, welche in Absicht auf etwas drittes einander aufheben. Dergleichen sind z. E. die Einnahme und Ausgabe; Kräfte die aufwärts würken und andre die herunter ziehen; das Steigen und Fallen der Körper; Wasser daß in einem Gefäße einfließt, und das ausfließende Wasser, und andre mehr. Wenn man aus zwey dergleichen Größen eine dritte finden will so muß diese nothwendig kleiner seyn, als eine von den beyden, die auf diese Art einander entgegen gesetzt sind. Wenn also zwey Größen von einer gewissen Art durch die vorige Zeichen mit einander unter den Bedingungen verbunden sind, die man ihnen beylegt, so muß man allezeit die kleinere von der Größern wegnehmen, und vor dem Ueberrest das Zeichen der Größern setzen, dieses wird alsdenn die Bedingungen zeigen welche mit der dritten Größe verbunden sind. Also

wenn

wenn r eine Ruthe bedeutet, ist, $30r - 25r = +5r$. oder blos $5r$, weil man vor die erste Größe rechter oder linker Hand das Zeichen = nicht das Zeichen + schreibt, sondern es schon darunter verstehe. Eben so ist $+26r - 22r$ oder blos $26r - 22r = 4r$. Und $35r - 46r = -11r$. Und $30r - 30r = 0$.

§. 22.

Einige von diesen Größen die auf solche Art mit einander verbunden sind, nennt man positive oder affirmative die andern negative Größen. Es ist vor sich klahr daß dieses blos Nahmen sind, und daß eine Größe, die man negativ nennt, eben so wohl eine wahre und würkliche Größe ist, als die andre von eben der Art, die aber als positiv betrachtet wird. Man will durch diese Benennung nichts weiter sagen, als daß dergleichen Größen einander in gewisser Absicht entgegen gesetzt sind. Eben so bedeutet auch das Wort Plus (mehr) dessen man sich bedienet um das Zeichen +, und minus (weniger) um das Zeichen — auszudeuten, nicht das, was man sich gemeiniglich vorstellt. Es ist ungereimt wenn man eine Größe, die als negativ betrachtet wird, weniger als nichts nennt, und es widerspricht geradesweges allen gesunden begriffen. Man muß diese Wörter als einen bloßen Laut betrachten, und dabey nicht weiter denken als was eben gesagt worden.

§. 2

Wenn eine Aufgabe vorgetragen wird, so wird eine geringe Ueberlegung bald zeigen, welche Grös-

sen

sen man als positiv und welche man als negativ ansehen kann. Man kann sich aber auch eben die-
Fig. 4. ser Zeichen in practischen Sachen nicht ohne glücklichen Erfolge bedienen. Gesetzt man wolte die Lage der Punkte C, D, E, F, G, &c. in Ansehung, der Standlinie AB bestimmen. Nach der gewöhnlichen Art kann dieses geschehen, wenn man sich eine Figur zeichnet, und darauf anmerket welche Punkte z. E. rechter Hand und welche linker Hand der Linie AB fallen. Die Lage der Punkte würde man aber durch die Winkel bestimmen, welche aus A und B gemessen werden. Z. E. die Lage des Punkts C würde man bestimmen, wenn man die Winkel BAC und CBA mißt.

§. 24.

Ohne aber eine Figur zu zeichnen, kann man mit mehrerer Bequemlichkeit, fortkommen, wenn man sich der Zeichen + und — bedient. Denn wenn man die Winkel, so wie gezeigt worden, gemessen, und man will die Lage der Punkte aus dem Papiere genau auftragen, so ist offenbahr, daß man nur wissen muß, welche Punkte auf der einen, und welche auf der andern Seite, der Linie AB fallen. Man bedarf also nur ein Zeichen, um anzudeuten welche Winkel, von denen welche aus A und B gemessen werden, auf der einen, und welche auf der andern Seite der Linie AB fallen. Wenn man demnach z. E. die Winkel CAB, CBA; DAB, DBA; EAB, EBA. &c. die in der Figur rechter Hand AB fallen mit + und diejenigen, welche

wie

wie FAB, FBA; GAB, GBA lincker Hand AB fallen, mit — bezeichnet, so ist leicht einzusehen, daß man auf diese Art nicht nöthig hat eine Figur zu zeichnen, sondern man kann die Lage der Punkte nach Anleitung der Zeichen ohne einen Irrthum zu begehen, gehörig auftragen.

§. 25.

Auf ähnliche Art kann man ganze Felder aufnehmen ohne die geringste Figur zu zeichnen. Gesetzt man soll die Figur ABCDEFG aufnehmen. Fängt man nun von A an und geht nach B fort so muß man erstlich, wie bekannt, die Linien AB &c. messen. Die Beschaffenheit der Figur wird aber durch die Größe der Winkel in derselben bestimmt. Nun ist offenbahr, daß die Winkel entweder rechter oder linker Hand den gemessenen Linien liegen müssen, wenn man von A nach B, C &c. fortgeht. Man kann also die Winkel welche auf der rechten Seite liegen mit + die auf der linken Seite liegen mit — bezeichnen. Wäre also die Figur so beschaffen wie sie gezeichnet ist, und es wären die Linien: Fig. 5.

AB = 60 Ruthen.		DE = 25 —	
BC = 45 —		EF = 92 —	
CD = 25 —		FG = 75 —	
		GA = 96 —	

so müste man den Winkel

BAG mit	+	z. E. BAG =	+ 45°
ABC -	—	- ABC =	— 95°
BCD -	+	- BCD =	+ 116°

CDE

CDE	+	&c.	80°
DEF	−	&c.	40°
EFG	+	&c.	76°
FGA	+	&c.	132°

bezeichnen. Diese Methode würde einen jeden Feldmesser in Stande setzen, die ganze Figur richtig aufzutragen.

§. 26.

Eben dieser Zeichen könte man sich bedienen um
Fig. 6. die Lage einiger Punkte, in einer Figur auf eine andre Art zu bestimmen. Gesetzt man wolte die Figur AFEBHCDGA auf dem Felde messen, so könte dieses auch auf folgende Art geschehen. Man ziehe die gerade Linie AB und messe dieselbe, hernach ziehe man von den Punkten GD &c. auf AB die gerade Linien Gg, Dd, Cc &c. perpendikulär, messe dieselben ebenfals und bezeichne diejenigen mit + die rechter Hand AB und mit — diejenigen welche linker Hand AB fallen. Ferner messe man die Linie Ag, Ad, Ac &c. So ist offenbahr daß man auch die Lage der Punkte G, D, C &c. in Absicht auf die Linie AB genau weis, und also die Figur leicht zeichnen kann.

z. E. wäre c C = + 30 Ruthen
d D = + 35 —
g G = + 26 —
h H = + 8 —
e E = − 18 —
f F = − 17 —
und A g = + 10 —

Af = + 15 —
Ad = 21 —
Ac = 36 —
Ae = 40 —
Ah = 43 —
AB = 50 —

So zieht man die Linie AB und macht dieselbe nach einen angenommenen Maasstaab 40 Ruthen lang; alsdenn nimmt man auf derselben von A nach B zu die Linien Ag, Af &c. so groß als wie sie angegeben werden; richtet in allen diesen Punkten perpendikulär Linien auf, und nimmt auf denen die rechter Hand AB fallen die Linie wie gG &c. so groß als sie sind und welche das Zeichen + vor sich haben; linker Hand aber in den gehörigen Punkten die Linien welche das Zeichen — von sich haben. Auf diese Art kann man die Figur leicht entwerfen.

§. 27.

Es kommen in der Geometrie öfters Aufgaben vor, in denen die Lage eines gewissen Punktes oder auch mehrerer in Absicht auf zwey gerader Linie bestimmt worden soll. Gesetzt man soll die Lage eines gewissen Punktes in Absicht auf die beyden Linie AB, CD bestimmen, die sich in E durchschneiden. Nun ist offenbahr, daß die Fläche in der diese Linien liegen, dadurch daß sich diese beyde Linien durchschneiden, in vier Theile getheilt wird, welche innerhalb die Schenkel der um C entstehenden Winkel liegen. Wenn also die Lage eines gewissen Punkts P in Absicht auf diese Linien bestimmt werden soll, so muß Fig. 7.

vor

vor allen Dingen gezeigt werden, in welchen von diesen vier Gegenden derselbe liegt. Es muß ferner ausgemacht werden, wie weit derselbe von einen gewissen Punkt in der Linie AB und wie weit von einen gewissen Punkt in der Linie CD entfernt ist. Man stelle sich also vor daß von dem Punkt P zwey Linien gezogen worden, davon die eine PQ mit AB die andre PR mit CD parallel ist. Weis man nun die Länge dieser Linien, so weiß man zu gleicher Zeit wie weit der Punkt P von den Linien AB und CD entfernt ist. Allein dadurch wird noch nicht bestimmt, in welcher von den vier Winkeln um E der Punkt P liegt.

Es ist aber augenscheinlich, daß man dieses durch die Zeichen + und — auf folgende Art sehr bequem anzeigen kann. Man setze nemlich vor alle die Linien welche von P mit AB parallel gezogen werden können und rechter Hand CD fallen, das Zeichen + und vor alle die, so mit AB parallel sind, aber linker Hand CD fallen, das Zeichen —; Ferner vor alle Linien die mit CD parallel gezogen werden können und oberhalb AB, der Figur nach, fallen, wieder das Zeichen +, und vor die andern die ebenfals mit CD parallel sind, aber unter halb AB fallen, das Zeichen —. Nun mag der Punkt P in einen von diesen vier Winkeln liegen in welchen es sey, so wird die Lage des Punkts P durch die Größe der Linien PQ und PR und den Zeichen, welche sie vor sich haben, vollkommen bestimmt. Gesetzt z. E. PR wäre + 16 Ruthen und PQ, wäre — 18 Ruthen. So liegt, nach der mit diesen Zeichen verknüpften Bedingung, der Punkt P oberhalb der Linie AB. Und weil die Länge

der

der Linie QP das Zeichen — vor sich hat, so liegt derselbe zugleich linker Hand der Linie CD; folglich muß der Punkt P innerhalb den Winkel AED liegen und weil PQ mit AB, und PB mit CD parrallel ist, so wird ER = PQ, und EQ = PR. Folglich nehme man auf AB von E nach A die Linie ER = QP = 18 Ruthen, ziehe QP mit CD parallel, und mache RP = 16 Ruthen, so ist der Punkt P bestimmt. Eben so kann man die Lage mehrerer Punkte, in Absicht auf diese Linien AB, CD bestimmen.

§. 28.

Man kann sich dieser Zeichen auch in der Trigonometrie mit großen Nutzen bedienen, um die Fig. 8. Sinus und Cosinus ꝛc. der spitzen und stumpfen Winkel von einander zu unterscheiden. Man weiß, daß ein Cirkel entsteht, wenn sich eine gerade Linie CA, von bestimmter Länge, um den Punkt C herum bewegt, und der Punkt A beschreibt alsdenn den Umkreis des Zirkels. Nun ist offenbar, daß man die Bewegung dieser Linie so lange fortdauren lassen kann, als man will. Bey dieser Voraussetzung beschreibt der Punkt A, nach und nach die Bogen AB, ABD, ABDF, ABDFB &c. dergestalt, daß der Punkt A zwey, drey ꝛc. mahl den ganzen Umkreis des Zirkels beschreibt.

Aus der Trigonometrie ist aber bekannt, daß der Cosinus eines Bogens oder Winkels, derjenige Theil des Diameters ist, der zwischen den Mittelpunkt und den Punkt eingeschlossen ist, wo der Sinus dieses Bogens auf den Diameter perpendiculär steht.

BIBLIOTEKA

Wenn

Wenn man also auf den Diameter GA, die Linie CH aus dem Mittelpunkt perpendiculär aufrichtet, so ist offenbahr, daß, so lange der Punkt A, welcher den Umkreis des Zirkels beschreibt, innerhalb den Quadranten AL bleibt, der Cosinus eines jeden Bogens, welcher also kleiner ist, als der vierte Theil des Zirkels, der Figur nach, rechter Hand dem Mittelpunkt C bleibt; sobald aber der Punkt A in dem Quadranten LG kommt, so fällt der Cosinus eines jeden Bogens, der größer ist als AL, oder der vierte Theil des Zirkels, auf der linken Seite von C, z. E. wie Cd, der Cosinus des Bogens AD, oder des stumpfen Winkels DCA. Die Cosinus eines spitzen und stumpfen Winkels sind demnach, der Lage nach, einander entgegen gesetzt, und müssen von einander unterschieden werden. Dieses kann nun am bequemsten durch die vorige Zeichen geschehen, so, daß wenn man den Cosinus eines spitzen Winkels als positiv betrachtet, und denselben mit das Zeichen + bezeichnet, man den Cosinus eines stumpfen Winkels als negativ betrachten, und vor denselben das Zeichen — setzen muß.

§. 29.

Fig. 9. Eben so ist es mit den Tangenten und Cotangenten eines Bogens oder Winkels beschaffen. Wenn man nemlich durch den Anfangspunkt A, eines gewissen Bogens, einen Diameter und eine gerade Linie zieht, welche den Zirkel in dem Anfangspunkt A berühret, nachgehends durch den Endpunkt B dieses Bogens und den Mittelpunkt des Zirkels eine

gerade

gerade Linie, z. E. CB zieht, welche die Tangente in b durchschneidet, so ist bekannt, daß Ab die Tangente des Bogens AB ist. So lange nun der Bogen AB kleiner ist als AH der vierte Theil des Umkreises, so lange fällt die Tangente Ab beständig oberhalb A. Ist aber der Bogen wie AD größer als AH, so ist es ganz augenscheinlich, daß die Linie, die, wie CD, durch den Mittelpunkt C und den Endpunkt D des Bogens AD gezogen wird, die Linie, welche den Zirkel in A berühret, niemals anders als unterhalb A durchschneiden kann. Die Tangenten Ab, Ad, der Bogen AB, AD, sind folglich, der Lage nach, einander entgegen gesetzt. Wenn man nun die Tangente des Bogens AB, welcher kleiner ist als der vierte Theil der Peripherie, als positiv ansieht, so muß die Tangente des Bogens AD, welcher größer ist als der vierte Theil des Zirkels, als negativ betrachtet werden, und also kann man die erstere mit + die andere mit — bezeichnen.

Eben dieses läßt sich auch auf die Cotangenten, Secanten und Cosecanten anwenden.

§. 30.

Es sind in allen Wissenschaften noch unzählige Fälle, wo man diese Zeichen mit eben den Nutzen anbringen kann, wenn Größen vorkommen, welche in gewisser Absicht einander entgegen gesetzt sind. Z. E. in der gewöhnlichen Aritmetick sind die sogenannte Addition und Subtraction zwey Operations, welche einander entgegen gesetzt sind. Aus dieser

Ursach bedienet man sich auch des Zeichens + um die Addition, und des Zeichens — um die Subtraction anzudeuten. Um also z. E. anzuzeigen, daß man die Zahl 6 von der Zahl 9 subtrahiren soll, schreibt man 9 — 6. Und um die Zahl b von der Zahl a zu subtrahiren, schreibt man a — b, und so in andern Fällen. Ich hoffe, das die vorigen Beyspiele keinen Zweifel mehr, in Absicht auf die Bedeutung dieser Zeichen und der positiven und negativen Größen, lassen werden.

§. 31.

Erklärung.

Wenn man den Zusammenhang zwischen den Größen, welche in einer Aufgabe vorkommen, entdeckt, und denselben durch die algebraischen Zeichen ausgedrückt hat, so, daß man weiß, welche Grössen zusammen genommen, den andern gleich sind; so nennt man solchen algebraischen Ausdruck eine Gleichung (Equation).

§. 32.

Anmerkung.

Also ist $a + 2b - c = 6x - 5d + 17x$ eine Gleichung. Das Zeichen (=) setzt man zwischen den Größen, von denen man weiß, daß sie einander gleich sind, es mögen übrigens die Grössen in der Gleichung beschaffen seyn, wie sie wollen, wenn sie nur von einerley Art sind. Denn es ist offenbar, daß zwischen Größen von verschiedener Art, z. Ex. zwischen Linien und Gewichte,

zwi-

zwischen Zeit und Körper ꝛc. sich keine Gleichheit gedenken läßt.

Wenn man diese Gleichung mit Worten ausdrücken wolte, so müßte man sagen, daß beyde positive Größen a und $2b$, nebst der negativen $-c$ so groß sind als die beyde positive Größen $6x$ und $17x$, und die negative Größe $-5d$. Oder daß a plus $2b$, minus c, gleich $6x$, minus $5d$, plus $17x$, und so in andern Fällen.

§. 33.

Erklärung.

Eine jede Gleichung hat zwey Theile, und unter einen Theil (membrum) verstehet man alle die Grössen, die auf der einen Seite des Zeichens (=) stehen, sie mögen übrigens beschaffen und durch die Zeichen + und — mit einander verbunden seyn wie sie wollen. Eine jede Größe aber, welche sich in einem jedem Theile der Gleichung befindet, heißt ein Glied (Terminus) des Theiles, in dem sie sich befindet.

§. 34.

Anmerkung.

In dieser Gleichung

$$A + B - C = D - 2E + F - G.$$

sind die Größen A, und + B und — C zusammen genommen, oder die Größe, welche aus der Verbindung dieser Größen entsteht, ein Theil; und D — 2E + F — G der andere Theil der Gleichung. Die Größen A, + B und — C sind

die Glieder in dem ersten Theile, und D, — 2E, + F und — G die Glieder in dem andern Theil. Diese Theile der Gleichung sind aber nicht an einer gewissen Seite des Zeichens = gebunden, sondern man kann eben die vorige Gleichung auch so schreiben D — 2E + F — G = A + B — C.

Es ist auch nicht eben nöthig, daß die Glieder der Gleichung in eben der Ordnung geschrieben werden; diese Gleichungen

$$B - C + A = -2E + D - G + F$$

oder $-C + A + B = D - G + F - 2E$

bedeuten eben das, was die erste Gleichung bedeutet.

§. 35.

Nachdem die Aufgabe beschaffen ist, welche aufgelöset werden soll, nachdem ist auch die Gleichung beschaffen, welche nach den Bedingungen derselben eingerichtet ist. Dahero können die Größen auf der einen Seite so beschaffen seyn, daß sie zusammen genommen, keine Größe hervorbringen, sondern völlig einander aufheben, oder = 0 werden. Also kann es öfters geschehen, daß

$$A + B - C = 0$$

wird, wenn die beyde positive Größen A und B zusammen genommen, so groß sind als die negative Größe C. Ohngeachtet nun auf der einen Seite das Zeichen = nichts ist, so bleibt dennoch dieser Ausdruck eine Gleichung. Also ist z. E.

$$18 - 22 + 4 = 0$$

eine Gleichung, eben so gut als

$$18 - 12 + 16 = 35 - 28 + 61 - 46.$$

eine Gleichung ist.

§. 36.

§. 36.

Man kann aber öfters die Theile in einer Gleichung abkürzen, wenn man sich der (§. 21.) gegebenen Regel bedienen will. Gesetzt, es wäre diese Gleichung

$$24+36-82-119+212=75-3+16-28+286-275$$

gegeben; so ist offenbar, daß man einige Glieder derselben zusammen rechnen, und dadurch die Gleichung in eine andere verwandeln kann, in der nicht mehr so viel Glieder sind. Denn da

$$24+36=60$$

und $286-275=11$

ist, so kann man an statt $24+36$, die Zahl 60, und an statt $286-275$, die Zahl 11 setzen; alsdenn wird

$$60-82-119+212=75-3+16-28+11.$$

Diese neue Gleichung, welche im Grunde mit der ersten einerley ist, kann man ferner abkürzen: denn da (§. 21)

$$60-82=-22 \text{ und}$$

$$16-28=-12$$

ist, so kann wieder an statt $60-82$; -22, und an statt $16-18$, die Zahl -12 setzen, so wird

$$-22-119+212=75-3-12+11$$

und auf diese Art kann man immer weiter gehen.

§. 37.

Dieses gehet aber nicht allein bey Zahlen an, sondern man kann auf ähnliche Art auch andre Gleichungen verändern, wenn man es aus gewissen Ur-

sachen, z. E. um nicht mit so viel Buchstaben zu thun zu haben, vor bequem hält. Diese Gleichung $A-2B+16C=24D-E+12F+G-3H$ in der alle Größen A, B &c. von einerley Art sind, läßt sich also abkürzen. Gesetzt, man wüßte, daß $A-2B=L$ und $-E+12F=M$ wäre, so könnte man an statt $A-2B$ nur L, und an statt $-E+12F$ nur M setzen, und man bekäme alsdenn die Gleichung:

$$L+16C=24D+M+G-3H.$$

Wäre ferner bekannt, daß $+G-3H=-N$ wäre, so würde auf eben diese Art diese Gleichung in diese

$$L+16C=24D+M-N$$

verwandelt, und alle diese drey Gleichungen drücken eben das aus. Es ist leicht einzusehen, daß man auch wieder vor die Größen L, M, N diejenigen, als $A-2B$, $-E+12F$, und $G-3H$ setzen kann, wenn es erfordert wird. Die Bequemlichkeit, welche aus dergleichen Veränderungen entsteht, wird sich am besten, durch die in der Folge vorkommende Beyspiele, zeigen lassen.

§. 38.

Ein jeder kann in diesem Stücke überhaupt Veränderungen vornehmen, welche er will, wenn er sich darüber erkläret, und man findet in den algebraischen Schriften davon häufige Beyspiele. Z. E. wenn $a-b=x$, so muß man, um die Größe x kürzer auszudrücken, diejenige von den beyden Grössen a und b, welche die kleinste ist, von der größten

wegneh-

wegnehmen, und dem Ueberrest das Zeichen der Grössern vorsetzen. (§. 21.) Wenn also a größer ist als b, und $a-b$ ist so groß als d, so wird $x=d$; Ist aber b größer als a, so wird x negativ, und man muß a von b subtrahiren. Dieses kann man also andeuten, daß $a-b=-(b-a)$. Hieraus sieht man also, daß $a-b$ allezeit $=-(b-a)$ ist. Und so bedeutet überhaupt ein jeder Ausdruck $+(b-a)$ oder $-(b-a)$ daß man erstlich die Größen, die in der Parenthese eingeschlossen sind, so mit einander vereinigen soll, als es die Zeichen $+$ und $-$ erfordern, und daß man das Zeichen der in der Parenthese heraus kommenden Größe behalten, wenn vor der Parenthese $+$ stehet, oder umkehren soll, wenn vor der Parenthese das Zeichen $-$ stehet.

Z. E. Wenn $x=-(b-a)$ wäre, und die Größe $b-a$ in der Parenthese wäre $-d$, so würde $x=-(-d)$ oder $x=+d$, weil das Zeichen $-$ vor der Parenthese zeigt, daß man das Zeichen der Größe in der Parenthese umkehren, das ist $+$ in $-$ verwandeln soll.

§. 39.

Eben so kann man viele Größen in Parentheſen einschliessen, z. E. an statt der Größe $a+b-c+d$ kann man, wenn man will, schreiben $a+(b-c+d)$ oder $a-(c-d-b)$, denn $-(c-d-b)$ bedeutet nichts anders, als daß man die Größe $(c-d-b)$ negativ nehmen, das ist, alle die Größen, welche in der Parenthese vor-

kommen, in die entgegen gesetzte verwandeln soll; also sind $28+6-8+16$, eben so viel, als $28-(8-16-6)$.

§. 40.

Es ist also leicht, die Bedeutung dieses algebraischen Ausdrucks, $a+(b-(c+d))$ zu verstehen. Man soll nehmlich die beyde Größen c und d mit einander vereinigen, und die daraus entstehende Größe negativ nehmen, und sie wieder mit der Größe b verbinden. Die auf das neue entstehende Größe, soll man wieder zu der Größe a hinzusetzen. Z. E. $6+(9-(2+5))$ bedeutet, daß man die Zahlen $2+5=7$ negativ nehmen, und sie mit der Zahl 9 vereinigen soll; da nun $9-7=2$, so wird $6+(9-(2+5))=6+(9-7)=6+2=8$.

§. 41.

Dergleichen algebraische Ausdrücke, als

$a+(b-(c+(d-e)))$ oder

$a-(b+(c-(d-(+f))))$

und andre mehr, können, meines Erachtens, nun weiter keine Schwürigkeit machen. Denn da $-(e+f)=-e-f$ §. 38. so ist der letzte Ausdruck auch einerley mit

$a-(b+(c-(d-e-f)))$.

Es ist aber ferner $-(d-e-f)=-d+e+f$, §. 38. folglich ist derselbe auch einerley mit $a-(b+(c-d+e+f))$. Da nun $+(c-d+e+f)=c-d+e+f$; so ist derselbe auch einerley mit

$a-(b+c-d+e+f)$

oder

oder endlich mit

$$a-b-c+d-e-f.$$

Man sieht leicht ein, daß diese Parentheſen nur eine Schreibart sind und weiter nichts auf sich haben. Einige schreiben an statt $a+(b-c)$ auch $a+\overline{b-c}$ und an statt $a+(b-(c+d))$, $a+\overline{b-\overline{c+d}}$. Bey dieſer Schreibart finden sich aber viel Unbequemlichkeiten.

§. 42.

Erklärung.

Die Vereinigung algebraiſcher Größen, nachdem sie durch die Zeichen + und — mit einander verbunden sind, heiſt die algebraiſche Addition und diejenige Größe, welche aus dieſer Vereinigung entſteht, oder die daraus entſtehen kann, sie mag beſchaffen seyn wie sie will, heiſt die allgebraiſche Summe.

§. 43.

Anmerkung.

Die algebraiſche Addition iſt in vielen Stücken von der gewöhnlichen Addition in der Aritmetick unterſchieden, und man muß dieſelben nicht mit einander vermiſchen. Denn durch die aritmetiſche Addition wird beſtändig eine neue Größe hervorgebracht, welche größer iſt als eine von denen, welche man addiret hat. Dieſes findet aber nicht allezeit bey der algebraiſchen Addition ſtatt, und es geſchiehet nicht ſelten, daß die neue Größe, welche durch die algebraiſche Addition hervorgebracht worden,

den, kleiner ist als eine von denen, welche man addirt hat; ja, die Größen welche man zusammen addirt, heben sich öfters völlig auf, und es entsteht gar keine neue Größe. Die neue Größe hängt bey der algebraischen Addition, nicht allein von den Größen die man zusammen rechnet, an und vor sich, sondern auch von den Bedingungen ab, welche durch die Zeichen angedeutet werden, welche sie vor sich haben. Die algebraische Addition ist eigentlich eine bloße Vereinigung der Größen und ein bloßes an einander schreiben. Man muß die Größe, welche entsteht, aber allezeit nach der Beschaffenheit der Zeichen + und — beurtheilen. Z. E. wenn man die Größen $9a$; $+76$; $6a$; $+120$ algebraisch addiren soll, so darf man sie nur mit den Zeichen hinschreiben, welche sie vor sich haben, und denn ist die algebraische Summe $9a+76-6a+120$. Indessen kan man dergleichen Größen nach §. 21. bisweilen kürzer ausdrücken. Und man hat bey der algebraischen Addition blos folgende Regel zu beobachten.

§. 44.

Wenn nemlich verschiedene Größen vorkommen, die mit einerley Buchstaben ausgedruckt werden, so rechnet man dieselben, wie in der gewöhnlichen Aritmetick, zusammen, wenn sie einerley Zeichen vor sich haben; haben sie aber verschiedene Zeichen vor sich, so subtrahirt man die kleinere von der größeren, ohne auf die Zeichen zu sehen, eben so wie in der Aritmetick, und giebt dem Ueberrest das Zeichen der größten Größe.

§. 45.

§. 45.

Also ist:

$3a + 4a = 7a$

$3a + 7a - 2a = 10a - 2a = 8a.$

$-a - 15a = -16a.$

$-21a + 36a - 11a - 19a = 36a - 51a = -15a.$

Eben so, wenn man die Größen $7a + 2b - 26c$ und $11a - 17b + 13c$ zusammen addiren soll, so darf man sie nur hinschreiben, und die Summe wird alsdenn

$7a + 2b - 26c + 11a - 17b + 13c.$

Nun kann man sie nach der vorigen Regel abkürzen: denn $7a + 11a$ ist $= 18a$

und $+ 2b - 17b = -15b$

und $-26c + 13c = -13c$

also wird die Summe

$18a - 15b - 13c.$

Indessen kann man diese Arbeit etwas bequemer einrichten, wenn man will. Man ordne nehmlich die Größen, zu denen man andere hinzusetzen soll, in einer Reihe, nach den Buchstaben des Alphabets, und schreibe die Größen, die mit einerley Buchstaben bezeichnet sind, untereinander, und addire sie nach der §. 44. gegebenen Regel.

I. Exempel.

$7a + 2b - 26c$

add. $11a - 17b + 13c$

$18a - 15b - 13c$

2. Exem-

2. Exempel.

$$\begin{array}{r} 21a + 26b - 33c + 17d \\ -16a + 11b + 32c + d \\ \hline 5a + 37b - c + 18d. \end{array}$$

3. Exempel.

$$\begin{array}{r} 28a - 36b + 21c - d + 15f \\ 2a + 3b - 21c + d - 13f + 12g \\ \hline 30a - 33b + 0 + 0 - 2f + 12g. \end{array}$$

und so in andern Fällen.

§. 46.

Die Buchstaben mögen übrigens bedeuten was sie wollen, z. E. es kann $a = (A + B)$ und $b = (3F - G)$ bedeuten. Dahero würde man

$3(A+B)$ und $7(A+B)$ eben so addiren als $3a$ und $7a$; und es wäre also

$3(A+B) + 7(A+B) = 10(A+B)$

und so in andern Fällen. *Man betrachtet die Grössen*, welche in Parentheſen eingeschlossen sind, als einzelne Buchstaben; und wenn die in den ( ) eingeschlossene Größen einerley sind, so rechnet man sie eben so, wie einzelne Buchstaben, zusammen.

§. 47.

Erklärung.

Die Größe B von der Größe A algebraisch subtrahiren, heist nichts anders, als eine neue Größe D finden, die so beschaffen ist, daß, wenn man zu derselben die subtrahirte Größe B, wieder hinzusetzt,

die

die Größe A wieder hervorgebracht wird. Das Verfahren um die Größe D zu bestimmen, heist die allgemeine oder algebraische Subtraction; und die Größe D, welche auf diese Art gefunden wird, ist die algebraische Differenz der Größen A und B.

§. 48.

Anmerkung.

Man begreift leicht, daß die algebraische Subtraction und diejenige Operation, welche in der Aritmetick unter diesen Namen vorkommt, in vielen Stücken von einander unterschieden sind. Man muß sich also durch diese beyde Worte, welche, dem Laut nach, einerley sind, nicht irre machen lassen, sondern blos die algebraische Subtraction nach der Erklärung beurtheilen, welche §. 47. davon gegeben worden. Aus eben dieser Erklärung, lassen sich auch die Regeln herleiten, welche man dabey zu beobachten hat.

§. 49.

Unter A und B mögen Größen verstanden werden, die beschaffen seyn können wie sie wollen, so können nur zwey Fälle vorkommen: die Größe B ist entweder positiv oder negativ; oder wenn B eine Sammlung von verschiedenen algebraischen Größen bedeutet, die durch die Zeichen + und — mit einander verbunden sind, so ist die Größe, die aus dieser Verbindung entsteht, entweder positiv oder negativ: Die Größe A mag beschaffen seyn wie sie will, und entweder das Zeichen + oder — vor sich haben,

§. 50.

§. 50.

Gesetzt also, man soll die Größe + B von A algebraisch subtrahiren: so stelle man sich vor, D sey die Größe welche daraus, nach der §. 47. gegebenen Erklärung, entsteht. Wenn man also zu der Größe D die Größe + B wieder algebraisch hinzusetzt, so muß die Größe A wieder hervorgebracht werden, oder die algebraische Summe der Größen D und B, muß der Größe A gleich seyn. Die algebraische Summe der Größen D und B, ist aber D + B; also muß D + B = A seyn. Um nun D zu finden, setze man auf beyden Seiten — B hinzu, so wird

$$D + B - B = A - B,$$

oder $D = A - B$.

§. 51.

Ist hingegen die Größe B negativ, oder hat das Zeichen — vor sich, und man soll — B von A algebraisch subtrahiren, so wird

$$D = A + B$$

seyn. Denn wenn man zu D die subtrahirte Größe — B wieder hinzusetzt, so muß die Größe A wieder heraus kommen. Nun ist hier

$$D - B = A + B - B,$$

folglich $D - B = A$.

§. 52.

Hieraus folget also die Regel, die algebraische Subtraction ganz mechanisch zu verrichten. Nemlich, wenn man B von A subtrahiren soll, so

kehre

kehre man das Zeichen der Größe B um, addire algebraisch §. 42. so bekommt man die algebraische Differenz.

§. 53.

Wenn also von $+ 5a$, die Größe $3a$ subtrahirt werden soll, so ist die algebraische Differenz

$5a - 3a$, oder $2a$.

Soll man von $7a$ die Größe $- 4a$ algebraisch subtrahiren, so kehre man das Zeichen der Größe $4a$ um und addire algebraisch, so wird die algebraische Differenz $7a + 4a$, oder $11a$.

Eben so, wenn man die Größe $11a - 13b$ von $5a - 15b + 6c$ algebraisch subtrahiren soll, so ist die algebraische Differenz

$5a - 15b + 6c - 11a + 13b$,

oder $- 6a - 2b + 6c$.

Wenn man solche zusammengesetzte Größen von einander subtrahiren soll, so kann man sich dabey eben der Methode bedienen, welche man bey der Addition §. 45. angewandt hat. Nemlich, nachdem man die Zeichen aller der Glieder in der Größe, welche man subtrahiren soll, umgekehrt hat, so schreibt man die Buchstaben, welche einerley sind, unter einander und addirt.

§. 54.

Man soll von $17a - 22b + 16c - 13d$, die Größe $12a - 17b - 19c - 22d$ subrahiren: Kehrt man nun die Zeichen in dieser letztern Größe um, so wird daraus $- 12a + 17b + 19c + 22d$. Nun verfahre man, wie bey der Addition

1. Exempel.

$17a - 22b + 16c - 13d$
$-12a + 17b + 19c + 22d,$

so ist $5a - 5b + 35c + 9d$ die algebraische Differenz. Eben so, wenn

2. Exempel.

von $31a - 22b + 46c + 57d$
die Größen $-11a + 16b + 46c + 32d$ subtr. werden

sollen, so ist $42a - 38b \ldots + 25d$ die Differ.

3. Exempel.

von $-42a + 27b - 11c + 17d + 12e$
die Größen $+13a + 27b - 11c + 16d$ subtr.

bleibt $-55a \ldots + d + 12e$ die algebraische Differenz; und so in andern Fällen.

§. 55.

Wenn die Größen, welche man addiren oder von einander subtrahiren soll, gerade Linien sind, so kann man dabey auf folgende Art verfahren. Gesetzt man soll die Linien $+a$, $+b$, $-c$ addiren: so ziehe man in einer gewissen Fläche eine gerade Linie, nach gefallen, nehme auf derselben von A nach B zu, die Linien $AB = +a$, und von B nach C zu, die Linie $BC = +b$; von C aber schneide man nach A zurück, die Linie $CD = c$ ab, so ist alsdenn die Linie $AD = a + b - c$, und entweder negativ oder positiv, nachdem der Punkt D auf der einen oder der andern Seite liegt. Denn wenn die positive Linien von A nach C zugehen, und der Punkt D fält auf eben der Seite von A,

Fig. 10.

so

so ist AD positiv; fällt er aber auf der andern Seite, so ist derselbe negativ. Z. E. 7 Fuß +, 8 Fuß, — 6 Fuß ist + 9 Fuß, und AB wird = 9 Fuß, BC = 8 Fuß, CD = 6 Fuß. Allein wenn AB = 12 Fuß, BC = 21 Fuß und CD = 45 Fuß, so wird 12 + 21 — 45 Fuß, = — 12 Fuß, und der Punkt D fällt linker Hand A.

Wenn man die Differenz verschiedener Grössen bestimmt hat, §. 54. und dieselben bedeuten Linien, so ist es leicht, dieselben auch geometrisch zu bestimmen oder zu zeichnen.

Eben so kann man die Linien $+a$, $-2b$, $+6c$, $-5d$ leicht addiren. Man ziehe in einer Fläche eine gerade Linie MN, nehme auf derselben einen Punkt A nach gefallen an, und setze, daß die positiven Linien von der Gegend M nach N zu, und die negative Linien von der Gegend N nach M zu fallen; alsdenn nehme man von A nach N zu die Linie AB = a, und von B nach M zu, die Linie BC = $2b$, weil dieselbe negativ ist, hierauf von C nach N zu, die Linie CD = $6c$, weil diese Linie positiv ist; und endlich von D nach M zu die Linie DE = $-5d$, weil diese wieder negativ ist, so wird die Linie AF = $a - 2b + 6c - 5d$. Fig 10 No. 1

Nachdem nun die Linien a, b, c, d ꝛc. nach einem gewissen Maas angegeben werden, nachdem wird die Linie AE beschaffen seyn; und wenn der Punkt E auf der Seite von A fällt, auf der N liegt, so wird AE positiv, fält er auf der Seite wo M liegt, so wird AE negativ.

§. 56.

Auf eine ähnliche Art würde man verfahren, wenn die in einer Aufgabe vorkommende Größen, Zirkel-Bogen, Winkel, Flächen, Körper, Gewichte ꝛc. bedeuten. Indessen aber bedienet man sich gern der geraden Linien, wenn eine Aufgabe dadurch aufgelöset werden kann, weil dieses die einfachste Größe ist, und setzt die Winkel, Zirkel-Bogen ꝛc. auf die Seite, wenn es nicht die höchste Noth erfordert, oder man dadurch auf eine bequemere Art die Auflösung vollenden kann.

§. 57.

Aufgabe.

Der Punkt A in der geraden Linie B C, wird nach B zu, von den Kräften d, e, und nach der entgegen gesetzten Seite C von den Kräften a, b, c
Fig. 11. gezogen. Man will die Kraft wissen, die man noch zu diesen Kräften hinzusetzen muß, damit der Punkt A in Ruhe bleibe, und nach welcher Gegend dieselbe würcken muß.

§. 58.

Vorbereitung.

Diese Aufgabe muß aus den Grundsätzen der Mechanik entschieden werden. Indessen ist es offenbar, daß, wenn die Kräfte, welche den Punkt A nach B zu ziehen, zusammen genommen eben so gros sind, als diejenigen zusammen genommen, welche diesen Punkt nach C ziehen, dieser Punkt nicht von der Stelle kommen kann. Man siehet

aber

aber auch leicht, daß man hier die Kräfte, welche zum Exempel nach B zu würken, als positiv, und diejenigen, welche nach C zu würken, als negativ betrachten kann. Alsdenn würde der Punkt A in Ruhe bleiben, wenn die algebraische Summe aller dieser Kräfte nichts ist. Beydes kommt auf eins heraus.

§. 59.

Auflösung.

Man nenne die Kraft, welche noch hinzu kommen muß, x, und da man nicht weiß, auf welcher Seite sie angebracht werden muß, so setze man, daß sie den Punkt A nach B zu treibt: denn wenn sie nicht nach dieser Gegend würken solte, so muß sich dieses am Ende der Auflösung zeigen. Es ist also $d+e+x=a+b+c$.

§. 60.

Aus dieser Gleichung läßt sich nun die würkliche Größe der Kraft x nicht eher schliessen, als bis man dieselbe allein auf die eine Seite der Gleichung gebracht hat. Dieses kann aber leicht geschehen, wenn man sich erinnert, daß, wenn man zu gleichen Größen, gleiche hinzu setzt, die dadurch entstehende beyde Größen einander wieder gleich werden. (Eucl. 1 B. 2 Gr.) Nun ist $-d-e=-d-e$. Diese Gleichung addirt man zu der vorigen, so wird

$$d+e+x-d-e=a+b+c-d-e.$$

Es ist aber $d-d=o$ und $e-e=o$, folglich wird

$$x=a+b+c-d-e.$$

§. 61.

Wolte man diese Aufgabe nach den zweyten Grundsaz auflösen, indem man die Kräfte, welche nach B zu würcken, als positiv, und die andern, die nach C gerichtet sind, als negativ betrachtet, so wäre die algebraische Summe aller Kräfte

$$d+e+x-a-b-c=0,$$

addirt man nun, wie vorhin, auf beyden Seiten $+a+b+c-d-e$, so würde man ebenfalls

$$x=a+b+c-d-e$$

bekommen.

§. 62.

Anmerkung.

Diese Gleichung, wodurch x bestimmt wird, zeigt im Grunde nicht eher die wahre Größe dieser Kraft, als bis man die Größe der andern Kräfte kennet. Indessen sieht man doch wie die Kraft x von den andern Kräften abhängt: denn die Kraft x ist, in allen Fällen, so groß als der Ueberschuß der Kräfte a, b, c zusammen genommen über die beyden Kräfte d und e. Sind nun die Kräfte a, b ꝛc. in jeden besondern Fall bekannt, so ist es leicht, die Kraft x zu bestimmen, indem man nur vor jeden Buchstaben in der Gleichung, wodurch x bestimmt wird, die gegebene Kraft setzen darf.

§. 63.

Fig. 11. Gesetzt, z. E. a, b, c ꝛc. bedeuten Gewichte, und der Punkt A in dem Seil CB würde über Rollen B, C, von diesen Gewichten gezogen. Es sey ferner in einem gewissen Falle, $a=16p$, $b=32p$,

$c=$

$c = 11p$, $d = 15p$, $e = 22p$, indem p ein Pfund bedeutet, so wird

$$x = 16p + 32p + 11p - 15p - 22p,$$

oder $x = 22p$.

Da nun die Größe, welche die Kraft x ausdrückt, das Zeichen + vor sich hat, so muß auf der Seite, nach der die Kräfte ziehen, welche als positiv angesehen werden, also hier an dem Seile Bd ein Gewicht von 22 ℔ angehängt wird. Wäre aber $a = 17p$, $b = 9p$, $c = 7p$, $d = 22p$, $e = 34p$, so wäre $x = 17p + 9p + 7p - 22p - 34p$, folglich müste in diesem Falle ein Gewicht von 23 ℔ an dem andern Seile Cb angehängt werden, wenn der Punkt A in Ruhe bleiben solte. Eben so verfährt man in andern Fällen.

§. 64.

Bey dieser Auflösung verdient die Methode angemerkt zu werden, deren man sich bedienet, um die unbekannte Größe von den andern abzusondern. Man wird gewahr werden, daß die Glieder d und e, welche in dem ersten Theil der Gleichung das Zeichen + vor sich hatten, in dem andern Theil, nachdem sie herüber gebracht worden, das Zeichen — vor sich bekommen; und daß die Glieder a, b, c, welche in der Gleichung §. 60. das Zeichen — auf der einen Seite des Zeichens = vor sich haben, nachdem sie ebenfalls auf die andre Seite gebracht worden, das Zeichen + vor sich bekommen.

§. 65.

Diese Betrachtungen führen zu einer allgemeinen Regel, ein Glied, welches man will, aus dem einen

Theile einer Gleichung in dem andern zu versetzen. Z. E. Wenn sich in einen Theile der Gleichung die Größe $+a$ befin[illegible], und man will dieselbe in dem andern Theil dergestallt versetzen, daß die Gleichung bleiben soll, so lasse man sie in den Theil, in dem sie sich befindet, weg, und schreibe sie nur mit dem umgekehrten Zeichen $-$ in dem andern Theil der Gleichung. Will man aber z. E. die Größe $-b$ aus dem einen Theil in den andern bringen, so lasse man dieselbe in dem einen Theil weg, und schreibe $+b$ in dem andern. Denn wenn man die Größe $+a$ weg haben will, so muß man auf beyden Seiten die Größe $-a$, und will man $-b$ weg haben, so muß man auf beyden Seiten $+b$ addiren, dadurch aber fällt $+a$ oder $-b$ auf der einen Seite weg. Und da man dieses vorhero weiß, so darf man nicht erst diese Addition verrichten, sondern man verfährt nach der gegebenen Regel.

§. 66.

Auf diese Art kann man so viel Glieder aus dem einen Theil der Gleichung weg bringen, als man will. Es sey z. E.

$$3a-2c+x-d=5a+6c-f.$$

Gesetzt, man wolte x allein auf die eine Seite haben, so muß man alle die übrige Größen aus dem ersten Theil der Gleichung weg bringen; folglich muß man dieselben mit dem umgekehrten Zeichen in den andern Theil schreiben, §. 64. und alsdann wird

$$x=5a-3a+6c+2c+d-f,$$

und

und diese Gleichung kürzt man hernach, nach (§. 21. und 45.) ab, so wird

$$x = 2a + 8c + d - f.$$

§. 67.

Diese Versetzung der Glieder einer Gleichung ist eine Hauptsache in der Algebra, um die unbekannte Größe von der andern abzusondern. Doch ist dieses nicht die einzige Methode; andre Kunstgriffe, die dabey vorkommen, wird man unten häufig finden.

Zweyter Abschnitt.

Von der Entstehung der Größen aus einander, und der Multiplication und Division.

§. 68.

Erklärung.

Man stelle sich zwey Größen A und B vor, welche von einerley Art sind, so läst sich ohne Zweifel gedenken, daß die eine, auf eine gewisse Art, aus der andern entstehen kann. Die Art und Weise nun wie A aus B entsteht, heist die Verhältniß dieser beyden Größen gegen einander.

§. 69.

Anmerkung.

Der Begrif der Verhältnis wird hier ebenfalls in algebraischen Verstande genommen, und dahero

siehet man zugleich mit auf die Bedingungen, welche mit diesen Größen verknüpft sind, wodurch dieser Begrif weit allgemeiner wird. Gesetzt, z. E. die Größe A bedeute eine Linie von einer gewissen bestimmten Länge, und B eine andere, deren Länge gleichfalls bestimmt ist; so ist offenbar, daß man sich gedenken kann, die Linie B entsteht, auf eine gewisse Art, aus der Linie A und umgekehrt; so kann zum Exempel B enstehen, wenn man A in drey Theile theilet und davon zwey nimmt, dergestalt, das $B = \frac{2}{3} A$. Eben so kann in andern Fällen $B = \frac{4}{5} A$, oder $B = 7 A$, oder $B = \frac{4\frac{5}{1}}{2} A$ ꝛc. seyn.

Die Art, wie B aus A entsteht, mag nun beschaffen seyn, wie sie will, so bekommt man dadurch einen deutlichen Begrif von der Verhältnis dieser beyden Größen gegen einander. Es können aber auch mit B und A gewisse Bedingungen verbunden seyn, z. E. das die Linie A positiv und B negativ ist; in diesem Fall muß man nicht allein auf die Art acht haben, wie B, an und vor sich betrachtet, aus A entsteht, sondern auch die Bedingungen mit in Erwegung ziehen, die mit beyden Größen verbunden sind. Z. E. wenn $B = -\frac{2}{7} A$. So sieht man erstlich daß B aus A entsteht, wenn man diese letzte Größe in sieben gleiche Theile theilet, und davon zwey nimmt, hierauf aber die Größe B solche Bedingungen beylegt, welche den Bedingungen ganz entgegen gesetzt sind, welche mit der Größe A verbunden sind.

§. 70.

§. 70.

Das Messen in allen praktischen Angelegenheiten, zeigt einen jeden, was eine Verhältnis ist: denn wenn man sagt, die Linie B ist 3 Fuß, oder 4, 5 ꝛc. Fuß, oder 21, 26 ꝛc. Ellen lang, so versteht man darunter, daß der Linie B entsteht, indem man eine Größe, die 1 Fuß, oder 1 Elle 3, 4 5, oder 21, 26 mal wiederholet. Dieser Begrif zeiget also die Verhältnis, welche die Größe B zu einem Fuß hat.

§. 71.

Erklärung.

Man nehme vier Größen A, B, C, D, davon A u. B von einer gewissen Art, und C und D auch von einer gewissen Art sind. Man stelle sich ferner vor, daß die Art, wie B aus A entstehet, vollkommen mit der Art einerley ist, wie D aus C entsteht, es mögen mit A und C Bedingungen verknüpft seyn, wie sie wollen: so nennt man diese vier Größen A, B, C, D, proportional.

§. 72.

Anmerkung.

Hieraus ist leicht zu begreifen, was eigentlich zu einer Proportion, im algebraischen Verstande, erfordert wird, und wie die Größen beschaffen seyn müssen, welche zusammen in einer Proportion stehen sollen.

Erstlich müssen die erste beyde Größen A und B, nothwendig von einerley Art oder Homogen seyn: denn da die eine aus der andern entstehen soll, oder

da man sich wenigstens vorstellen soll, daß die eine, auf eine gewisse Art, aus der andern hervorgebracht werden kann, so ist dieses nohwendig. Eben so müssen die beyden Größen C und D ebenfalls von einerley Art oder Homogen seyn: indessen ist es nicht nöthig, daß alle vier Größen von einerley Art seyn dürfen. Denn wenn z. E. A und B Linien, und C und D Pfunde bedeuten, so ist offenbar, daß diese vier verschiedene Größen in einer Proportion seyn werden, wenn nur B vollkommen so aus A entsteht, wie D aus C. Also sind 3 Fuß 9 Fuß, 7 ℔. und 21 ℔. in eine Proportion; den 9 Fuß entstehen so aus 3 Fuß, wie 21 ℔. aus 7 ℔.

§. 73.

Die Proportion der vier Größen A, B, C, D, ist also aus zwey gleichen Verhältnissen zusammen gesetzt; da nun die Verhältnis der Große A zu B auf diese Art A : B geschrieben wird, so wird eine Proportion A : B = C : D geschrieben.

§. 74.

Um nun zu sehen, ob die vier Größen wirklich proportional sind, muß man sein Hauptaugenmerk darauf richten, ob B vollkommen so aus A entsteht, wie D aus C. Ich sage vollkommen: denn wenn nur der geringste Unterschied darinnen angetroffen wird, so sind die Größen schlechterdings nicht proportional. Dieses ist aber nicht nur so zu verstehen, daß die Größen, nur an und vor sich betrachtet, auf einerley Art aus einander entstehen, sondern, da man in der Algebra noch besondere Bedingungen mit den Größen

selbst

selbst verbindet, so ist augenscheinlich, daß man auch auf dieselbe acht haben muß. Und aus dieser Ursache werden die vier Größen A, B, C, D, alsdenn erst algebraisch proportional seyn, wenn nicht allein D aus C, absolute betrachtet, eben so entsteht, wie B aus A, sondern, wenn auch D, in Absicht auf C, eben die Bedingungen hat, welche B, in Absicht auf A hat.

§. 75.

Wenn man zu drey gegebenen Größen a, b, c, die vierte Proportionalgröße finden will, so multiplicirt man, wenn die Größen Zahlen sind, oder durch Zahlen ausgedruckt worden, b durch c, und dividirt durch a, und die gefundene vierte Proporcionalgröße d schreibt man so $\frac{b \times c}{a} = d$; und wo dergleichen algebraischer Ausdruck $\frac{b \times c}{a}$ vorkommt, so bedeutet derselbe die vierte Proportionalgröße zu a, b und c. Bisweilen wird diese Größe auch nur so geschrieben $\frac{bc}{a}$, oder $\frac{b.c}{a}$, oder $\frac{c.b}{a}$, oder $\frac{b}{a} \times c$, oder $\frac{1}{a} \times bc$, oder $bc \times \frac{1}{a}$, oder $\frac{b}{a}.c$, welche verschiedene Schreibarten, im Grunde, einerley bedeuten; und wenn man anzeigen will, daß die vier Größen a, b, c, d, proportional sind, so schreibt man dieses so $a \times d = b \times c$, oder $ad = bc$, oder $a.d = b.c$, oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, oder $da = bc$, oder $da = cb$. An der Ordnung der Buchstaben ist nichts gelegen.

§. 76.

Die Größen a, b, c, können übrigens bedeuten was sie wollen. Aus dieser Ursache wird die vierte

Pro-

Proportionalgröße zu $a+b$; $c+d-e$ und $g+h$ also geschrieben:

$$\frac{(c+d-e) \times (g+h)}{a+b}$$

oder

$$\frac{(c+d-e)\,(g+h)}{a+b}.$$

Auf eben die Art wird die vierte Proportionalgröße zu $(3a+5b-d)$; $15c-d+11e$ und $2a-50b+c$ also geschrieben:

$$\frac{(15e-d+11c)\,(2a-50b+c)}{3a+5b-d}.$$

§. 77.

Gesetzt, man hätte schon zu a, b und c die vierte Proportionalgröße d gefunden, und man solte aufs neue zu f, g und dieser schon gefundenen Größe d wieder die vierte Proportionalgröße finden, so würde dieses Verfahren, nach der angenommenen Schreibart, so angedeutet werden müssen: $\frac{g \cdot d}{f}$, oder $\frac{g}{f} \times d$, oder $\frac{g}{f} \times \frac{b \cdot c}{a}$, weil $d = \frac{b \cdot c}{a}$.

Eben so, wenn man zu $(a+b)$; $d-e+f$ und $\frac{b \cdot c}{a}$ die vierte Proportionalgröße finden solte, so würde dieses Verfahren durch

$$\frac{(d-e+f)}{a+b} \times \frac{b \cdot c}{a}$$

oder

$$\frac{(d-e+f)}{a+b} \cdot \frac{b \cdot c}{a}$$

ange-

angedeutet werden. Man kann sich leicht mehrere Exempel gedenken, wenn man vor diese einzelne Buchstaben, noch verschiedene andere Größen gedenket, sie mögen übrigens beschaffen seyn wie sie wollen.

§. 78.

Diese Art zu schreiben rühret von dem Multiplicationszeichen her, welches × ist. Denn da die vierte Proportionalzahl entsteht, wenn man die beyde mittelsten mit einander multiplicirt, und die beyden ersten dividirt, so ist man auf den Einfall gekommen, das Verfahren, wodurch die vierte Proportionalgröße hervor gebracht wird, durch eben diese Zeichen anzudeuten, und hat diesen blos auf Zahlen eingeschränkten Begrif weiter ausgedehnet; im Grunde thut dieses zur Sache nichts, wenn man sich nur darüber deutlich erkläret. Inzwischen glaube ich, daß die Algebra ganz füglich hätte bestehen können, wenn man nicht die Begriffe, Multiplication und Division, darinnen angebracht hätte, die ich eben jetzt erklären will.

§. 79.

Erklärung.

Wenn man zu drey gegebenen Größen A, B, C, die vierte Prdportionalgröße D finden will, und die Größe A wird als die Einheit betrachtet, so heist dieses, im algebraischen Verstande, multipliciren; und D, oder die vierte Proportionalgröße, heist das Product aus der Größe B in die Größe C.

§. 80.

§. 80.

Betrachtet man aber B als die Einheit, so heist die vierte Proportionalgröße D zu A, 1. und C finden, alsdenn die Größe C durch A dividiren; und in diesem Fall heist D der Quotient.

§. 81.

Anmerkung.

Weil $1 : B = C : D$, so ist auch $B : 1 = D : C$. (Eucl. 5. Prop. B.) oder nach der Art zu schreiben (§. 75.) $\frac{D}{C} = B$; das ist, wenn man das Product durch die multiplicirte Größe dividirt, so bekommt man die Größe, durch welche die andre multiplicirt worden.

§. 82.

Eben so, wenn $A : 1 = C : D$, so ist auch $1 : A = D : C$, und $A \times D = C$, das ist, wenn man den Quotienten durch den Divisor multiplicirt, so entsteht die Größe, welche dividirt worden.

§. 83.

Aufgabe.

Zu drey gegebenen algebraischen Größen a, b, c, die vierte Proportionalgröße d zu finden.

§. 84.

Vorbereitung.

Diese Aufgabe in ihrem völligen Umfange aufzulösen, muß man zugleich auf die Bedingungen mit acht haben, welche mit den drey gegebenen Größen verbunden sind, und durch die Zeichen + und − angedeu-

angedeutet werden. Ueberhaupt aber muß die vierte Proportionalgröße d, in Absicht auf c, eben die Bedingungen haben, welche die Größe b in Absicht auf a hat. Hierbey aber finden folgende Fälle statt:

1. Fall:

Es sey a positiv, b positiv, und c ebenfalls positiv

2. Fall:

a positiv, b positiv, c negativ.

3. Fall:

a positiv, b negativ, c positiv.

4. Fall:

a positiv, b negativ und c negativ.

5. Fall:

a negativ, b positiv und c positiv.

6. Fall:

a negativ, b positiv, c negativ.

7. Fall:

a negativ, b negativ, c positiv.

8. Fall:

a negativ, b negativ und c negativ.

§. 85.

Auflösung.

Es muß also in allen Fällen die Größe *d* erstlich mit den andern absolut proportional seyn, das Zeichen dieser vierten Proportionalgröße ist aber in folgenden Proportionen richtig bestimmt.

1) $+a : +b = +c : +d$,

2) $+a : +b = -c : -d$,
3) $+a : -b = +c : -d$,
4) $+a : -b = -c : +d$,
5) $-a : +b = +c : -d$,
6) $-a : +b = -c : +d$,
7) $-a : -b = +c : +d$,
8) $-a : -b = -c : -d$,

§. 86.

Beweis.

In allen diesen Fällen hat die Größe d, in Absicht auf die Größe c, eben die Bedingungen welche die Größe b in Absicht auf die Größe a hat, und da die Größe d, an und vor sich betrachtet, proportional angenommen wird, so ist offenbar, daß die Größe d und das Zeichen derselben richtig bestimmt worden.

§. 87.

Anmerkung.

Es ist an und vor sich klar, daß die Größen so beschaffen seyn müssen, wie sie zu einer Proportion erfordert werden. (§. 72.). Wenn man die Richtigkeit dieser Proportionen untersuchen will, so nehme man eine jede und untersuche sie z. E. wie diese

$$+a : -b = -c : +d$$

auf folgende Art. Die Größen a und b sind, an und vor sich betrachtet, homogen, die Bedingungen aber, welche mit der Größe b verbunden sind, sind gerade denen entgegen gesetzt, welche mit der Größe a verbunden sind; weil nun d die vierte Proportionalgröße ist, so muß dieselbe vollkommen so aus

$-c$ entstehen, wie $-b$ aus $+a$ entsteht; folglich müssen die Bedingungen, welche mit der Größe d verbunden seyn können, denen gerade entgegen gesetzt seyn, welche mit c verbunden sind; folglich muß die Größe d das Zeichen $+$ vor sich haben, weil dieses anzeigt, daß mit dieser Größe solche Bedingungen verknüpft sind, welche den Bedingungen der Größe $-c$ gerade entgegen gesetzt sind.

§. 88.

1. Zusatz.

Wenn man a als die Einheit betrachtet und dieselbe beständig positiv annimmt, so entstehen aus den vorigen Proportionen die bekannte Regeln der algebraischen Multiplication; und wenn man b beständig als die Einheit und positiv betrachtet, so geben dieselben auch die Regeln der algebraischen Division. (§. 79. 80.)

§. 89.

2. Zusatz.

Und diese Regeln sind folgende:

1) Wenn die Größen, welche man in einander multipliciren soll, gleiche Zeichen haben, so ist das Product beständig negativ. Denn

$+1 : +b = +c : +d$ und $d = +b \times c = bc$

$+1 : -b = -c : +d \qquad d = -b \times -c = bc.$

$+1 : -b = +c : -d$ und $-d = -b \times c = -bc$

$+1 : +b = -c : -d \qquad -d = +b \times -c = -bc.$

2) Wenn Größen, davon eine durch die andere dividirt werden soll, einerley Zeichen haben, so ist

der Quotient positiv, haben sie aber verschiedene Zeichen, so ist der Quotient negativ.

Denn $+a:+1=+c:+d$ und $d=\frac{+c}{+a}$

$+a:+1=-c:-d$ und $-d=\frac{-c}{+a}=\frac{-c}{a}$

$-a:+1=+c:-d$ und $-d=\frac{+c}{-a}=\frac{-c}{a}$

$-a:+1=-c:+d$ und $+d=\frac{-c}{-a}=\frac{+c}{a}$

§. 90.

Anmerkung.

Wenn man die (§. 85.) gegebene Proportions geometrisch bestimmen will, so ziehe man zwey gerade Fig. 12. Linien AB, CD, welche sich in E durchschneiden. Die Linien, welche als positiv betrachtet werden, nehme man von E nach B, oder von E nach D zu auf diesen beyden Linien; diejenigen aber welche negativ sind, von E nach A, oder von E nach C zu. Gesetzt nun, man soll die vierte Proportional-Linie zu a, b, c finden, wenn a allezeit positiv ist, und b und c entweder positiv oder negativ sind; so nehme man in allen Fällen von E nach B die Linie EF $=+a$; alsdenn auf der Linie CD, von E nach D zu die Linie EG $=+b$, wenn b positiv ist; Fig. 13. oder die Linie EG $=-b$ von E nach C zu, wenn b negativ ist, wie (Fig. 13 und 14) und ziehe die Linie FG.

Ferner nehme man die Linie EH $=+c$ von E Fig. 14. nach B zu, auf der Linie AB, wenn die Linie C positiv

positiv ist; aber $EH = -c$ von E nach A zu, wenn die Linie c negativ ist, wie Fig. 15. 16. ziehe alsdenn durch H die Linie HI parallel mit FG, so ist die Linie EI die verlangte vierte Proportionallinie.

§. 91.

In allen diesen Figuren sind die Triangel EGF, EHI einander ähnlich. Folglich ist Fig. 15.

$$EF : EG = EH : EI$$

oder

$+a : +b = +c : +d$ Fig. 13.

$+a : +b = -c : -d$ } Fig. 14. Fig. 16.

$+a : -b = +c : -d$ }

$+a : -b = -c : +d$. Fig. 15.

§. 92.

Wenn man die Linie a als die Einheit betrachtet, welche durchgängig als positiv angesehen wird, so heist das vorhin gezeigte geometrische Verfahren, die Linie c durch die Linie b multipliciren. Man muß sich an dieses Wort nicht kehren, und darunter blos das verstehen, was hier gezeiget worden.

§. 93.

Die geometrische Division wird auf eben die Art verrichtet.

§. 94.

Anmerkung.

Wenn $a : b = c : \alpha$

$d : e = \alpha : \beta$

$f : g = \beta : \gamma$

$h : i = \gamma : \delta$ u. s. w.

so wird $\alpha = \frac{b \times c}{a}$; setzt man diesen Werth von α in der zweyten Proportion, so wird

$$d : e = \frac{b \times c}{a} : \beta.$$

folglich $\beta = \frac{b \times c}{a} \times \frac{e}{d}$

oder $\beta = \frac{b \times c \times e}{a \times d}$ (§. 75.)

Setzt man ferner diesen Werth in der dritten Proportion, so wird $f : g = \frac{b \times c \times}{a \times d} : \gamma$.

folglich $\gamma = \frac{b \times c \times e}{a \times d} \times \frac{g}{f}$

oder $\gamma = \frac{b \times c \times e \times g}{a \times d \times f.}$ (§. 75.)

Und endlich diesen Werth von γ in der vierten Proportion gesetzt, giebt

$$h : i = \frac{b \times c \times e \times g}{a \times d \times f} : \delta$$

folglich $\delta = \frac{b \times c \times e \times g}{a \times d \times f} \times \frac{i}{h}$

oder $\delta = \frac{b \times c \times e \times g \times i}{a \times d \times f \times h}$

oder blos $\delta = \frac{b\,c\,e\,g\,i}{a\,d\,f\,h,}$ (§. 75.)

und wenn mehrere dergleichen Verhältnisse da wären, so würde man auf eben diese Art weiter gehen müssen.

§. 85.

§. 95.

Man nennt dieses die Verhältnisse $a:b$, $d:e$, $f:g$, $h:i$ ꝛc. zusammen setzen, und man sagt, daß die Verhältniß $c:\delta$ aus diesen Verhältnissen zusammen gesetzt ist; und hieraus läst sich denn leicht begreifen, was dergleichen vorkommende algebraische Größen bedeuten. Uebrigens ist an und vor sich klar, daß die Größen a und b von einerley Art, und so auch die übrigen Größen in den andern Verhältnissen von einerley Art oder Homogen seyn müssen. Die Größen c und δ sind aber auch von einerley Art oder Homogen.

§. 96.

Es ist indessen die Zusammensetzung der Verhältnisse nicht so zu verstehen, als wenn man gewisse Grössen, z. E. Linien, zusammen setzt; es ist dieses nur ein Ausdruck unter dem, der Geometer eine gewisse Operation anzeiget. Wenn also z. E. gesagt wird, man soll die Verhältniß $c:\delta$ aus den Verhältnissen $a:b$, $d:e$, $f.g$, $h:i$ ꝛc. zusemmen setzen, so ist dieses ebenfalls so viel, als wenn man sagte, man soll erstlich zu den drey Größen a, b und c die vierte Proportinnalgröße finden; hernach soll man zu d, e und dieser gefundenen vierten Proportionalgröße wieder die vierte Proportionalgröße finden, die ich β nennen will; wenn dieses geschehen, soll man wieder zu f und g und zu β eine neue vierte Proportionalgröße finden, die ich γ nennen will; wenn diese gefunden, so soll man eben wieder so zu h, i und zu γ die vierte Proportional-

größe finden, und diese wird δ seyn. Wären nun noch mehr Verhältnisse da, welche zusammen gesetzt werden solten, so gienge man eben auf diese Art weiter.

§. 97.

Die Größen, welche in einer Aufgabe vorkommen, sind allezeit so beschaffen, daß, wenn die Verhältniß derselben gegen einander bekannt ist, man solche allezeit durch Zahlen, oder Linien, oder durch andere Größen ausdrücken kann. So kann man z. E. die Verhältnis $a:b$ der Verhältniß $m:n$ gleich setzen, wo m und n blos Zahlen sind; man kann aber auch vor m und n Linien nehmen, und so wenn mehrere Verhältnisse da sind, welche zusammen gesetzt werden sollen. Wenn also die vorige Verhältnisse (§. 94.) durch Zahlen ausgedrückt würden, und es wäre

$$a:b = m:n$$
$$d:e = p:q$$
$$f:g = r:s$$
$$h:i = t:u$$

so fände man $\delta = \frac{n.q.s.u.c.}{m.p.r.t.}$

wo $m.n$ ꝛc. entweder Zahlen oder Linien andeuten. Hieraus sieht man also, daß wenn δ eine unbekannte Größe in einer Aufgabe ist, und sie wird auf diese Art durch bekannte Größen ausgedrückt, man dieselbe allezeit durch Zahlen oder Linien ausdrucken kann.

§. 98.

Ein jeder algebraischer Ausdruck, oder eine jede algebraische Größe, die auf diese oder eine ähnliche

Art

Art geschrieben wird, bedeutet also, daß verschiedene Verhältnisse, die die Größen die darinnen gegeben werden, gegen einander haben, zusammen gesetzt sind. Und es ist offenbar, daß man z. E. diese Größe

$$\delta = \frac{b.e.g.i\,c.}{a.d.f.h.}$$

leicht wieder in die Verhältnisse auflösen kann, aus deren Zusammensetzung dieselbe entstanden ist. Denn man darf nur schreiben

$$a : b = c : \alpha$$
$$d : e = \alpha : \beta$$
$$f : g = \beta : \gamma$$
$$h : i = \gamma : \delta$$

so ist es geschehen; und es ist einerley, ob man die Verhältniß der Größe c zu der Größe δ auf die erste oder die letzte Art schreibet, wann man nicht der Bequemlichkeit wegen der ersten Schreibart den Vorzug giebt.

§. 99.

Es ist indessen nicht nöthig, daß die Glieder der Verhältnisse, welche man zusammensetzt, eben in der Ordnung neben einander geschrieben werden, wie sie auf einander folgen. Der Ausdruck (§. 94.)

$$\delta = \frac{bcegi}{adfh}$$

kann auch so $\delta = \frac{begci}{adhf}$

oder $\delta = \frac{becig}{dhfd}$

oder $\delta = \frac{bec}{ah} \times \frac{ig}{fd}$

oder $\delta = \frac{a}{b} \times \frac{eig}{hf} \times \frac{c}{d}$

oder noch auf unterschiedene andere Arten geschrieben werden, besonders da man die Verhältnisse, welche zusammen gesetzt worden, durch Zahlen ausdrucken kann, und die Verhältnis $c : \delta$ entsteht, wenn man die nachfolgende Glieder aller der Verhältnisse, welche zusammen gesetzt worden, ineinander multiplicirt, und das Product derselben durch das Product aus allen den vorangehenden Gliedern dividirt

§. 100.

Die Verhältnisse, welche zusammen gesetzt werden, können übrigens beschaffen seyn wie sie wollen, dahero können einige Größen in denselben auch 1 seyn. Z. E. wann man diese Verhältnisse

$$a : h = c : \alpha$$
$$b : d = \alpha : \beta$$
$$e : 1 = \beta : \gamma$$
$$f : 1 = \gamma : \delta$$
$$g : 1 = \delta : \xi$$

zusammen setzt, so wird wie (§. 95.)

$$\xi = \frac{hdc.1.1.1}{abefg} = \frac{hde}{abefg}$$

oder $\xi = \frac{h}{abefg} \times dc$

und was dergleichen mehr sind.

§. 101.

Wenn also eine solche algebraische Größe

$$x = \frac{a}{bcdefg}$$

vor-

vorkommt, so bedeutet dieses daß die Verhältnis a zu x aus den Verhältnissen $b:1$, $c:1$, $d:1$, $e:1$, $f:1$, $g:1$ ꝛc. wenn mehrere wären, zusammen gesetzet ist. Um nun die Größe x zu bekommen, müste man setzen

$$b:1 = a:\alpha$$
$$c:1 = \alpha:\beta$$
$$d:1 = \beta:\gamma$$
$$e:1 = \gamma:\delta$$
$$f:1 = \delta:\varepsilon$$
$$g:1 = \varepsilon:\xi$$

und die Größe ξ, welche man auf diese Art fände, ist die Größe x.

§. 102.

Wenn aber

$$1:a = c:\alpha$$
$$1:b = \alpha:\beta$$
$$1:d = \beta:\gamma$$
$$1:e = \gamma:\delta$$
$$1:f = \delta:\xi$$

so würde man nach (§. 95.) $\xi = abcdef$ finden. In diesem Falle sagt man, das ξ das Product aus den Größen a, b, c ꝛc. ineinander ist; und diese Größen heissen Factores der Größe ξ oder dieses Products. Man sieht leicht ein, in wie weit dieses algebraische Product und dasjenige, was man in der Aritmetik unter diesem Worte versteht, von einander unterschieden sind. Ein algebraisches Product verschiedener Größen in einander ist eine Größe, welche aus der Verbindung verschiedener Verhältnisse entstehet; und dieses Wort bedeutet schlechterdings nichts

anders

anders, als daß so viel Verhältnisse, davon das erste Glied allemal 1 ist, zusammen gesetzt werden, als das Product Factores hat. Dieses ist überhaupt wohl in acht zu nehmen, wenn man in der Folge alle vorkommende algebraische Ausdrücke verstehen, und sich bey der Anwendung der Auflösungskunst, auf die in der Physik, Mechanik, und in andern Wissenschaften vorkommende Aufgaben, nicht verwirren will. Denn man wird finden, daß Zeiten, Geschwindigkeiten, Gewichte, Linien ꝛc. ohne Unterschied in einander multipliciret werden. Dieses könte nicht geschehen, wenn ein solches Verfahren nicht die Lehre von den Proportionen zum Grunde hätte.

§. 103.

Wenn $a : b = c : \alpha$
$d : e = \alpha : \beta$
$f : g = \beta : \gamma$
so wird $\gamma = \frac{begc}{adf}$

Es sey nun ferner
$h : i = \gamma : \delta$
$k : l = \delta : \varepsilon$
$m : n = \varepsilon : \xi$
so wird $\xi = \frac{ilnbegc}{hkmadf}$

und wenn man von γ die Größe $\frac{begc}{adf}$ setzet,

so wird $\xi = \frac{iln}{hkm} \times \frac{begc}{adf}$

oder $\xi = \frac{ilnhegc}{hkmadf}$

Die Größe $\frac{iln}{hkm}$ wird in der Algebra ein Bruch genennet, desgleichen die andre Größe, aus keinem andern Grunde vielleicht, als weil dieselben nach Art eines in der Aritmetick bekannten Bruchs geschrieben werden. Die Größe ξ wird nun auf eben die Art hervorgebracht, als wenn man zwey Brüche in einander multiplicirt. Daher kann man die Zusammensetzung der Verhältnisse, die gewisse Größen gegen einander haben, nach eben den Regeln verrichten, die man bey der Multiplication der Brüche beobachtet, wenn man nur das zweyte Glied der Verhältnis als den Zehler und das erste als den Nenner betrachtet.

§. 104.

Wenn $a : b = c : \alpha$
$d : e = \alpha : \beta$
so ist $\beta = \frac{bce}{ad}$

Es sey ferner $f : g = h : \gamma$
$m : n = \gamma : \delta$
$p : q = \delta : \xi$
so wird $\xi = \frac{ghnq}{fmp}$

Gesetzt und es wäre ferner
$\xi : \beta = l : x$
so wird $x = \frac{\beta . l}{\xi}$

Setzt man nun vor β und ξ die Größen die ihnen

gleich

gleich sind, so wird x so geschrieben werden müssen:

$$x = \frac{\frac{bcel}{ad}}{\frac{ghnq}{fmp}}$$

§. 105.

Dieses nent man den Bruch $\frac{bcel}{ad}$ durch den Bruch $\frac{ghnq}{fmp}$ dividiren.

Diese Größe x entstehet aber auch wenn die vorige Größe dergestalt zusammengesetzet wird

$$a:b = c:\alpha$$
$$d:e = \alpha:\beta$$
$$g:f = \gamma:h$$
$$n:m = \delta:\gamma$$
$$q:p = \zeta:\delta$$
$$h:c = h:c$$

Es ist hieraus also

$$adgnqh:bcfmp = \xi:\beta = l:x$$

folglich $x = \frac{bcefmpl}{adgnqh}$

Dieser Werth von x wird eben so gefunden, wenn der Bruch $\frac{bcel}{ad}$ durch den Bruch $\frac{ghnq}{fmp}$ nach den bekannten Regeln dividirt wird, welche man in der Aritmetik erlernet, um einen Bruch der in Zahlen gegeben wird, durch einen andern in Zahlen gegebenen Bruch zu dividiren.

§. 106.

Eigentlich bedeutet

$$\frac{g\,h\,n\,q}{f\,m\,p} : \frac{b\,c\,e}{a\,d} = l : x$$

daß die Verhältniß l zu x aus den Verhältnissen $g:b$; $h:c$; $n:e$; $q:1$ gerade (directe) und aus den Verhältnissen $f:a$; $m:d$; $p:1$ umgekehrt (inverse) genommen, zusammengesetzt ist. Dahero findet man die Größe x durch die Zusammensetzung dieser Verhältnisse

$$\begin{aligned} g : b &= l : \alpha \\ h : c &= \alpha : \beta \\ n : e &= \beta : \gamma \\ q : 1 &= \gamma : \delta \\ a : f &= \delta : \varepsilon \\ d : m &= \varepsilon : \zeta \\ 1 : p &= \zeta : x \end{aligned}$$

Es ist also offenbar, daß die Größe x auf diese Art eben so herauskommt, als sie in den vorigen Sphen zu seyn, bewiesen worden. Es ist leicht zu begreifen, was vor Veränderungen entstehen, wenn einige von diesen Größen, als die Einheit betrachtet werden.

§. 107.

Wenn $a : b = c : \alpha$
$b : d = \alpha : \beta$
so wird $\beta = \frac{b\,c\,d}{a\,b}$

Es ist aber auch von diesen beyden Proportionen (Eucl. 5. Prop. F2)

$a : d$

$$a : d = c : \beta$$

folglich $\beta = \frac{dc}{a}$

Eben so wenn $a : b = c : \alpha$

$$b : d = \alpha : \beta$$
$$e : f = \beta : \gamma$$
$$g : h = \gamma : \delta$$
$$m : e = \delta : \xi$$

so wird $\zeta = \frac{bcdfhe}{abegm}$

Es ist aber auch nach (Eucl. 5. Prop. 6.)

$$a : d = c : \alpha$$
$$g : f = \alpha : n$$
$$m : h = u : x$$
$$b : b = x : x$$
$$e : e = x : \xi$$

folglich $\xi = \frac{dcfh}{agm}$

§. 108.

Dieser Werth von ξ ist mit dem vorigen vollkommen einerley, und die Factores, welche im Nenner und Zähler einander gleich sind, sind hier weggefallen. Aus allen diesen und andern vorkommenden Fällen, läst sich also schliessen, daß die Zusammensetzung der Verhältnisse, nach eben den Regeln, vorgenommen werden kann, nachdem man Brüche mit einander multipliciret und dividiret. Eben so können alle die übrige Veränderungen, welche mit algebraischen Brüchen vorgenommen werden müssen, als die Addition und Subtraction leicht aus der Lehre

von

von den Proportionen bewiesen werden. Sie sind indessen eben dieselben, welche man zu beobachten hat, wenn man Brüche, die in Zahlen gegeben werden, entweder addiren oder subtrahiren will.

§. 109.

Wenn die Verhältnisse, welche man zusammen setzen soll, alle einander gleich sind, als

$$a : b = c : \alpha$$
$$a : b = \alpha : \beta$$
$$a : b = \beta : \gamma$$
$$a : b = \gamma : \delta \text{ ꝛc.}$$

so wird $\beta = \frac{bbc}{aa}$

$$\gamma = \frac{bbbc}{aaa}$$

$$\delta = \frac{bbbbc}{aaaa} \text{ u. s. w.}$$

Es ist demnach leicht einzusehen, was ein dergleichen vorkommender algebraischer Ausdruck sagen will.

Eben so, wenn

$$1 : a = c : \alpha$$
$$1 : a = \alpha : \beta$$
$$1 : a = \beta : \gamma$$
$$1 : a = \gamma : \delta \text{ u. s. w.}$$

wäre, so würde man

$$\beta = aac$$
$$\gamma = aaac$$
$$\delta = aaaac$$

bekommen. Und ein jeder solcher Ausdruck bedeutet allemal daß die Verhältniß $c : \delta$ aus so viel gleichen

Verhältnissen $1 : a$ zusammen gesetzt wird, als Buchstaben a neben einander geschrieben sind.

§. 110.

Wenn man auf eben die Art die Verhältnisse

$$a : 1 = c : \alpha$$
$$a : 1 = \alpha : \beta$$
$$a : 1 = \beta : \gamma$$
$$a : 1 = \gamma : \delta$$

zusammen setzt, so bekommt man in diesem Falle

$$\beta = \frac{c}{aa}$$
$$\gamma = \frac{c}{aaa}$$
$$\delta = \frac{c}{aaaa}$$

Die wahre Bedeutung aller dieser algebraischen Ausdrücke ist leicht zu begreifen.

§. 111.

Wenn man auf diese Art viele gleiche Verhältnisse zusammen setzen solte, so würden, durch das neben einander schreiben, viele Unbequemlichkeiten entstehen. Um nun in diesem Stücke alle Irhümer zu vermeiden, so ist man auf ein sehr bequemes Mittel gefallen, diese Schreibart abzukürzen. Man ist nemlich überein gekommen, daß man

1	durch	a^0	
a	– –	a^1	oder blos durch a
aa	– –	a^2	
aaa	– –	a^3	
$aaaa$	– –	a^4	
$aaaaa$	– –	a^5	

und

und so weiter, anzeiget. Wenn nun die Anzahl der Buchstaben, die man dergestalt neben einander schreiben solte, m wäre, so würde man dieses durch a^m andeuten.

§. 112.

Diese Zahlen, welche anzeigen, wie viel mal die Größe a neben einander geschrieben werden soll, werden, aus dieser Ursach, Exponenten (Indices) genennt; sie müssen allezeit rechter Hand neben die Größe oder dem Buchstaben, auf welchen sie sich beziehen, und zwar etwas in die Höhe geschrieben werden. Man muß sich in acht nehmen, daß man dieselben nicht mit andern Zahlen vermischt, durch die eine gewisse Größe multiplicirt wird, und gemeiniglich linker Hand der Größe und mit derselben in einer Linie geschrieben werden; diese letztern werden Coeficienten genannt. Also ist z. E. in dieser Größe

$$6\,a^2$$

die Zahl 6 der Coeficient, und 2 der Exponent, und in dieser Größe

$$12\,(a+b)^4$$

ist die Zahl 12 der Coeficient, und die Zahl 4, die rechter Hand der Parenthese etwas in die Höhe geschrieben steht, ist der Exponent, welcher also anzeigt, daß die Größe $a+b$ zweymal neben einander geschrieben werden solte.

§. 113.

Nach dieser angenommenen Schreibart wird also

$$\frac{1}{a}$$

$\frac{1}{a}$ durch $\frac{1}{a^1}$ oder blos durch $\frac{1}{a}$

$\frac{1}{aa}$ — — $\frac{1}{a^2}$

$\frac{1}{aaa}$ — — $\frac{1}{a^3}$

$\frac{1}{aaaa}$ — — $\frac{1}{a^4}$ u. s. w.

ausgedrückt. Und wenn in dieser, in Form eines Bruchs geschriebenen Größe, die Anzahl der Buchstaben a, welche in dem Nenner neben einander kommen solten, durch m ausgedruckt würde, so müste dieser Bruch, oder Größe, so geschrieben werden

$$\frac{1}{a^m}$$

Diese letztere Schreibart hat man noch auf eine andere Art verändert: denn da eine Verhältniß $1:\delta$, welche aus den vier Verhältnissen $1:a$, $1:a$, $1:a$, $1:a$ zusammen gesetzt ist, durch $1:a^4$, und wenn die Anzahl der Verhältnisse m wäre, durch a^m angedeutet wird, so, daß $\delta = a^m$; die Verhältniß $1:a$ aber, umgekehrt, oder $a:1$ eben so oft genommen, auch die Verhältniß $1:\delta$ aber umgekehrt hervor bringt; so hat man auch leicht diese entgegen gesetzte Zusammensetzung durch die Zeichen + und — unterscheiden können.

Anstatt $\frac{1}{a}$ schreibt man dahero a^{-1}

$\frac{1}{a^2}$ — — a^{-2}

$\frac{1}{a^3}$ — — a^{-3}

$\frac{1}{a^4}$

$\frac{1}{a^4} = a^{-4}$

$\frac{1}{a^m} = a^{-m}$

und bey dieser Schreibart findet sich nichts geheimnißvolles. Man kann auch, wenn man es vor gut findet, allezeit wieder z. E. vor a^{-6} diese Größe $\frac{1}{a^6}$ und $\frac{1}{a^n}$ vor a^{-n} schreiben; so ist z. E. 2^{-3} eben so viel als $\frac{1}{2^3}$ oder $\frac{1}{2.2.2} = \frac{1}{8}$ eben so $7^{-4} = \frac{1}{7^4}$ oder $\frac{1}{7.7.7.7}$ oder $\frac{1}{2401}$ und was dergleichen Fälle mehr sind; als $(a+b)^{-3}$ ist eben so viel als $\frac{1}{(a+b)^3}$ und $(a+b-c+d)^{-5}$ eben so viel als $\frac{1}{(a+b-c+d)^5}$ und wenn man vor diese Größen noch andere setzt, so kann man sich leicht in allen vorkommenden Fällen helfen.

§. 114.

Wenn also $A = \frac{a^3}{b^2}$ so bedeutet dieses, daß die Verhältniß $1 : A$ aus den beyden Verhältnissen $b : a$, $b : a$ und der Verhältniß $1 : a$ zusammen gesetzt ist; und wenn $B = \frac{a^7}{b^5}$, so bedeutet dieses, daß die Verhältniß $1 : B$ aus den fünf gleichen Verhältnissen $b : a$ und aus zwey $1 : a$ zusammen gesetzt ist; oder, daß die Verhältnis $1 : B$ aus sieben gleichen Verhältnissen, davon eine jede $1 : a$ ist, und aus fünf andern

davon eine jede $b : 1$ ist, zusammen gesetzt wird. Denn wenn

$$\begin{aligned}
1 : a &= 1 : \alpha \\
1 : a &= \alpha : \beta \\
1 : a &= \beta : \gamma \\
1 : a &= \gamma : \delta \\
1 : a &= \delta : \varepsilon \\
1 : a &= \varepsilon : \xi \\
1 : a &= \xi : \eta \\
b : 1 &= \eta : \vartheta \\
b : 1 &= \vartheta : \upsilon \\
b : 1 &= \upsilon : \chi \\
b : 1 &= \chi : \lambda \\
b : 1 &= \lambda : B
\end{aligned}$$

so wird $b^5 : a^7 = 1 : B$ und $B = \frac{a^7}{b^5}$ (§. 94.) und so in andern Fällen.

§. 115.

Wenn also $C = \frac{a^m b^n}{c^r}$ wo m, n und r ganze positive Zahlen sind, so bedeutet dieses, daß die Verhältnis $1 : C$ aus so viel gleichen Verhältnissen $1 : a$ zusammen gesetzt ist, als die Zahl m Einheiten hat, und aus so viel gleichen Verhältnissen $1 : b$, als die Zahl n Einheiten hat, und aus so viel gleichen Verhältnissen $c : 1$ als die Zahl r Einheiten hat.

§. 116.

Wenn $A = \frac{a^5}{b^3}$, so kann man dieses auch so schreiben $a^5 \times \frac{1}{b^3}$ (§. 75.). Ferner ist $\frac{1}{b^3} = b^{-3}$;

folglich

folglich ist auch $A = \frac{a^5}{b^3}$ eben so viel als $A = a^5 b^{-3}$.

Eben so ist $A = \frac{a^5 b^7}{c^3}$ eben so viel als $A = a^5 b^7 c^{-3}$, und wenn $B = \frac{a^5 b^3 c^6 d^8}{f^4 g^9}$, so ist auch diese Größe eben so viel als $a^5 b^3 c^6 d^8 f^{-4} g^{-9}$. Ueberhaupt ist also $A = \frac{a^m p^n c^p d^q}{f^r g^s h^t}$ eben so viel als $A = a^m b^n c^p d^q f^{-r} g^{-s} h^{-t}$ und so bey allen Größen, die mit diesen eine Aehnlichkeit haben. Die Exponenten bedeuten hier, in dem ersten Ausdruck, lauter ganze Zahlen.

§. 117.

Wenn man eine gewisse Anzahl Verhältnisse, die durch m angedeutet wird, davon eine jede der Verhältnis $1 : a$ gleich ist, und eine andere Anzahl n Verhältnisse, davon eine jede die vorige umgekehrt genommen, oder $a : 1$ ist, zusammen setzt, so ist die Verhältnis, die daraus entsteht, derjenigen Verhältnis gleich, welche hervor gebracht wird, wenn man so viel Verhältnisse $1 : a$, oder $a : 1$ zusammen setzt, als die Zahl groß ist, welche anzeigt, um wie viel eine von den Zahlen m und n, absolut betrachtet, größer ist als die andere. Gesetzt, die Verhältnis $1 : A$ entstünde aus der Zusammensetzung aller dieser zuerst genommenen Verhältnisse, und m wäre größer als n; so ist die Verhältnis $1 : A$ der Verhältnis gleich, welche entsteht, wenn man so viel Verhältnisse $1 : a$ zusammensetzt, als die Zahl $m - n$ Einheiten hat. Wäre aber n

größer als m, so würde die Verhältnis $1 : A$ aus so viel Verhältnissen $a : 1$, (oder $1 : a$ umgekehrt genommen) zusammen gesetzt seyn, als $n - m$ Einheiten hat. Im ersten Falle würde also $1 : A = 1 : a^{m-n}$, und im zweyten Falle $1 : A = a^{n-m} : 1$ seyn; folglich wäre im ersten Fall $A = a^{m-n}$, und im zweyten $A = \frac{1}{a^{n-m}}$ oder $A = a^{-(n-m)}$ (§. 113.) oder auch $A = a^{m-n}$.

§. 118.

Dieses kann leicht durch folgende Betrachtungen erläutert werden. Ist nemlich

$$1 : a = 1 : \alpha$$
$$1 : a = \alpha : \beta$$
$$1 : a = \beta : \gamma$$
$$a : 1 = \gamma : \delta$$
$$a : 1 = \delta : \varepsilon$$

und man verwechselt diese Verhältnisse, so wird

$$a : a = 1 : 1$$
$$a : a = 1 : 1$$
$$1 : a = 1 : A$$

Folglich ist $1 : a = 1 : A$ und $A = a$ oder $A = \frac{a^3}{a^2}$. Auf eben diese Art ist $A = \frac{a^7}{a^5} = a^2$ und $A = \frac{a^{12}}{a^7} = a^5$ und folglich wenn m größer ist als n; $A = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Eben so ist $A = \frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}$ und $A = \frac{a^5}{a^9} = a^{-4}$.

Folglich überhaupt $A = \frac{a^m}{a^n} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$.

§. 119.

§. 119.

Hieraus lassen sich nun leicht die Regeln herleiten, welche man bey der Division und Multiplication der Größen zu beobachten hat, welche Exponenten bey sich haben; und diese bestehen darin;

Regel.

Um die Multiplication und Division mit Exponenten zu verrichten.

1.

Wenn man Größen die mit einerley Buchstaben bezeichnet werden, welche Exponenten bey sich haben, in einander multipliciren soll, so addire man die Exponenten, und schreibe die Summe neben eben der Größe, als den Exponent, so hat man das Produkt.

2.

Soll man von zwey Größen, welche mit einerley Buchstaben bezeichnet werden und Exponenten bey sich haben, die eine durch die andre dividiren, so subtrahire man die Exponenten algebraisch, so ist die Differenz der Exponent des Quotienten.

§. 120.

Also ist $a^3 \times a^2 = a^5$ und $a^3 \times a^4 \times a^6 = a^{13}$ und überhaupt $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

Eben so $\frac{a^3}{a^2} = a$ und $\frac{a^7}{a^3} = a^4$ und $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ wenn m und n ganze positive Zahlen bedeuten.

§. 121.

Man kann diese beyde Regeln in eine fassen, wenn man die algebraische Brüche, die bey den Exponential-Größen vorkommen, durch Hülfe der negativen Exponenten wegschafft. Denn da $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ und man sollte die Größe a^m durch a^n dividiren, so ist dieses eben so viel als die Größen a^m durch a^{-n} multipliciren und das Product wird seyn a^{m-n} oder $\frac{a^m}{a^n}$ wie vorhin. Eben so ist $a^m \times \frac{1}{a^n} = a^{m-n}$ und wie dergleichen Fälle mehr sind.

§. 122.

Hieraus läßt sich nun leicht begreifen, daß $a^3 b^5 c^2 \times b^2 a = a^4 b^7 c^2$ seyn muß, eben so wird z. E.

1) $a^3 b^5 c^2 \times a^4 b c d^2 = a^7 b^6 c^3 d^2$

2) $a^7 b^5 c^3 \times c^3 b^2 d f^3 = a^7 b^7 c^6 d f^3$

und überhaupt $a^m b^n c^p d^q \times a^r b^s c^t d^u f^x$ ꝛc. $= a^{m+r} b^{n+s} c^{p+t} d^{q+u} f^x$ wenn m, n ꝛc. ganze Zahlen bedeuten, sie mögen übrigens positiv oder negativ seyn; und es ist offenbar, daß man sich unter a, b, c ꝛc. Größen vorstellen kann, die beschaffen seyn können wie sie wollen.

§. 123.

Sollte man die Größe $a^m b^n c^p d^q$ ꝛc. durch $a^r b^s c^t d^u f^x$ ꝛc. dividiren, und die Exponenten sind ganze Zahlen, übrigens positiv oder negativ, so ziehe man die Exponenten des Divisors von jedem Exponenten der Größe welche dividirt werden soll, nemlich

nemlich den Exponent r der Größe a in dem Divisor von dem Exponent m der Größe a in der Größe welche dividirt werden soll, algebraisch ab, so bekomt man den wahren Quotienten, welcher also seyn wird $a^{m-r}b^{n-s}c^{p-t}d^{q-u}f^{-x}$, und dieser Größe $\frac{a^m b^n c^p d^q}{r^b s^c t^d u^f x}$ gleich ist.

Erklärung.

§. 124.

Wenn man eine Verhältnis $1 : a$ annimt, und daraus eine geometrische Progreßion macht, welche man auf beyden Seiten so weit fortführen kann, als man will, und also folgender Gestalt beschaffen seyn wird.

$1 : 1 : 1 : 1 ; 1 : 1 : a^2 ; a^3 : a^4 ; a^5 : a^6 : a^7$ ꝛc.
$\overline{a^5}\ \overline{a^4}\ \overline{a^3}\ \overline{a^2}\ \overline{a}$

oder nach der angenommenen Art zu schreiben (§. 113)

$a^{-4} : a^{-3} : a^{-2} : a^{-1} : a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4$ ꝛc.

So heißt das zweite Glied der Verhältnis $1 : a$, nemlich a, die Wurzel aller der übrigen Glieder, der Buchstabe a mag bedeuten was er will. Die übrigen Glieder aber werden die Dignitäten der Potenzen dieser Wurzel genannt, und von einander durch die Exponenten unterschieden, welche auch dazu dienen, um die Wurzeln gehörig anzuzeigen.

Anmerkung.

§. 125.

Nach dieser Benennung ist a^2 die zweite Dignität oder Potenz der Größe a, welche man auch das

Qua-

Quadrat der Größe a nennet. a^3 die dritte Dignität oder der Cubus, (Würfel) der Größe a, und eben so a^4, a^5, a^6 ꝛc. die vierte, fünfte, sechste ꝛc. Dignität oder Potenz der Größe a.

Gleichergestalt heißen a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5} die zweite, dritte, vierte, fünfte ꝛc. umgekehrte oder negative Dignität der Größe a, was man auch vor eine Größe unter a versteht. Eben diese Größen heißen auch die zweite, dritte, vierte, fünfte ꝛc. Dignität der Größe $\frac{1}{a}$ oder a^{-1}.

Ueberhaupt also ist a^m die $m$te Dignität der Größe a, oder die Dignität von a, deren Exponent m ist; und a^{-m} die $m$te Dignität von $a^{-1} = \frac{1}{a}$

§. 126.

Da nun a eine jede jede Größe bedeuten kann, und es ist $a = b^n$ so wird $(b^n)^2$ die zweite, $(b^n)^3$ die dritte, $(b^n)^4$ die vierte und überhaupt $(b^n)^m$ die $m$te Dignität von b^n bedeuten.

Eben so wenn $a = (ca + df - gh)$ so ist
$(cb + df - gh)^2$ die zweite
$(cb + df - gh)^3$ die dritte,
$(cb + df - gh)^m$ die $m$te
Dignität von $cb + df - gh$ und was dergleichen Größen mehr sind.

§. 127.

In Absicht auf jeder Dignität, heißt nun a die Wurzel. So ist a in Absicht auf a^2 die zweite Wurzel, oder die Quadrat-Wurzel; in Absicht auf

a^3

a^3 die dritte oder Cubic-Wurzel, in Absicht auf a^4 die vierte Wurzel, und überhaupt in Absicht auf a^m die *mte* Wurzel.

Eben so ist a^{-1} die zweite Wurzel in Absicht auf der Dignität a^{-2}, und die dritte Wurzel in Absicht auf die Dignität a^{-3} und überhaupt die *mte* Wurzel der Dignität a^{-m}.

§. 128.

Um die Wurzel anzudeuten, bedienet man sich dieses Zeichens $\sqrt{}$ welches man vor die Größe setzt, aus der man die Wurzel von einer gewissen Ordnung nehmen will. Die Zahl, welche alsdenn anzeigt, die wie vielste Wurzel man nehmen will, wird über dieses Zeichen geschrieben. Wenn man sich dieses Zeichens bedienet, so ist

$\sqrt[2]{a^2}$ oder blos $\sqrt{a^2} = a$ $\quad \sqrt[5]{a^5} = a$

$\sqrt[3]{a^3} = a$ $\quad \sqrt[6]{a^6} = a$

$\sqrt[4]{a^3} = a$ $\quad \sqrt[m]{a^m} = a$

Die zweite, dritte, vierte, fünfte, sechste Wurzel aus den Größen, vor denen dieses Zeichen stehet. Eben so ist

$\sqrt{a^{-2}} = a^{-1}$ die zweite Wurzel aus a^{-2}

und $\sqrt[m]{a^{-m}} = a^{-1}$ die *mte* Wurzel aus a^{-m}

§. 129.

Da die Dignitäten durch Zusammensetzung gleicher Verhältnisse hervorgebracht werden, so haben auch hinwiederum die Wurzeln der Theilung einer gewis-

gewissen Verhältnis in verschiedene andre Verhältnisse ihren Ursprung zu danken.

Man stelle sich unter B eine gewisse Größe vor, sie mag übrigens beschaffen seyn wie sie will, so bedeutet $\sqrt{B}$ daß man zwischen 1 und B die mittlere Proportional-Größe finden soll. Gesetzt dieses wäre x, so muß $1 : x = x : B$ seyn. Oder es bedeutet, daß man die Verhältnis $1 : B$ in zwey andre gleiche Verhältnisse zertheilen soll, davon eine jede $1 : x$ ist.

Eben so bedeutet $\sqrt[3]{B}$, daß man die Verhältnis $1 : B$ in drey andre gleiche Verhältnisse, davon eine jede $1 : x$ ist, zertheilen soll, oder $\sqrt[3]{B}$ bedeutet die erste von den beyden mittlern Proportional-Größen zwischen 1 oder der Größe B, oder die Cubic-Wurzel aus B.

Ueberhaupt also bedeutet $\sqrt[m]{B}$ die $m$te Wurzel aus B, oder daß man zwischen 1 und B so viel mittlere Proportional-Größen suchen soll als Einheiten in der Zahl $m - 1$ sind, oder daß man die Verhältnis $1 : B$ in so viel gleiche Verhältnisse $1 : x$ zertheilen soll, als in der Zahl m Einheiten sind, und das zweite Glied x dieser Verhältnis wird alsdenn der Größe $\sqrt[m]{B}$ gleich seyn.

§. 130.

Alles dieses ist leicht aus dem vorhergehenden zu beweisen. Denn wenn z. E. die Größe $\sqrt[6]{B}$ anzugeben wäre; so setze man daß x diese 6te Wurzel von B wäre, so muß B die 6te Dignität von x seyn.

Setzt

Setzt man nun diese sechs gleiche Verhältnisse

$$1 : x = 1 : \alpha$$
$$1 : x = \alpha : \beta$$
$$1 : x = \beta : \gamma$$
$$1 : x = \gamma : \delta$$
$$1 : x = \delta : \varepsilon$$
$$1 : x = \varepsilon : B$$

zusammen, so wird $x^6 = B$ und also $\sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{B} = x$ (§. 128) und so ist es in allen andern Fällen.

§. 131.

Eben diese Größe x ist aber auch die erste von den mittlern Proportionalgrößen zwischen 1 und B. Denn wenn die vorige Verhältnisse zusammen gesetzt werden, so ist $\alpha = x$, $\beta = x^2$, $\gamma = x^3$, $\delta = x^4$, $\varepsilon = x^5$; und es ist $1 : x = x : x^2 = x^2 : x^3 = x^3 : x^4 = x^4 : x^5 = x^5 : x^6$ und $B = x^6$. Man kann diese Beweise leicht auf die Wurzel $\sqrt[m]{B}$ anwenden, und dadurch einen deutlichen Begrif, von der Bedeutung der Wurzeln, in der Algebra, bekommen.

§. 132.

Diese Erklärung von den Wurzelzeichen ist sehr wohl zu merken, und dienet dazu, um die algebraische Sprache zu verstehen. Die in der Aritmetik so schlechthin angenommene Begriffe von den Wurzeln, gehören nicht hieher, und man muß nicht glauben, daß die Quadrat-Wurzel aus einem Fläche, eine Linie, und die Cubic-Wurzel aus einem Körper, auch eine Linie sey. Wer dieses glaubt, den bitte ich, mir zu sagen, was, nach seiner Meynung, die

vierte,

vierte, fünfte, sechste ꝛc. Wurzel, aus einer Größe, vor eine Größe ist. Ich glaube, daß eine Erklärung davon nicht gnugthuend seyn würde.

§. 133.

Die Verhältnisse werden indessen auf eben die Art zusammen gesetzt, wie man Zahlen in einander multiplicirt: denn aus der Progreßion

$$a^0 : a : a^2 : a^3 : a^4 \text{ ꝛc. } a^m$$

wird das zweyte, dritte, vierte ꝛc. $m$te Glied hervorgebracht, wenn man die Verhältnis $1 : a$ ein, zwey, drey ꝛc. m mal zusammen setzt. In dieser Absicht kann man die Dignität einer jeden Größe, deren Exponent m ist, das Product nennen, welches entsteht, wenn man so viel Größen a in einander multipliciret, als die Zahl m Einheiten hat.

Die $m$te Wurzel, aus einer gewissen Größe B, wird also diejenige Größe seyn, welche so beschaffen ist, daß, wenn sie $m-1$ mal durch sich selbst multiplicirt wird, dieselbe die Größe B hervor bringt.

§. 134.

Es bedeute nun a^m, was es vor eine Größe auch sey, und m bedeute eine ganze Zahl, die entweder positiv oder negativ ist; so ist $a^m \times a^n = a^{m+n}$, (§. 120.) folglich wenn man n, nach und nach, so groß als m, $2m$, $3m$, $4m$, ꝛc. annimmt, so ist $a^m \times a^m = a^{2m}$, $a^m \times a^{2m} = a^{3m}$, $a^m \times a^{3m} = a^{4m}$ u. s. w.

Diese verschiedene Producte machen auch eine geometrische Progreßion:

$$a \cdots a^m \cdots a^{2m} \cdots a^{3m} \cdots a^{4m} \cdots a^{5m} \text{ ꝛc. } a^{nm}$$

Es

Es ist also a^{2m} das Quadrat der Größe a^m,
a^{3m} der Cubus der Größe a^m,
a^{4m} die vierte Dignität der Größe a^m,
a^{5m} die fünfte - - - -
a^{6m} die sechste - - - -
&c.
a^{mn} - - nte - - - -

Hieraus sieht man zu gleicher Zeit, daß, wenn man die zweite, dritte, vierte und nte Dignität der Größe a^m haben will, man nur den Exponent m der Größe a durch den Exponent der Dignität multipliciren darf, auf der man die Größe a^m bringen will.

§. 135.

Hieraus kann man wieder umgekehrt eine neue Schreibart herleiten, wenn man sich der Wurzelzeichen nicht bedienen will, welche besonders bey Anfängern öfters ziemliche Verwirrung verursachen. Wenn man nemlich aus der Größe a^m die Quadrat-Wurzel haben will, so muß man diejenige Größe finden, die, wenn sie durch sich selbst multipliciret wird, die Größe a^m hervorbringt. Man nenne diese Größe x, so muß $x^2 = a^m$ seyn, der Exponent der Größe x kann also nur halb so groß seyn als der Exponent der Größe a, folglich muß $x = a^{\frac{m}{2}}$ seyn. Dieses giebt auch der Augenschein, denn $a^{\frac{m}{2}} \times a^{\frac{m}{2}} = a^{\frac{m}{2}+\frac{m}{2}} = a^m$. Aus eben diesem Grunde muß also $a^{\frac{m}{3}}$ die Cubic-Wurzel aus a^m, und $a^{\frac{m}{4}}$ die die vierte und $a^{\frac{m}{5}}$; $a^{\frac{m}{6}}$ ꝛc. die fünfte, sechste Wurzel aus a^m seyn. Ueberhaupt also wird $a^{\frac{m}{n}}$ die nte Wurzel

aus der Größe a^m seyn, der Buchstabe a mag bedeuten was er will, wenn nur m eine ganze positive oder negative Zahl ist.

§. 136.

Es ist also einerley ob man schreibt

$$\sqrt{a^m} \text{ oder } a^{\frac{m}{2}}$$
$$\sqrt[3]{a^m} \text{ - } a^{\frac{m}{3}}$$
$$\sqrt[4]{a^m} \text{ - } a^{\frac{m}{4}}$$

und überhaupt $\sqrt[n]{a^m}$ oder $a^{\frac{m}{n}}$, und man kann beyde Ausdrücke allezeit mit einandern verwechseln, wenn man es vor gut befindet.

Exempel.

Also ist $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$

$\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$

$\sqrt[5]{1024} = 1024^{\frac{1}{5}} = 4$

und so in andern Fällen.

§. 137.

Der Buchstabe m kann aber auch selbst eine gebrochne Zahl bedeuten. Wenn man dahero aus der Größe $a^{\frac{m}{n}}$ selbst die Quadrat-Wurzel haben will, so wird dieselbe $a^{\frac{m}{2n}}$ seyn; denn es ist offenbar, daß $a^{\frac{m}{2n}} \times a^{\frac{m}{2n}} = a^{\frac{m}{n}}$. Eben so wird die Cubik-Wurzel die vierte, fünfte, sechste ꝛc. $r$te Wurzel aus $a^{\frac{m}{n}}$ durch $a^{\frac{m}{3n}}$; $a^{\frac{m}{4n}}$; $a^{\frac{m}{5n}}$; $a^{\frac{m}{6n}}$ ꝛc. $a^{\frac{m}{rn}}$ angedeutet werden

werden müssen. Da nun $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ so erhellet hieraus, wie man die Wurzel-Zeichen entbehren kann, wenn viele hinter einander geschrieben werden solten. Es ist nemlich

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a^m}} = a^{\frac{m}{2n}}$$
$$\sqrt[3]{\sqrt[n]{a^m}} = a^{\frac{m}{3n}}$$
$$\sqrt[4]{\sqrt[n]{a^m}} = a^{\frac{m}{4n}}$$

u. s. w.

$$\sqrt[r]{\sqrt[n]{a^m}} = a^{\frac{m}{rn}}$$

Auf diese Art begreift man auch leicht, daß

$$\sqrt[s]{\sqrt[r]{\sqrt[n]{a^m}}} = a^{\frac{m}{s.r.n}}$$
$$\sqrt[t]{\sqrt[s]{\sqrt[r]{\sqrt[n]{a^m}}}} = a^{\frac{m}{n.r.s.t}}$$

Und was dergleichen vorkommende Fälle mehr sind. Wenn man sich vor a^m eine gewisse Zahl vorstellt, so wird es einem jeden leicht seyn diese Fälle durch Beyspiele zu erläutern. Man darf nur die gegebene Regeln gehörig und auf das genauste beobachten, so ist man vor alle Irthümer sicher.

§. 138.

Es sey $a = \frac{b^r d^t}{c^s}$

so wird $a^2 = \frac{b^{2r} d^{2t}}{c^{2s}}$

$$a^3 = \frac{b^{3r} d^{3t}}{c^{3s}}$$

$$a^4 = \frac{b^{4r} b^{4t}}{c}$$

$$a^m = \frac{b^{mr} d^{mt}}{c^{mt}}$$

Umgekehrt also wenn $a^m = \frac{b^r d^t}{c^s}$ so wird

$$\sqrt[m]{a^m} = \frac{b^{\frac{r}{z}} d^{\frac{t}{z}}}{c^{\frac{s}{z}}}$$

$$\sqrt[3]{a^m} = \frac{b^{\frac{r}{3}} d^{\frac{t}{3}}}{c^{\frac{s}{3}}}$$

Und überhaupt $\sqrt[n]{a^m} = \frac{b^{\frac{r}{n}} d^{\frac{t}{n}}}{c^{\frac{s}{n}}}$

oder $\sqrt{\frac{b^r d^t}{c^s}} = \frac{b^{\frac{r}{2}} d^{\frac{t}{2}}}{c^{\frac{s}{2}}}$

oder wenn man die $n$te Wurzel, das ist die Wurzel von der Ordnung n aus der Größe $\frac{b^r d^t}{c^s}$ haben will, so muß man jeden von den Exponenten r, t, s durch n dividiren, und alsdenn ist

$$\sqrt[n]{\frac{b^r d^t}{c^s}} = \frac{b^{\frac{r}{n}} d^{\frac{t}{n}}}{c^{\frac{s}{n}}}$$

und auf eben diese Art müßte man verfahren, wenn die Größe a^m aus noch mehrern Factoren bestünde.

§. 193.

Es ist aber $\frac{b^{\frac{r}{n}} d^{\frac{t}{n}}}{c^{\frac{s}{n}}} = \frac{b^{\frac{r}{n}} \times d^{\frac{t}{n}}}{c^{\frac{s}{n}}}$ oder $\frac{b^{\frac{r}{n}} \times d^{\frac{t}{n}}}{c^{\frac{s}{n}}}$

oder

oder $b^{\frac{r}{n}} \times d^{\frac{t}{n}} \times \frac{1}{c^{\frac{s}{n}}}$ (§. 75. u. 99.) Will man sich nun des Wurzelzeichens wieder bedienen, so kann $\sqrt[n]{\frac{b^r d^t}{c^s}} =$ $\frac{b^{\frac{r}{n}} d^{\frac{t}{n}}}{c^{\frac{s}{n}}}$ auch so geschrieben werden.

$\frac{b^{\frac{r}{n}} \sqrt[n]{d^t}}{c^{\frac{s}{n}}}$ oder $\frac{\sqrt[n]{b^r} \times \sqrt[n]{d^t}}{\sqrt[n]{c^s}}$ oder $\frac{b^{\frac{r}{n}} \sqrt[n]{d^t}}{\sqrt[n]{c^s}}$ oder $\frac{\sqrt[n]{b^r d^t}}{c^{\frac{s}{n}}}$ nachdem man es, in gewissen Fällen, bequem findet. Alle diese Ausdrücke, welche noch auf mehrere Arten verändert werden können, bedeuten einerley; und man sieht leicht ein, wie man verfahren muß, wenn mehrere Factores in diesen Größen wären. Setzt man übrigens vor b, c und d ꝛc. verschiedene Größen und Zahlen, sie mögen so zusammen gesetzt seyn, als sie wollen, so kann man zur Ubung häufige Exempel bekommen, die ich der Kürze halber übergehe.

§. 140.

Auf diese Art kann man zuweilen die Größen, welche unter dem Wurzelzeichen stehen, abkürzen. Gesetzt, es wäre in der Wurzel-Größe $\sqrt[n]{\frac{b^r d^t}{c^s}}$

der Exponent r, der Größe b so groß als $p.n.$ oder dem Product und der Zahl p in die Zahl n gleich, so kann dieser Ausdruck so geschrieben werden:

$$\frac{b^{\frac{np}{n}}\sqrt[n]{d^s}}{\sqrt[n]{c^s}}$$ da nun $\frac{np}{n} = p$, so wird in diesem Falle

$$\sqrt[n]{\frac{b^{np}d^s}{c^s}} = b^p\sqrt[n]{\frac{d^s}{c^s}}$$

Wäre ausserdem der Exponent s der Grösse c, der Zahl $q.n$ gleich, so würde $\sqrt[n]{\frac{b^{np}d^s}{c^{qn}}} = \frac{b^p\sqrt[n]{d^s}}{c^q}$ seyn.

Wäre endlich $t = nm$, so würde der ganze Ausdruck $\sqrt[n]{\frac{b^{pn}d^{nm}}{c^{nq}}} = \frac{b^p d^m}{c^q}$ seyn.

Wenn sich also der Exponent der einen Grösse, unter dem Wurzelzeichen, durch den Exponent über den Wurzelzeichen genau dividiren läst, so darf man nur diese Größe ausser dem Wurzelzeichen setzen und derselben den Exponent geben, welcher der durch die Division entstandene Quotient ist.

§. 141.

Exempel.

Also ist $\sqrt{\frac{a^2b}{c^3}} = a^{\frac{2}{2}}\sqrt{\frac{b}{c^3}} = a\sqrt{\frac{b}{c^3}}$.

Ferner $\sqrt{\frac{a^2b^4}{c^3}} = \frac{a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{4}{2}}}{\sqrt{c^3}} = \frac{ab^2}{\sqrt{c^3}}$

und $\sqrt[3]{\frac{a^6b^3c^5}{d^2f}} = \frac{a^{\frac{6}{3}}b^{\frac{3}{3}}c^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{d^2f}} = \frac{a^2b\sqrt[3]{c^5}}{\sqrt[3]{d^2f}}$;

und

und $\sqrt[4]{\frac{a^{12}b^{-8}c^2d^7}{e^4f^3}} = \frac{a^{\frac{12}{4}}b^{-\frac{8}{4}}\sqrt[4]{c^2d^7}}{\sqrt[4]{e^4f^3}} =$

$\frac{a^3b^{-2}\sqrt[4]{c^2d^7}}{e^{\frac{4}{4}}f^{\frac{3}{4}}} = \frac{a^3b^{-2}\sqrt[4]{c^2d^7}}{e\sqrt[4]{f^3}}$ oder da

$b^{-2} = \frac{1}{b^2}$ so ist der vorige Ausdruck auch

$$\frac{a^3\sqrt[4]{c^2d^3}}{b^2e\sqrt[4]{f^3}} = \frac{a^3}{b^2e} \times \sqrt[4]{\frac{c^2d^3}{f^3}}.$$

Da nun diese einzelne Buchstaben auch zusammen gesetzte Größen bedeuten können, so ist

$$\sqrt{\left(\frac{(a+b)^2cd}{e^4f}\right)} = \frac{(a+b)^{\frac{2}{2}}\sqrt{cd}}{e^{\frac{4}{2}}\sqrt{f}} =$$

$$\frac{(a+b)\sqrt{cd}}{e^2\sqrt{f}} = \frac{(a+b)}{e^2} \times \sqrt{\frac{cd}{f}},$$

auf eben diese Art wird

$$\sqrt[3]{\left(\frac{(a+2ab-c^2)^6\,(cd-e)^3fc^2}{(2cd+a^2b)^9d^3e^2}\right)} =$$

$$\frac{(a+2ab-c^2)^{\frac{6}{3}}\,(cd-e)^{\frac{3}{3}}\sqrt[3]{fc^2}}{(2cd+a^2b)^{\frac{9}{3}}d^{\frac{3}{3}}\sqrt[3]{e^2}} =$$

$$\frac{(a+2ab-c^2)^2\,(cd-e)\sqrt[3]{fc^2}}{(2cd+a^2b)^3d\sqrt[3]{e^2}} =$$

$$\frac{(a+2ab-c^2)^2\,(cd-e)}{(2cd+a^2b)^3d} \times \sqrt[3]{\frac{fe^2}{e^2}}$$

§. 142.

Und da $a^3 = a^2 \times a^1$ und überhaupt $a^{m+n} = a^m \times a^n$ so kann man öfters die Größen, welche

Wurzelzeichen vor sich haben, noch mehr abkürzen. Also ist

Exempel.

$$\sqrt[3]{\frac{a^5 b^7}{c^2}} = \sqrt[3]{\frac{a^3 \times a^2 \times b^6 \times b}{c^2}} = \frac{a^{\frac{3}{3}} b^{\frac{6}{3}} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}$$

(§. 136.) folglich eben so viel als

$$\frac{a b^2 \sqrt[3]{a^2 b}}{\sqrt[3]{c^2}} = a b \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{c^2}}.$$

Eben so $\sqrt[4]{\frac{a^{-7} b^5 c^6}{d^5 e^7}} = \sqrt[4]{\frac{a^{-4} a^{-3} b^4 b c^4 c^2}{d^4 d e^4 e^3}}$

$$= \frac{a^{-\frac{4}{4}} a^{-\frac{3}{4}} b^{\frac{4}{4}} b^{\frac{1}{4}} c^{\frac{4}{4}} e^{\frac{2}{4}}}{d^{\frac{4}{4}} d^{\frac{1}{4}} e^{\frac{4}{4}} e^{\frac{3}{4}}} \quad (\text{§. 136.})$$

$$= \frac{a^{-1} b c \sqrt[4]{a^{-3} c^2}}{d e \sqrt[4]{d e^3}} = \frac{a^{-1} b c}{d e} \sqrt[4]{\frac{a^{-3} c^2}{d e^3}}$$

Also ist

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 2} = 2\sqrt[3]{2}$$
$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 3} = 2\sqrt[3]{3}$$
$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3 4} = 2\sqrt[3]{4}$$
$$\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{2^3 5} = 2\sqrt[3]{5}$$
$$\sqrt[3]{\frac{7}{125}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{1}{5}\sqrt[3]{7}.$$
$$\sqrt[4]{\frac{64}{40}} = \sqrt[4]{\frac{16.4}{40}} = 2\sqrt[4]{\frac{4}{40}} = 2\sqrt[4]{\frac{1}{10}}$$

und so in andern dergleichen Fällen.

§. 143.

§. 143.

So wie man aber vor $\sqrt[m]{a^n}$ diese Größen $a^{\frac{n}{m}}$ schreiben kann (§. 136.), so kann man auch wieder vor $a^{\frac{n}{m}}$, wenn man will, $\sqrt[m]{a^n}$ schreiben; folglich kann vor $a\sqrt[3]{b}$ wieder $\sqrt[3]{a^3 b}$, und vor $\frac{a^2 b c}{d}\sqrt[3]{f}$ auch wieder $\sqrt[3]{\frac{a^6 b^3 c^3 f}{d^3}}$ schreiben.

Mehr dergleichen Arten zu schreiben, kann ein jeder selbst aus dem vorhergehenden herleiten.

§. 144.

Weil $\sqrt[n]{\frac{b^r d^t}{c^s}} = \frac{b^{\frac{r}{n}} d^{\frac{t}{n}}}{c^{\frac{s}{n}}}$ wie auch die Größen b, c, d beschaffen seyn mögen, so muß auch dieses richtig seyn, wenn $b = c = d$. In diesem Falle wird aber $\sqrt[n]{\frac{b^r d^t}{c^s}} = \sqrt[n]{\frac{b^r b^t}{b^s}} = \frac{b^{\frac{r}{n}} b^{\frac{t}{n}}}{b^{\frac{s}{n}}}$.

Wäre nun $b^m = \frac{b^r b^t}{b^s}$ so wäre $b^m = b^{r+t-s}$, folglich müste $m = r + t + s$ seyn. Es ist aber auch $\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{\frac{b^r b^t}{b^s}} = \sqrt[n]{b^{r+t-s}}$, folglich $\sqrt[n]{b^m} = b^{\frac{r+t-s}{n}}$ oder $b^{\frac{m}{n}} = b^{\frac{r+t-s}{n}}$, folglich $\frac{m}{n} = \frac{r+t-s}{n} = \frac{r}{n} + \frac{t}{n} - \frac{s}{n}$.

Der gebrochne Exponent $\frac{m}{n}$ entsteht aber hier eben so aus den Brüchen $\frac{r}{n}, \frac{t}{n}, \frac{s}{n}$, wie der Exponent m aus

m aus den ganzen Exponenten m, t und $-s$, und so wie in dem Ausdruck $b^m = b^r b^t$ die Größe $\frac{b^m}{b^s}$ die vierte Prooortionalgröße zu b^s, b^r und b^t ist, so ist auch $b^{\frac{m}{n}}$ die vierte Proporzionalgröße zu $b^{\frac{s}{n}}$, $b^{\frac{r}{n}}$ und $b^{\frac{t}{n}}$, wenn $m = r + s - t$ seyn muß.

Die Regeln also, welche angegeben worden (§. 119.), um Größen, die ganze Exponenten haben, in einander zu multipliciren, oder die eine durch die andere zu dividiren, lassen sich auch auf alle Größen anwenden, welche gebrochne Zahlen zu Exponenten haben.

§. 145.

Die Größe a mag also bedeuten was sie will, so ist a^{2m} das Quadrat, a^{3m} der Cubus, a^{4m} die vierte Dignität überhaupt, a^{nm} die $n$te Dignität von a^n, die Zahl m mag eine ganze oder gebrochne, eine positive oder negative Zahl seyn, wenn nur n eine ganze Zahl ist. Es ist also allezeit

$a^0 - - - a^m - - - a^{2m} - - - a^{3m} - - - a^{4m}$ ꝛc.

eine geometrische Proceßion, in der a^0 die Einheit bedeutet, und von der bis an das Glied a^{nm} so viel Glieder sind, als in n Einheiten vorkommen, das zweyte Glied derselben aber allezeit $a^{\frac{m}{n}}$ ist.

§. 146.

Wenn man also unter a diese Größe $\sqrt{b}$ versteht, welche einerley mit der Größe $b^{\frac{1}{2}}$ ist, so wird

$$(\sqrt{b})^2 = b^{\frac{2}{2}} = b$$

$$(\sqrt{b})^3 = b^{\frac{1}{2} \times 3} = b^{\frac{3}{2}} = b\sqrt{b}$$

$(\sqrt{b})^4$

$$(\sqrt{b})^4 = b^{\frac{1}{2}\times 4} = b^{\frac{4}{2}} = b^2$$
$$(\sqrt{b})^5 = b^{\frac{1}{2}\times 5} = b^{\frac{5}{2}} = b^2\sqrt{b}$$
$$(\sqrt{b})^m = b^{\frac{1}{2}\times m} = b^{\frac{m}{2}} = \sqrt{b^m}$$

Eben so ist

$$(\sqrt{(-b)})^2 = (-b)^{\frac{1}{2}\times 2} = -b$$

oder $\sqrt{-b}\times\sqrt{-b} = -b$

$$(\sqrt{-b})^3 = (-b)^{\frac{1}{2}\times 3} = -b\sqrt{-b}$$

und so in allen andern Fällen. Denn da überhaupt $\sqrt[n]{-b^m} = (-b^m)^{\frac{1}{n}}$ so wird $(\sqrt[n]{-b^m})^p = (-b^m)^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{(-b^m)^p}$. Wenn nun $p=n$ so wird $\left(\sqrt[n]{(-b^m)}\right)^n = -b^m$ was auch m und n vor Zahlen bedeuten mögen.

§. 148.

Also ist $(a+2b-c)^{2m}$ das Quadrat der Größe $(a+2b-c)$ nachdem sie vorher zu der Dignität m erhoben worden. Ferner

$(a+2b-c)^{3m}$
$(a+2b-c)^{4m}$
$(a+2b-c)^{5m}$ u. s. w.

die dritte, vierte, fünfte ꝛc. Dignität der Größe $(a+2b-c)$ nachdem sie vorher auf die Dignität m erhoben worden, es mag m eine Zahl bedeuten, was er auch vor eine seyn mag.

Eben so bedeutet $\left(\frac{a+5bc-d^2}{c^2+d^2}\right)^{5m}$ daß die Größe $\frac{a+5bc-d^2}{c^2+d^2}$ nachdem sie vorher auf die

Digni-

Dignität m erhoben werden, aufs neue auf die fünfte Dignität erhoben, oder viermal durch sich selber multiplicirt werden soll.

§. 149.

Wenn man also $\sqrt[3]{a^2}$ mit $\sqrt[4]{a^3}$ multipliciren soll, so thut man am besten, wenn man die Wurzel-Zeichen durch gebrochne Exponenten wegschaft. Alsdenn ist in diesem Falle $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{3}{4}}$ da man nun die Multiplication der Größen, welche gebrochene Exponenten bey sich haben, dadurch verrichtet, daß man die Exponenten addirt, so wird $a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}$ Den Exponenten kann man nun nach den hinlänglich bekannten Regeln auf einerley Nenner bringen; alsdenn wird aber $a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{17}{12}}$ und wenn man diese Größe nach (§. 142.) abkürzt, so wird

$$a^{\frac{17}{12}} = a^{\frac{12}{12}} \times a^{\frac{5}{12}} \text{ oder } a^{\frac{17}{12}} = a\sqrt[12]{a^5}$$

folglich ist auch $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[4]{a^3} = a\sqrt[12]{a^5}$

Eben so ist überhaupt $\sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[r]{a^t} = a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{t}{r}} =$ $a^{\frac{m}{n}+\frac{t}{r}}$ und wenn man die Brüche auf einerley Nenner bringt $a^{\frac{m}{n}+\frac{t}{r}} = a^{\frac{mr+tn}{rn}}$. Folglich ist dieser Ausdruck einerley mit $\sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[r]{a^t}$, oder es ist $\sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[r]{a^t} = \sqrt[rn]{a^{mr+tn}}$. (§. 143.) Hieraus läßt sich auch folgende Aufgabe leicht auflösen.

Aufga-

Aufgabe.

§. 194.

Zwey Wurzel-Größen von verschiedenen Ordnungen, auf einerley Ordnung zu bringen.

Vorbereitung.

§. 150.

Die beyde Wurzel-Größen sollen $\sqrt[n]{a^m}$ und $\sqrt[r]{c^s}$ seyn, indem man unter a und c was man will vor Größen, unter die Zahlen s, r, m, n aber auch allerhand willkührliche Zahlen versteht. Weil nun diese beyde Größen auf einerley Ordnung gebracht werden sollen, so heist dieses, daß man eine jede in eine andre verwandeln soll, diese so beschaffen ist, daß der Exponent über dem Wurzel-Zeichen der einen, eben so groß ist als der Exponent über dem Wurzel-Zeichen der andern.

Nun ist aber $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ und $\sqrt[r]{c^s} = c^{\frac{s}{r}}$. Man bringe nun die Exponenten dieser beyden Grösen auf einerley Nenner, welches geschieht indem man den Zehler und Nenner des Exponenten $\frac{m}{n}$ mit r, und den Zehler und Nenner des Exponenten $\frac{s}{r}$ mit n multiplicirt. Alsdenn ist aber $a^{\frac{m}{r}} = a^{\frac{mr}{nr}}$ und $c^{\frac{s}{r}} = c^{\frac{ns}{nr}}$. Bedienet man sich nun wieder des Wurzel-Zeichens, so wird $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[nr]{a^{mr}}$ und $c^{\frac{s}{r}} = \sqrt[nr]{c^{ns}}$. Diese beyde Wurzel-Größen sind aber allerdings von einerley Ordnung.

Auflö-

Auflösung.

§. 151.

Die Regel die man also zu beobachten hat, um diese Aufgabe aufzulösen, bestehet darin: man multiplicirt die beyde Exponenten m und n der gegebenen Größe $\sqrt[n]{a^m}$ mit den Exponent r, welcher über den Wurzel-Zeichen der andern gegebenen Größe $\sqrt[r]{c^s}$ stehet, und hinwiederum die beyden Exponenten r und s dieser Größe mit dem Exponent n, welcher über das Wurzel-Zeichen der ersten Größe stehet: alsdenn werden die Größen $\sqrt[nr]{a^{mr}}$ und $\sqrt[nr]{c^{ns}}$ von einerley Ordnung seyn.

Anmerkung.

§. 152.

Auf diese Art werden auch diese beyde Größen $\frac{\sqrt[n]{a^m b^r}}{c^s}$ und $\frac{\sqrt[p]{d^q f^m}}{g^t}$ auf einerley Ordnung gebracht, indem man alle Exponenten in der ersten Größe mit p und in der zweyten mit n multiplicirt, und es ist

$$\frac{\sqrt[n]{a^m b^r}}{c^s} = \frac{\sqrt[pn]{a^{mp} b^{rp}}}{c^{ps}}$$

$$\frac{\sqrt[p]{d^q f^m}}{g^t} = \frac{\sqrt[pn]{d^{qn} f^{mn}}}{g^{nt}}$$

Dieses gilt auch bey zusammen gesetzten Größen, wenn nemlich

$\sqrt{(ab$

$$\sqrt[n]{\frac{(ab+2d^2)^m (2a^2b^3+c^3)^q}{(ab+c)^s}}$$

und $\sqrt[p]{\frac{(3c+f)^q (24a^2-b^2c)^r}{a^t}}$

auf einerley Ordnung gebracht werden sollen, so verwandelt sich die erste in

$$\sqrt[np]{\frac{(ab+2d^2)^{mp} (2a^2b^3+c^3)^{pq}}{(ab+c)^{sp}}}$$

und die zweite in $\sqrt[pn]{\frac{(3c+f)^{nq} (24a^2-b^2c)^{rn}}{a^{tn}}}$

Auf eine ähnliche Art verfährt man in andern vorkommenden Fällen.

§. 153.

Diese Aufgabe dienet dazu, wenn man Wurzelzeichen mit einander multipliciren oder dividiren will, ohne sich der gebrochnen Exponenten zu bedienen. Man bringt nemlich dieselben auf einerley Ordnung, und multiplicirt die Größen, welche unter den Wurzelzeichen stehen, in einander, oder dividirt die eine durch die andre, welches folgende Exempel zeigen sollen.

Exempel.

Wenn $\sqrt{a^3 x^5}$ durch $\sqrt[3]{a x^7}$ multiplicirt werden soll, so ist $\sqrt{a^3 x^5} = \sqrt[6]{a^9 x^{15}}$ und $\sqrt[3]{a x^7} = \sqrt[6]{a^2 x^{14}}$, folglich ist $\sqrt{a^3 x^5} \times \sqrt[3]{a x^7} = \sqrt[6]{a^9 x^{15}} \times \sqrt[6]{a^2 x^{14}} = \sqrt[6]{a^{11} x^{29}}$, dieser Werth kann abgekürzt werden, und es ist $\sqrt[6]{a^{11} x^{29}} = x^4 a \sqrt[6]{a^5 x^5}$. Diesen letztern Aus-

Ausdruck könnte man noch anders abkürzen, wenn man sich erinnert, daß eine Größe nicht verändert wird, wenn man dieselbe mit einer gewissen Grösse multiplicirt, und wider das entstandene Product, durch eben diese Größe, dividirt; also ist in den vorigen Ausdruck $ax^4\sqrt[6]{a^5x^5} = ax^4\sqrt[6]{\frac{a^6x^6}{ax}}$;

folglich wird hieraus $ax^4\sqrt[6]{a^5x^5} = \frac{a^2x^5}{\sqrt[6]{ax}}$,

welches also das Product aus $\sqrt{a^3x^5}$ in $\sqrt[3]{a^2x^7}$ ist. Gleichergestalt ist $\sqrt{ax} \times \sqrt[4]{ax} = \sqrt[8]{a^4} \times \sqrt[8]{a^2x^2} = \sqrt[8]{a^6x^2}$. Diese drey Exponenten lassen sich durch 2 dividiren, folglich wird $\sqrt[8]{a^6x^2} = a^{\frac{6}{8}}x^{\frac{2}{8}} = a^{\frac{3}{4}}x^{\frac{1}{4}} = \frac{a^{\frac{4}{4}}x^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}} = a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}$. So kan man allezeit verfahren, wenn sich der Exponent über dem Wurzelzeichen, und die Exponenten unter dem Wurzelzeichen, durch eine gewisse Zahl, dividiren lassen.

Eben so ist $\sqrt[5]{\frac{a^3x}{b^2}} \times \sqrt[3]{\frac{a^2bx^2}{c}} = \sqrt[15]{\frac{a^9x^3}{b^6}} \times \sqrt[15]{\frac{a^{10}b^5}{c^5}x^{10}} = \sqrt[15]{\frac{a^{19}b^5x^{13}}{b^6c^5}} = a\sqrt[15]{\frac{a^4x^{13}}{bc^5}} = ax\sqrt[15]{\frac{a^4}{bc^5x^2}}$ und so ferner.

$\sqrt{9a} \times \sqrt[3]{81a^2x^2} = \sqrt[6]{9^3a^3} \times \sqrt[6]{81^2a^4}$

$a^4 x^4 = \sqrt[6]{9^3 81^2 a^7 x^4}$; da nun $81 = 9^2$, so wird eben dieser Ausdruck $\sqrt[6]{9^3 9^4 a^7 x^4} = \sqrt[6]{9^7 a^7 x^4} = 9a\sqrt[6]{9ax^4}$.

Eben so ist $\sqrt{-a} \times \sqrt[3]{-a} = \sqrt[6]{(-a)^3} \times \sqrt[6]{(-a)^2} = \sqrt[6]{(-a)^5} = \sqrt[6]{\frac{(-a)^6}{-a}} = -a\sqrt[6]{\frac{1}{-a}} = -a\sqrt[6]{(-\frac{1}{a})}$ und was dergleichen Fälle mehr sind.

§. 154.

Nachdem die wahre Bedeutung algebraischer Grössen angezeigt worden, so ist es leicht die algebraische Addition und Subtraction mit diesen Grössen vorzunehmen, und man muß dabey die Regeln in acht nehmen, welche (§. 44.) gegeben worden. Diejenige Größen, welche man zusammen addiren, oder von einander subtrahiren will, müssen aber sowohl in Ansehung der Buchstaben, als auch der Exponenten dieser Buchstaben, vollkommen einerley seyn. Einige Exempel werden dieses in völliges Licht setzen.

Additions-Exempel.

1.

$$\begin{array}{r} 3ab + 5ac - 6ed \\ 7ab - 2a^2c - 4cd \\ \hline 10ab + 3a^2c - 10cd. \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{r} 4a^3b^2c - 6cd + 3b^2c^3f \\ 13a^3b^2c + 6cd^3 + 2b^2c^3f \\ \hline 17a^3b^2c + 5b^2c^3f. \end{array}$$

3.

$$a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{2}} c + 25\, d^3 c^{\frac{3}{7}} f - 16\, a^3 b^2 g^{\frac{1}{4}}$$
$$- 10\, a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{2}} c + 3\, d^3 c^{\frac{3}{7}} f + 12\, a^3 b^2 g^{\frac{1}{4}}$$
$$- 9\, a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{2}} c + 28\, d^3 c^{\frac{3}{7}} f - 4\, a^3 b^2 g^{\frac{1}{4}}$$

4.

$$2\, a^2 \sqrt{bc} + 7 \sqrt[3]{b^2 cd} - 3\, c^3 \sqrt[4]{bg}$$
$$4\, a^2 \sqrt{bc} - 9 \sqrt[3]{b^2 cd} + 2\, c^3 \sqrt[4]{bg}$$
$$6\, a^2 \sqrt{bc} - 2 \sqrt[3]{b^2 cd} - c^3 \sqrt[4]{bg}.$$

Subtractions-Exempel.

1.

$$12\, a^2 b - 16\, cd\, e + 22\, c\, a^2 b$$
Subtr. $$11\, a^2 b + 12\, c\, d^3 e + 20\, c\, a^2 b$$
Differ. $$a^2 b - 28\, c\, d^3 e + 2\, c\, a^2 b.$$

2.

$$16\, a \sqrt[3]{b^2 c} - 50 \sqrt[5]{b} + 23\, b^2 \sqrt[3]{cd}$$
Subtr. $$21\, a \sqrt[3]{b^2 c} - 40 \sqrt[5]{b} - 2\, b^2 \sqrt[5]{cd}$$
Differ. $$-5\, a \sqrt[3]{b^2 c} - 10 \sqrt[5]{b} + 25\, b^2 \sqrt[5]{cd}.$$

3.

$$18\, a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{2}} c + \frac{2\, b^{\frac{3}{7}} c}{f^2} - 25\, c^{\frac{5}{4}} \sqrt[4]{7 a^3 b}$$
Subtr. $$12\, a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{2}} c + \frac{6\, b^{\frac{3}{7}} c}{f^2} - 20 c^{\frac{5}{4}} \sqrt[4]{7 a^3 b}$$
Differ. $$6\, a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{2}} c - \frac{4\, b^{\frac{3}{7}} c}{f^2} - 5\, c^{\frac{5}{4}} \sqrt[4]{7 a^3 b}.$$

§. 155.

§. 155.

Es ist hierbey nicht die geringste Schwürigkeit, wenn man sich das vorhergehende gut bekannt gemacht hat. Die Multiplication und Division der Größen, welche sehr zusammen gesetzt sind, läst sich nunmehro, durch Hülfe der vorigen Sätze, leicht bewerkstelligen.

Lehrsatz.

§. 156.

Wenn die Größe $a+b-c$ durch $+d$ multiplicirt werden soll, ist das Product $ad+bd-cd$: wird dieselbe aber durch $-d$ multiplicirt, so ist das Product $-ad-bd+cd$.

Beweis.

§. 157.

Denn es ist $1:+d = +a:+ad$

$1:+d = +b:+bd$

$1:+d = -c:-cd.$

nach dem wahren Begrif der Multiplication (§. 79.). Da nun diese Verhältnisse alle einander gleich sind, so ist auch $1:+d = a+b-c:ad+bd-cd.$ (Eucl. 5. 12.) Eben so beweist man auch, daß

$1:-d = a+b-c:-ad-bd+cd$

ist; dahero dieser Lehrsatz seine Richtigkeit hat.

Zusätze.

§. 158.

Wenn man also eine zusammen gesetzte Größe durch eine einfache multipliciren soll, so muß man ein jedes Glied, oder einen jeden Theil der zusammen gesetzten Größe, durch die einfache Größe multipliciren.

§. 159.

Hieraus ist nunmehro leicht zu begreifen, wie man eine zusammen gesetzte Größe $a+b-c$ durch eine andere zusammen gesetzte $d+e-f$ multipliciren muß. Denn, alsdenn muß nach dem Begrif der multiplication (§. 44.)

$$1 : d+e-f = a+b-c : x$$

seyn, wenn man unter x das Product versteht. Nun ist aber nach den Begrif der Multiplication

$$1 : d+e-f = a : ad+ae-af$$
$$1 : d+e-f = b : bd+ed-fd$$
$$1 : d+e-f = -c : -cd-ec+fc.$$

Folglich ist auch $1 : d+e-f = a+b-c : ad+ae-af+bd+be-fb-cd-ec+fc.$ Das vierte Glied dieser Proportion ist demnach das richtige Product. Dieses kann man leicht auf alle übrige Größen ausdehnen, sie mögen noch so zusammen gesetzt und ihre einzelne Theile beschaffen seyn, wie sie wollen.

§. 160.

Die Regel, eine zusammen gesetzte Größe, durch eine andere gleichfalls zusammen gesetzte Größe, zu multipliciren, ist also diese:

Man multipliciret jeden Theil der einen Größe, durch einen jeden Theil der andern Größe.

Bey dieser Operation muß man indessen alle die Regeln, welche in Ansehung der Zeichen, welche die Glieder vor sich haben (§. 83. ꝛc.), gegeben werden, und die übrigen, welche in den nachfolgenden Sphen, in Ansehung der Exponenten und Wurzelzeichen, welche sich in den einzelnen Gliedern der Größen

Größen befinden, gegeben worden, auf das genaueste beobachten.

Anmerkung.

§. 161.

Wenn die einzelne Glieder Zahlen oder Coefficienten (§. 112.) vor sich haben, so multiplicirt man diese, nach den bekannten Regeln, in einander, und wenn Wurzelzeichen darinnen vorkommen, so thut man am besten, wenn man dieselbe in gebrochne Exponenten verwandelt. Uebrigens lassen sich auf das gefundene Product auch die Regeln der Addition anwenden, um das Product einfacher und kürzer zu machen. Dieses muß man allemal beobachten, so oft es angehen will: denn je einfacher eine Größe ist, desto leichter ist sie zu übersehen, und desto geschwinder kan man den Zusammenhang der Theile derselben entdecken. Einige Beyspiele werden dieses am besten erklären.

1. Exempel.

$$\begin{array}{l} 2a+3b-6c+d \\ \quad a-2b+c \\ \hline 2aa+3ab-6ac+ad \\ \quad -4ab-6bb+12bc-2bd \\ \quad\quad +2ac+3bc-6cc+cd \\ \hline 2a^2-ab-4ac-6bb+ad+15bc-2bd \\ \quad\quad\quad -6cc+cd. \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{l} 2ab-3ac+15bc \\ \quad a-2bc+4dfg \\ \hline 2a^2b-3a^2c+15abc-4ab^2c+6abc^2- \\ 30b^2c^2+8abdfg-12acdfg+60bcdfg. \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{r} a^2 + ab + b^2 \\ a - b \\ \hline a^3 + a^2b + ab^2 \\ - a^2b - ab^2 - b^3 \\ \hline a^3 \quad --- \quad b^3 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{r} 2a^3b - 6c^4d \\ 3a^3bc - 5b^2a \\ \hline 6a^3b^2c - 18a^3bc^5d \\ - 10b^3a^4 + 30ab^2c^4d. \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{r} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}} c + 12 a^{\frac{1}{4}} b d^2 \\ a b^2 - c^{\frac{2}{3}} \\ \hline a^{\frac{2}{3}+1} b^{2+\frac{1}{2}} c + 12 a^{1+\frac{1}{4}} b^3 d^2 \\ - a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}} c^{1+\frac{2}{3}} - 12 a^{\frac{1}{4}} b c^{\frac{2}{3}} d^2. \end{array}$$

In einem solchem Producte, muß man vor allen Dingen die gebrochene Exponenten, einer jeden Größe, auf einerley Nenner zu bringen suchen. In diesem Exempel würde alsdenn das Product

$a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{5}{2}} c + 12 a^{\frac{5}{4}} b^3 d^2 - a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{5}{3}} - 12 a^{\frac{1}{4}} b c^{\frac{2}{3}} d^2$ seyn.

6.

$$\begin{array}{r} a^m + b^{m-t} c^{-r} - 4 a^{p-q} c^f d^b \\ 3 a^n b^{-r} - 7 c^{2g} d^f \\ \hline 3 a^{m+n} b^{-t} + 3 a^m b^{m-t-r} c^{-r} - 12 a^{p+n-q} \\ b^{-r} c^f d^b - 7 a^m c^{2g} d^f - 7 b^{m-t} c^{2g-r} d^f \\ + 28 a^{p-q} c^{2g+f} d^{f+b}. \end{array}$$

7.

7.

$$\begin{array}{l} \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} \\ \hline \sqrt{aa} + \sqrt{ab} \\ \quad - \sqrt{ab} - \sqrt{bb} \\ \hline \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}. \end{array}$$

In dergleichen Fällen muß man das in Ausübung bringen, was (§. 142.) gesagt worden: denn da $\sqrt{a^2} = a$ und $\sqrt{b^2} = b$, so wird eben das vorige Product $a - b$.

8.

$$\begin{array}{l} a + \sqrt{(-bb)} \\ a - \sqrt{(-bb)} \\ \hline aa + a\sqrt{(-bb)} - \\ \quad - a\sqrt{(-bb)} - (-bb)^2 \\ \hline aa - \sqrt{(-bb)^2}. \end{array}$$

Da nun $\sqrt{(-bb)^2} = -bb$, (§. 147.) so wird das Product $aa - (-bb)$ oder $aa + bb$.

9.

$$\begin{array}{l} a\sqrt[3]{bc} - 2ab\sqrt[3]{d} \\ 5\sqrt[3]{bc} + 2ab\sqrt[3]{d} \\ \hline 5a\sqrt[3]{b^2c^2} - 10ab\sqrt[3]{bcd} \\ + 2a^2b\sqrt[3]{bcd} - 4a^2b^2\sqrt[3]{d^2}. \end{array}$$

Und so wird es in allen Fällen gehalten. Bey der Multiplication, mit Wurzelzeichen, muß man besonders die (§. 150. ꝛc.) gegebene Regel in acht nehmen.

§. 162.

Wenn einige von den Theilen einer zusammen gesetzten Größe algebraische Brüche sind, so beobach-

tet man bey der Multiplication derselben eben diese Regeln.

1. Exempel.

$$\frac{ab}{c} + \frac{2df}{3g}$$

$$ad - \frac{3b^2c}{e}$$

$$\frac{a^2bd}{c} + \frac{2ad^2f}{3g} - 3ab^3 - \frac{2b^2cdf}{eg}$$

2. Exempel.

$$\frac{a^2\sqrt{b}}{c} - \frac{d^3\sqrt[3]{f^2}}{3\sqrt{b}}$$

$$\frac{a^2\sqrt{b}}{c} + \frac{d^3\sqrt[3]{f^2}}{3\sqrt{b}}$$

$$\frac{a^4b}{c^2} - \frac{a^2d\sqrt[3]{f^2}\times\sqrt{b}}{3c\sqrt{b}} + \frac{a^2d^3\sqrt[3]{f^2}\times\sqrt{b}}{3c\sqrt{b}} - \frac{d^6\sqrt[3]{f^4}}{9\sqrt{b^2}}$$

$$\frac{a^4b}{c^2} \cdots\cdots 0 - \frac{d^6f\sqrt[3]{f}}{9b}$$

§. 163.

Und wenn man algebraische Brüche in einander multipliciren soll, deren Zähler und Nenner zusammengesetzte Größen sind, so beobachtet man die Regel, die bey der Multiplication der Brüche statt findet, wenn sie in Zahlen gegeben werden. Man multiplicirt nemlich nach den vorhergehenden Regeln Zehler und Nenner in einander, so ist

Exem-

Exempel 1.

$$\frac{(a^2b+bc)}{a+b} \times \frac{(cd+f)}{a-b} = \frac{a^2bcd+bc^2d+a^2bf+bcf}{a^2-b^2}$$

Exempel 2.

$\frac{(a^3\sqrt{b}+\sqrt{bc})}{a^2-\sqrt{c}} \times \frac{cd\sqrt{d}-bc^2}{b+2\sqrt{d}}$ giebt zum Product $\frac{a^3cd\sqrt{bd}-a^3bc^2\sqrt{b}+bc^2d\sqrt{d}-b^2c^3}{a^2b+2a^2\sqrt{d}-2\sqrt{cd}-b\sqrt{c}}$

Exempel 3.

$$\frac{a^4b^{-2}+c\sqrt{ba^{-4}}-3fg^2}{a\sqrt{b}-5cd} \times \frac{3a^2c^{\frac{2}{3}}+5bd^{\frac{1}{2}}}{a-b^2}$$

giebt zum Product diese Größe

$$\frac{3a^6b^{-2}c^{\frac{2}{3}}+3a^2c^{1+\frac{2}{3}}\sqrt{bd^{-4}}-9a^2fg^2c^{\frac{2}{3}}+5a^4b^{-1}d^{\frac{1}{2}}+5bc\sqrt{bd^{-3}}-15bd^{\frac{1}{2}}fg^2}{a^2\sqrt{b}-5acd-ab^2\sqrt{b}+5b^2cd}$$

Diese Beyspiele zeigen leicht, wie man in andern Fällen verfahren muß.

§. 164.

Wenn man eine Größe etliche mahl durch sich selber multiplicirt, so kann man die verschiedene Dignitäten derselben entwickeln, und man wird alsdenn finden, daß

$(a+b)^2 = aa+2ab+b^2$
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

und so weiter. Eben so ist

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a+b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4$
$- b^5$ und so weiter.

§. 165.

Es ist aber nicht allezeit nöthig, daß man die Größen wirklich durch die Multiplication aus einander wickelt; man darf dieses nur zuweilen durch das Multiplicationszeichen anzeigen. Als um $a^2+2ab-c$ durch c^3+d zu multipliciren, darf man nur das Product so schreiben $(a^2+2ab-a) \times (c^3+d)$ wie schon (§. 76.) gezeigt worden.

§. 166.

Hieraus folgt aber auch umgekehrt, wie man eine zusammengesetzte Größe, welche das Product aus zweyen oder mehrern andern ist, in diese Factores auflösen kann. Auf diese Art kann man $(a+b) \times (a-b)$ vor a^2-b^2 schreiben, denn man weiß, daß die Größe a^2-b^2 durch die Multiplication der beyden Größen $a+b$, $a-b$ hervor gebracht wird. Eben so, da a^3-b^3 entsteht, wenn man $aa+ab+b^2$ durch $a-b$ multiplicirt, so kann man vor a^3-b^3 die Größe $(aa+ab+b^2) \times (a-b)$ schreiben.

Also kan man $(a^2+b^2)(a+b)$ vor die Größe $a^3+a^2b+ab^2+b^3$ schreiben, weil diese letztere durch die Multiplication der erstern beyden entsteht.

Auf eben die Art wird die Größe $\frac{12abc+16c^2d+3abf+4cdf}{a^2-4b^2}$ auch durch $\left(\frac{3ab+4cd}{a+2b}\right)\left(\frac{4c+f}{a-2b}\right)$ oder

oder durch $\frac{(3ab+4cd)(4c+f)}{(a-2b)(a-2b)}$ vorgestellt werden können, denn wenn man diese letztere Factores in einander multiplicirt, so kommt erste Größe richtig heraus.

§. 167.

Dergleichen Veränderungen mit den Größen vorzunehmen, ist zuweilen sehr vortheilhaft. Es ist aber nicht so leicht als man wohl denkt, ja zuweilen ist es gar nicht möglich. Wenn man die Factores einer jeden Größe bestimmen könnte, so wäre die Auflösungskunst auf den höchsten Gipfel der Vollkommenheit gebracht. Es ist aber alle angewandte Mühe der größten Analysten bishero vergeblich gewesen, und es ist vielleicht wegen den eingeschränkten menschlichen Verstande in diesem Stücke niemals etwas vollkommenes zu erwarten. Man muß sich dahero in diesem Stücke, in den meisten Fällen durch sein eigenes Genie und durch die, durch viele Uebung erlangte Kunstgriffe, zu helfen suchen. In dieser Absicht ist es gut, wenn man jedes Produkt nach einen gewissen Buchstaben, oder nach den Dignitäten eines gewissen Buchstabens ordnet, in dem man die größten vorangehen, und die andern darauf in absteigender Ordnung folgen läßt. Z. E. um die Factores des Produkts $a^2b+b^3+a^3+ab^2$ zu entdecken, schreibe man diese Größe so

$$a^3+a^2b+ab^2+b^3$$

und nehme immer zwey und zwey Theile, denn so ist $a^3+a^2b=(a+b)a^2$ und $ab^2+b^3=(a+b)b^2$ Nun ist leicht zu sehen daß

$$(a+b)a^2+(a+b)b^2=(a+b)(a^2+b^2)$$

So

So kann man sich in vielen Fällen durch eine geschickte Ordnung der Theile einer gewissen Größe helfen, und zu seinem Zweck gelangen.

§. 168.

Wenn man eine gewisse Größe durch eine andre dividiren soll, so macht man einen Strich unter die zu dividirende Größe, und setzt unter denselben den Divisor; alsdenn zeigt die auf diese Art geschriebene Größe den Quotienten an. Also bedeutet $\frac{a^2 - b^2}{a + b}$ den Quotienten, welcher entstehet, wenn $a^2 - b^2$ durch $a + b$ dividiret wird.

Kann man nun den Zähler dieser in Form eines Bruchs geschriebenen Größe in Factores auflösen, davon einer oder verschiedene mit dem Nenner einerley, oder mit einigen Factoren des Nenners einerley sind, so kann ein solcher Quotient oder Bruch einfacher ausgedruckt werden. Also ist in dem vorigem Exempel $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ folglich wird $\frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{(a - b)(a + b}{a + b}$. Da nun überhaupt $\frac{cb}{c} = b$. Es mögen c und b Größen bedeuten was sie vor welche wollen, so wird auch

$$\frac{(a - b)(a + b)}{(a + b)} = a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}.$$

In diesem Exempel war es leicht den Quotienten einfacher auszudrücken. Es giebt aber viele Fälle, wo es nicht so geschwinde angeht. Man ist dahero bemühet gewesen eine Methode ausfündig zu machen, durch die man den in Form eines Bruchs geschrie-

benen

benen Quotienten einfacher, und wenn es möglich ist, in Form einer ganzen Größe ausdrücken kann; folgende Aufgabe enthält dieselbe.

Aufgabe.

§. 169.

Den Quotienten, welcher entsteht, wenn eine gewisse algebraische Größe durch eine andre dividirt wird, so einfach auszudrücken, als es möglich ist.

Vorbereitung.

§. 170.

Es sey A diejenige Größe, welche durch eine andere Größe B dividirt werden soll. Es sey $A = mB + C$, oder die Größe A sey so groß als das Product aus der Größe B in die Größe m und noch dazu die Größe C genommen. Wenn also Q der verlangte Quotient ist, so muß nach dem Begrif der Division $B:1 = mB + C$ (oder A) : Q seyn. Folglich ist $Q = \frac{mB}{B} + \frac{C}{B}$. Es ist aber $\frac{mB}{B} = m$ und also wird $Q = m + \frac{C}{B}$. Was nun mit der Größe $\frac{A}{B}$ vorgenommen worden, kann auch bey der Größe $\frac{C}{B}$ angebracht werden. Gesetzt nemlich, es wäre $C = nB + D$ so würde $\frac{C}{B} = \frac{nB}{B} + \frac{B}{D}$ oder $n + D$ seyn. In diesem Falle wäre demnach $Q = m + n + \frac{D}{B}$. Eben so kann man weiter

gehen,

gehen, und wenn $D = pB + E$ wäre, so würde $Q = m + n + p + \frac{E}{B}$ seyn. Diese Schlüsse lassen sich nun immer weiter fortsetzen, und man siehet leicht ein, daß man entweder auf der letzt auf eine Größe kommen muß, welche entweder qB ist, oder es bleibt eine Größe, welche nicht das Produkt aus B in einer andern Größe ist. Hieraus siehet man aber leicht, daß die Aufgabe folgender maßen aufgelöset werden muß.

Auflösung.

§. 171.

Die Regeln die zu beobachten sind, werden sich am besten durch ein Exempel erklären lassen. Man soll diese Größe

$$\frac{a^3 + 2aac - aab - 3abc + bbc}{a - b}$$

einfacher, und wenn es angeht, in Form einer algebraischen ganzen Größe auszudrücken suchen. In dieser Absicht multiplicire man den Divisor $a - b$ durch eine solche Größe, welche das erste Glied des Dividendi, nemlich a^3 hervorbringt; der Augenschein giebt es, daß a^2 in diesem Falle diejenige Größe ist, welche dieses bewerkstelligt. Wenn nun diese durch den Divisor multiplicirt worden, so subtrahire man das Product $a^3 - a^2b$ von der zu dividirenden Größe, welches geschieht, indem man die Zeichen dieses Products umkehrt, und es also umgekehrt $-a^3 + a^2b$ addirt. Alsdenn aber bleibt diese Größe übrig

$$2a^2c - 3abc + bbc$$

Der

Der Quotient ist also

$$\frac{a^2 + 2a^2c - 3abc + bbc}{a - b}$$

welcher schon etwas einfacher ist als der erstere.

Nun sehe man ferner zu, ob sich eine Größe bestimmen läst, die, wenn sie durch den Divisor $a - b$ multiplicirt wird, ausser verschiedenen andern Gliedern, auch das erste Glied $2a^2c$ hervor bringt. Im gegenwärtigen Falle thut die Größe $+ 2ac$ dieses. Man multiplicire also wieder, wie vorhin, den Divisor $a - b$ durch diese Größe $2ac$, und subtrahire das Produkt $2a^2c - 2abc$, so bleibt $-abc + bbc$ übrig, und der Quotient ist nunmehro

$$\frac{a^2 + 2ac - abc + bbc}{a - b}$$

welcher noch einfacher ist.

Diese übrig gebliebene Grösse $-abc + bbc$, untersuche man weiter, und sehe zu, ob eine Größe gefunden werden kann, welche das erste Glied $-abc$ wieder hervor bringt, wenn sie mit $a - b$ multiplicirt wird. Es gehet hier an, und diese Größe ist $-bc$, und wenn man dieselbe mit $a - b$ multiplicirt und das Product $-abc + bbc$ von der übrig gebliebenen Größe subtrahirt, so bleibt nichts übrig. Es ist also der ganze Quotient $a^2 + 2ac - bc$, und so beschaffen, als ihn die Aufgabe verlangt.

§. 172.

Auf eben diese Art würde man weiter fortgehen müssen, wenn die zu dividirende Größe mehrere Glieder hätte. Um aber dieses Verfahren desto

besser

besser vor Augen zu legen, können folgende Exempel dienen.

1. Exempel.

Divisor. $a - b$	Dividendus. $a^3 - aab + 2aac - 3abc + bbc$	Quotient. $a^2 + 2ac - bc$
Prod. aus dem Divisor im 1ten Theil des Quot.	$a^3 - aab$	
subtrahirt bleibt	$+2aac - 3abc + bbc$	
Prod. aus dem 2ten Theil des Quot. im Div.	$+2aac - 2abc$	
subtrahirt bleibt	$-abc + bbc$	
Prod. aus dem 3ten Theil des Quot. im Div.	$-abc + bbc$	
subtrahirt bleibt	$0 \quad 0$	

2. Exempel.

Divisor.	Dividendus.	Quotient.
$y^2 - 2ay + aa$	$y^4 - 3\frac{1}{2}a^2y^2 + 3a^3y - \frac{1}{2}a^4$	$y^2 + 2ay - \frac{1}{2}aa$
subtrahirt	$y^4 - 2ay^3 + a^2y^2$	
bleibt	$0 + 2ay^3 - 4\frac{1}{2}a^2y^2 + 3a^3y - \frac{1}{2}a^4$	
subtrahirt	$+2ay^3 - 4a^2y^2 + 2a^3y$	
bleibt	$0 - \frac{1}{2}a^2y^2 + a^3y - \frac{1}{2}a^4$	
subtrahirt	$-\frac{1}{2}a^2y^2 + a^3y - \frac{1}{2}a^4$	
bleibt	$0 \quad 0 \quad 0$	

3. Exem-

3. Exempel.

Divisor. $y^2 - aa - cc$	Dividendus. $y^6 + a^2y^4 - a^4y^2 - a^6$ $-2c^2y^4 + c^4y^2 - c^2a^4c^2$ $- a^2c^4$	Quotient. $y^4 + 2a^2y^2 + a^4$ $- c^2y^2 + a^2c^2$
Prod. aus dem Divisor in dem 1. Theil y^4 des Quot.	$y^6 - a^2y^4$ $- c^2y^4$	
Dieses subtrahirt bleibet	$+2a^2y^4 - a^4y^2 - a^6$ $+c^2y^4 + c^4y^2 - 2a^4c^2$ $- a^2c^4$	
Prod. aus dem 2 Theil $+2a^2y^2$ in dem Divisor.	$+2a^2y^4 - 2a^2c^2y^2$ $- 2a^4y^2$	
Dieses subtrahirt bleibet	$-c^2y^4 + a^4y^2 - a^6$ $+2a^2c^2y^2 - 2a^4c^2$ $+ c^4y^2 - a^2c^4$	
Prod. aus dem 3 Theil c^2y^2 des Quot. in dem Divis.	$-c^2y^4 + a^2c^2y^2$ $+c^4y^2$	
Dieses subtrahirt bleibet	$+a^4y^2 - a^6$ $+a^2c^2y^2 - 2a^4c^2$ $- a^2c^4$	
Das Prod. aus $a^4 + a^2c^2$ in dem Divisor subtrah. bleibt	0 0	

4. Exempel.

Divisor.	Dividendus.	Quotient.
$a^2+ab\sqrt{2}+bb$	$a^4 \quad + \quad b^4$	$a^2-ab\sqrt{2}+bb$
subtrahirt	$a^4+a^3b\sqrt{2}+a^2b^2$	
bleibt	$-a^3b\sqrt{2}-a^2b^2+b^4$	
subtrahirt	$-a^3b\sqrt{2}-2a^2b^2-ab^3\sqrt{2}$	
bleibt	$+a^2b^2+ab^3\sqrt{2}+b^4$	
subtrahirt	$a^2b^2+ab^3\sqrt{2}+b^4$	
bleibt	0 0 0	

5. Exempel.

Divisor.	Dividendus.	Quotient.
$a-\sqrt{-b}$	$a^2 \quad + \quad b^2$	$a+\sqrt{-b}$
subtrahirt	$a^2-a\sqrt{-b}$	
bleibt	$a\sqrt{-b}+b^2$	
subtrahirt	$a\sqrt{-b}+b^2$	
bleibt	0 0	

6. Exempel.

Divisor.	Dividendus.	Quotient.
$3a-6$	$6a^4-96$	$2a^3+4a^2+8a+16$
subtrahirt	$6a^4-12a^3$	
bleibt	$12a^3-96$	
subtrahirt	$12a^3-24aa$	
bleibt	$24a^2-96$	
subtrahirt	$24a^2-48a$	
bleibt	$48a-96$	
subtrahirt	$48a-96$	
bleibt	0 0	

§. 173.

§. 173.

Es geschiehet aber selten daß sich eine Größe, durch eine andre, dergestalt dividiren läst, daß nichts übrig bleibt. In diesem Falle zeigt man die Division entweder blos durch das Zeichen an, oder man gehet so weit mit derselben fort, als es angehen will, wie im folgenden Exempel:

Divisor.	Dividendus.	Quotient.
$a - b$	$3a^3 - 6a^2b + ab^2$	$3a^2 - 3ab$
	$3a^3 - 3a^2b$	
	$-3a^2b + ab^2$	
	$-3a^2b + 3ab^2$	
	$-2ab^2$	

In diesem Falle bleibt also die Größe $2ab^2$ übrig, welche man ferner durch $a - b$ dividiren muß. Der Der Quotient bestehet also aus den gefundenen ganzen Theilen $3a^2 - 3ab$ und dem Bruch $\frac{2ab^2}{a-b}$, und ist also $a^2 - 3ab - \frac{2ab^2}{a-b}$.

§. 174.

Beweis.

Daß diese Art zu dividiren seine Richtigkeit hat, erhellet daraus, daß die Größe, welche dividirt worden, allezeit wieder hervor gebracht wird, wenn man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt. Dieses ist aber dem Begrif der Division gemäß (§. 28.).

§. 175.

Anmerkung.

Es ist offenbar, daß man in dem lezten Exempel den Bruch $\frac{2ab^2}{a-b}$ nicht allezeit weglassen kann, wie man in der Division mit blossen Zahlen zu thun pflegt, wenn der Nenner sehr groß ist; in manchen Fällen, wo man nicht auf eine allzu große Genauigkeit sehen darf, kann es ohne sonderliche Fehler geschehen. Als wenn in folgenden Exempel der Buchstabe a, in Absicht auf b, sehr groß ist, so giebt der Bruch $\frac{a^2-b^2+2b^3}{a+b}$ den Quotienten $a-b+\frac{2b^3}{a+b}$.

Da nun a sehr groß, in Absicht auf b ist, so ist der Nenner des Bruchs $\frac{2b^3}{a+b}$ sehr groß, und also der ganze Bruch eine sehr kleine Größe, und man kann demselben, wenn es auf Kleinigkeiten nicht ankomt, allemal weglassen. Gesetzt aber, die Größe a wäre in Ansehung der Größe b sehr klein, so wäre $a+b$ wenig größer als b, und die Größe $\frac{2b^3}{a+b}$ beynahe so groß als $2b^2$. Es würde also in diesem Falle ein sehr großer Fehler begangen werden, wenn man diesen Bruch weglassen wolte.

§. 176.

Wenn man diesen letztern Bruch, auf eben die angegebene Art, weiter dividiren will, so kann dieses auch

auch geschehen; es ist aber offenbahr, daß man alsdenn niemals zu Ende kommen würde, wenn man auch noch so weit fortginge, als

$$a+b \;\Big|\; \begin{array}{l|l} 2b^3 - - - & \frac{2b^3}{a} - \frac{2b^4}{a^2} + \frac{2b^5}{a^3} \\ 2b^3 + \frac{2b^4}{a} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\frac{2b^4}{a^2} - - - \\ -\frac{2b^4}{a} - \frac{2b^5}{a} \\ \hline +\frac{2b^5}{a^2} \\ \frac{2b^5}{a^2} + \frac{2b^6}{a^3} \\ \hline -\frac{2b^6}{a^3} \end{array} \quad \text{u. s. w.}$$

In diesem Falle wäre also der Bruch $\frac{2b^3}{a+b}$ eben dieser Größe $\frac{2b^3}{a} - \frac{2b^4}{a^2} + \frac{2b^5}{a^3} - \frac{2b^5}{a^3(a+b)}$ gleich. Auf diese Art kann man, in vielen Fällen, die Fehler noch kleiner machen, denn es ist offenbahr, daß der Bruch $\frac{2b^3}{a^3(a+b)}$ weit kleiner ist als der Bruch $\frac{2b^3}{a+b}$, wenn also a größer ist als b, so kann man, auf diese Art, mit der Division so lange fortgehen, bis man einen Bruch findet, der so klein ist, daß man ihn weglassen kann.

§. 177.

In dem meisten Fällen kann man gemeiniglich das Gesetz entdecken, nachdem der Quotient forgeht;

also, wenn man 1 durch $1 - a$ dividirt, so ist:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 \text{ &c.}$$

Eben so findet man

$$\frac{aa + xx}{a + x} = a - x + \frac{2x^2}{a} - \frac{2x^3}{a^2} + \frac{2x^4}{a^3} - \frac{2x^5}{a^4} \text{ &c.}$$

In beyden Exempeln läst sich das Gesetz, nachdem diese Reihen fortgehen, leicht entdecken. Denn in dem ersten gehen die Dignitäten des Buchstaben a immerfort und alle Glieder haben das Zeichen $+$. Im zweyten Falle wechseln die Glieder mit dem Zeichen $+$ und $-$ ab, alle Brüche sind mit 2 multiplicirt, und die nach einander folgende Dignitäten von x im Zähler und von a im Nenner. Auf diese Art kann man auch Zahlen-Brüche dividiren, als $\frac{1}{3}$ ist einerley mit $\frac{1}{4-1}$ und ist die Operation um diesem Bruch zu dividiren folgende:

Divisor	Divid.	Quotient.
$4-1$	1	$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \frac{1}{4096}$ &c.
	$1 - \frac{1}{4}$	
	$+ \frac{1}{4}$	
	$+ \frac{1}{4} - \frac{1}{16}$	
	$+ \frac{1}{16}$ - - -	
	$+ \frac{1}{16} - \frac{1}{64}$	
	$0 + \frac{1}{64}$ &c.	

Je weiter man also hier kommt, je mehr nehmen diese Brüche ab, und man kann die letzten sicher weglassen. Gehet man mit dieser Division ins unendliche fort, so kann man jeden Bruch in eine unendliche Reihe (seriem infinitam) verwandeln.

§. 180.

§. 178.

Wenn sich eine Größe, die in Form eines Bruchs geschrieben ist, nicht einfacher ausdrücken läst, indem man den Zähler durch den Nenner dividirt, so muß man zusehen, ob sich nicht beyde durch eine gewisse Größe dividiren lassen. Wenn dieses angeht, so kann die Größe etwas einfacher ausgedrückt werden, wenn man die Buchstaben oder Factores im Zehler und Nenner wegläßt, denn $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$ als in folgender Größe

$$\frac{a^3 + ab^2 - a^2c - b^2c}{2abd - 2bcd + ac - c^2}$$

ist der Zähler das Product aus $a^2 + b^2$ in $a - c$ und der Nenner das Product aus $a - c$ in $2bd + c$ folglich man dieselbe so schreiben

$$\frac{(a^2 + b^2)(a - c)}{(2bd + c)(a - c)}$$

und wenn man den Factor $a - c$ ausstreicht

$$\frac{a^2 + b^2}{2bd + c}$$

Es ist dieses schon §. 168. angemerkt worden. Die Methode aber dergleichen gemeinschaftliche Divisores oder Factores zu entdecken, verdienet eine genauere Untersuchung.

§. 179.

Aufgabe.

Den am meisten zusammengesetzten Divisor zweyer algebraischen Größen zu finden.

Auflösung.

§. 180.

Die gegebene Größen sollen A und B seyn. Gesetzt nun, man wird gewahr, daß sich die Größe A durch a dividiren läst, so kann man versuchen, ob sich die Größe B auch durch die Größe a dividiren läst; gehet es an, so merke man diese Größe, als einen von den Factoren, des am meisten zusammen gesetzten Divisors. Gemeiniglich werden, nach geschehener Division, die Größen A und B einfacher, und man kann auf eben die Art wieder zusehen, ob sich die dadurch entstandene Größen, weiter durch eine Größe dividiren lassen. Gesetzt nemlich, $\frac{A}{a}$ wäre A' und $\frac{B}{a} = B'$. Liesse sich nun A' wieder durch a' dividiren, so würde man wieder versuchen müssen, ob sich auch B' durch a' dividiren liesse. Weun es anginge, und $\frac{A'}{a'}$ wäre $= A''$ und $\frac{B'}{a'} = B''$, so würde man mit den Größen A'', B'' eben wieder so verfahren müssen.

2) Wenn sich aber zwar A durch a, aber nicht die Größe B ebenfals durch a dividiren läst, so dividire man dem ohngeachtet A durch a. Gesetzt nun, $\frac{A}{a}$ wäre $= A'$, so ist offenbar, daß eben der am meisten zusammengesetzte Divisor, welcher bey den Größen A' und B angebracht werden kann, auch der am meisten zusammengesetzte Divisor der Größen A und B ist.

So

So wie man aber mit A umgegangen, so kann man auch mit der Größe B verfahren, wenn sich nemlich B durch b dividiren läst, aber nicht A, und der Quotient $\frac{B}{b}$ ist $= B'$: So haben wieder die Größen A und B' einerley Divisor, wenn nemlich einer statt findet.

Es haben also auch die Größen A', B' und A, B eben den gröſten gemeinschaftl. Divisor. Die Größen A' und B' sind aber gemeiniglich weniger zusammengesetzt, und nicht mehr so verwickelt als A und B. Wenn also diese Größen so zubereitet worden, so läst sich öfters der gemeinschaftliche Divisor leichter entdecken.

3) *So müste man weiter gehen; wenn sich aber nicht so leicht etwas entdecken liesse, so muß man sehen, ob man nicht durch eine geschickte Multiplication zu seiner Absicht gelangen kann.* Wenn sich z. Ex. der Divisor der Größen A' und B' nicht gleich zeigen will, so multiplicire man die erste Grösse mit einer andern Grösse m, durch die sich B' nicht dividiren läst, und die zweyte mit n, durch die sich A' nicht dividiren läst, so haben die Größen m A' und n B' eben den gemeinschaftlichen Divisor, welchen die Größen A und B haben.

4) Will sich der Divisor noch nicht zeigen, die Grössen A und B mögen so zubereitet worden seyn oder nicht, so nehme man diejenige Größe, welche die wenigste Glieder hat, oder die aus den wenigsten Factoren besteht, und multiplicire dieselbe mit einer Größe Q durch die sich A nicht dividiren

läst, subtrahire das Product B × Q von A, so, daß C = A — BQ; so ist C nicht mehr so zusammen gesetzt. Der gröste gemeinschaftliche Divisor der Größen B und C, ist aber alsdenn auch der gröste gemeinschaftliche Divisor der Größen A und B.

5) Kann man den Divisor noch nicht gewahr werden, so verfahre man mit C und B wieder eben so, als mit A und B, und wiederhole dieses so lange, bis man entweder den grösten Divisor findet, oder auf die Einheit kommt.

§. 181.

Beweis.

Gesetzt, die beyden Größen, deren gemeinschaftlichen Divisor man sucht, wären *aabcd* und *acef*, deren gröster Divisor *ac* ist; so ist offenbar, daß, wenn man die erste mit *b* oder *d* multiplicirt oder dividirt, wodurch die zweyte Größe nicht dividirt werden kann, dadurch der Divisor *ac* nicht geändert wird; eben dieses geschiehet auch, wenn man die zweyte Größe mit *ef* dividirt oder multiplicirt.

2) Wenn C = A — BQ, so wird C + BQ = A. Die Größe also, durch welche B dividirt werden kann, dividirt auch die Größe BQ. Wenn sich also auch die Größe C durch dieselbe dividiren läst, so läst sich auch die Größe A dadurch dividiren; und wenn sich zwar B aber nicht C durch diese Größe dividiren läst, so läst sich auch A nicht dadurch dividiren. Hieraus erhellet also, daß die angegebene Methode ihre Richtigkeit hat.

§. 182.

I. Exempel.

Man soll den grösten gemeinschaftlichen Divisor der beyden Größen

$A = 88a^2cd^2 - 28abcd^2 - 156b^2cd^2$

$B = 24a^2bf - 8ab^2f - 42b^3f$

finden. Man wird gleich gewahr, daß sich diese beyde Größen durch 2 dividiren lassen; diese Zahl merke man sich also, als eine von den Factoren des Divisors. Wenn man ferner die erste Größe mit cd^2 und die zweyte mit bf dividirt, so entstehen die Größen

$A' = 44a^2 - 14ab - 78b^2$

$B' = 12a^2 - 4ab - 21b^2$,

welche noch eben den grösten gemeinschaftlichen Divisor haben, welchen die erste beyde Größen haben. Man multiplicire weiter die zweyte Größe mit 3 und subrahire sie von der ersten, so bleibt

$C = 8a^2 - 2ab - 15b^2$

und diese Größe und die Größen B und A haben einerley gemeinschaftlichen Divisor. Um diesen ferner zu entdecken, multiplicire man die Größe B' mit 2, und die Größe C mit 3, so entstehen die Producte

$24a^2 - 8ab - 42b^2$

$24a^2 - 6ab - 45b^2$

subtrahirt man nun die letztere von der ersten, so bleibt $- 2ab + 3b^2$.

und diese Größe und die erstere haben einerley gemeinschaftlichen Divisor, der, wie leicht zu sehen

$2a - 3b$ ist.

2. Exem-

2. Exempel.

Man soll den grösten gemeinschaftlichen Divisor dieser Größen

$A = 72a^5d^2 + 24a^3bcd^2 - 54a^3c^2d^2 - 36abc^3d^2$

$B = 90a^4bc^2 - 40b^3c^4 - 90a^2bc^4 - 60b^2c^5$

finden. Beyde Größen lassen sich erstlich durch 2 dividiren, hernach kann die erste durch ad^2 und die zweyte durch bc^2 dividirt werden, und es entstehen die Größen

$A' = 36a^4 + 12a^2bc - 27c^2a^2 - 18bc^3$

$B' = 45a^4 + 20b^2c^2 - 45a^2c^2 - 30bc^3$

Man dividire ferner die erste mit 3, und die zweyte mit 5, und subtrahire von dem Quotient

$$12a^4 + 4a^2bc - 9c^2a^2 - 6bc^3$$

die Größe

$$9a^4 + 4b^2c^2 - 9a^2c^2 - 6bc^3$$

so bleibt $+3a^4 + 4a^2bc - 4b^2c^2$.

Diese Größe und die ersten beyden haben einerley Divisor. Es ist aber diese letztere das Product aus $3a^2 - 2bc$ in $a^2 + 2bc$, und man muß diese beyde Divisores versuchen. Durch den zweyten läst sich die erste Größe nicht dividiren, wohl aber durch den ersten, und dieser ist also der gemeinschaftliche Divisor.

§. 183.

Anmerkung.

Dieses sind ohngefähr die Grundsätze, auf welche die sogenannte Buchstabenrechnung, (Aritmetica universalis, Algoritmus specioſus, Lagistica specioſa), gebaut ist. Die Bezeichnung der Größen durch Buchstaben

staben, stellt uns den Zusammenhang derselben, in vorkommenden Fällen, aufs deutlichste vor Augen. Man könnte auf diese Art fast alle Lehrsätze der Geometrie ausdrücken, und dadurch dem Gedächtnis ungemein zu Hülfe kommen, besonders wenn es darauf ankommt, dieselbe in Ausübung zu bringen.

§. 184.

So könnte man z. E. den Inhalt einer Kugel durch dergleichen Buchstaben ausdrücken. Man nehme z. E. $\delta : \pi$, die Verhältnis des Diameters zur Peripherie, so wird der Inhalt einer Kugel, wenn d der Diameter derselben ist, durch $\frac{\pi ddd}{6\delta}$ ausgedrückt; sobald nun der Diameter der Kugel bekannt ist, so findet man gleich den Inhalt der Kugel, weil die Verhältnis $\delta : \pi$ beständig gegeben wird und $\delta : \pi = 1 : 3,141592$ ist.

Wäre z. E. der Diameter der Kugel 12 Fuß, so würde der Inhalt $\frac{\pi ddd}{6\delta} = \frac{3,141592 \times 12^3}{6}$.

$= 3,141592 \times 2.144 = 904,77792$ Cubikfuß.

§. 185.

Eben so ist $\frac{\pi dda}{4\delta}$ der Inhalt eines Cylinders, wenn d der Diameter der Base und a die Höhe desselben ist, und der Inhalt eines gleichseitigen Cylinders, $\frac{\pi ddd}{4\delta}$. Dieses sind nichts anders als Sätze der Geometrie, in denen bewiesen wird, daß der Inhalt eines Cylinders entsteht, wenn mann die

Base

Base durch die Höhe multiplicirt, und daß der Inhalt einer Kugel $\frac{2}{3}$ von einem Cylinder ist, dessen Diameter und Höhe, dem Diameter der Kugel gleich sind.

§. 186.

Durch dergleichen Formeln kann man in der Artillerie alle Fragen, in Absicht auf die Vergleichung der Diameter der Kugeln, von einem gewissen Metall, beantworten.

Gesetzt nemlich es sey P das Gewicht einer gewissen Kugel und D ihr Diameter, p das Gewicht einer andern Kugel und d ihr Diameter.

Nun verhalten sich die Gewichte wie die Räume, folglich verhält sich P zu p wie der Inhalt der ersten Kugel zu dem Inhalt der zweiten.

Nun ist $\frac{\pi D^3}{6\delta}$ der Inhalt der ersten und $\frac{\pi d^3}{6\delta}$ der Inhalt der zweiten. Folglich ist $P : p = D^3 : d^3$ und die Gewichte zweyer Kugeln verhalten sich wie die Cubi ihrer Diameter.

Multiplicirt man die äußersten und mittelsten Glieder, so wird $Pd^3 = pD^3$

und $P = \frac{pD^3}{d^3}$

und $D = \frac{Pd^3}{p}$

§. 187.

Gesetzt es wird der Diameter der dreypfündigen Kugel gegeben, man will den Diameter der 12 pfündigen

digen wissen. Man setze also vor P 3 ℔, und vor P 12 ℔, vor d den Diameter der dreypfündigen, so wird D der Diameter der 12 pfündigen. Folglich

$$D^3 = \frac{P d^3}{p}$$

und $$D = d\sqrt[3]{\frac{P}{p}}$$

Diese Formel zeigt gleich die ganze Regel, welche man dabey zu beobachten hat.

Nemlich man dividire das Gewicht der Kugel deren Diameter man sucht, durch das Gewicht der Kugel deren Diameter bekannt ist, und ziehe daraus die Cubicwurzel. Und wenn diese gefunden, so multiplicire man sie mit dem bekannten Diameter.

Als in gegenwärtigen Falle ist $P = 12$ ℔ und $p = 3$ ℔. Folglich wird

$$D = d\sqrt[3]{\tfrac{12}{3}} \text{ oder } D = d\sqrt[3]{4}$$

Nun ist der Diameter der dreyfündigen Kugel beynahe 2,75 Rheinländ. Zoll, folglich wird $D = 2{,}75\sqrt[3]{4}$ Da nun die Cubicwurzel aus 4 beynahe 1,557 ist, so wird $D = 2{,}75 \times 1{,}587$ Rheinländische Zoll $= 4{,}46425$ Rheinl. Zoll.

§. 188.

Diese Formel ist leicht im Gedächtniß zu behalten; und man erleichtert sich dadurch die Arbeit. Wollte man z. E. den Diameter einer viertelpfündigen oder achtlöthigen eisernen Kugel finden, wenn man den Diameter der dreypfündigen weiß, so setze man vor P $\frac{1}{4}$ ℔ und vor p 3 ℔, und vor d den

Diame-

Diameter der dreypfündigen Kugel, so wird der Diameter der viertelpfündigen oder achtlöthigen Kugel, oder $D = 2,75 \sqrt[3]{\frac{1}{3 \times 4}} = 2,75 \sqrt[3]{\frac{1}{12}}$.

Man multiplicire des Bruchs $\frac{1}{12}$ Zehler und Nenner mit $12^2 = 144$ so wird $D = 2,75 \sqrt[3]{\frac{(144)}{12^3}}$

$= \frac{2,75 \sqrt[3]{144}}{12} = \frac{2,75 \sqrt[3]{8.18}}{12} = \frac{2,75 \sqrt[3]{18}}{6}$

Nun ist $\sqrt[3]{18}$ beynahe 2,62 folglich $D = \frac{2,75 \times 2,62}{6}$

oder $D =$ 1,20 Rheinländische Zoll.

Eben so kann man in allen andern Fällen verfahren.

Dritter Abschnitt.

Von den einfachen aritmetischen Aufgaben.

§. 189.

Wenn eine Aufgabe vorgetragen wird, so muß man vor allen Dingen erst genau untersuchen, was man eigentlich haben will, denn so lange man dieses nicht weis, so tappt man im finstern und wird sie niemals auflösen. Nachgehends nimt man die Größen, welche darinnen vorkommen, und betrachtet dieselben auf das genauste, damit man die Eigenschaften entdeckt, welche ihnen wesentlich zukommen. Man untersucht ferner alle die Bedingungen, welche

mit

mit diesen Größen verbunden sind, und macht keinen Unterschied unter die bekannten und unbekannten Größen. Alle diese Bedingungen und alle die Folgen, welche daraus gezogen werden können, drückt man alsdenn durch algebraische Zeichen gehörig aus, und siehet besonders zu, daß man eine oder mehrere geschickte Gleichungen bekomt, die die Basis der ganzen Auflösung sind. Das übrige hängt von eines jeden eignen Genie und von Regeln ab, die in der Folge gezeigt werden sollen.

§. 189.

Aufgabe.

Es sollen sich vier Brüder in eine Erbschaft von 1000 Thaler dergestalt theilen, daß der zweite 100 Thaler weniger bekommt als der älteste, der dritte 75 Thaler mehr als der zweite, und der vierte 60 Thaler mehr als der dritte; Man verlanget zu wissen, wie viel ein jeder bekommt.

§. 190.

Vorbereitung.

Wenn man den Theil wüste, den der erste bekommt, so wäre es leicht zu bestimmen, wie viel ein jeder bekommt. Denn wenn man diesen Unbekannten Theil x nennt; so ist $x - 100$ der Theil des zweiten $x - 100 + 75$ der Theil des dritten, $x - 100 + 75 + 60$ den Theil des vierten. Nun ist offenbar, daß alle diese Theile zusammen genommen so groß seyn müssen, als das ganze Capital 1000 Thl.

§. 191.

Auflösung.

Also ist

$1000 = x + x - 100 + x - 100 + 75 + x - 100 + 75 + 60$

Aus dieser Gleichung muß x bestimmt werden.

Nun ist $x + x + x + x = 4x$

$-100 - 100 - 100 = -300$

$75 + 75 + 60 = 210$

Dieses kann man nun in der Gleichung setzen, und alsdenn dieselbe kürzer so schreiben

$1000 = 4x - 300 + 210$

und weil $-300 + 210 = -90$ ist

so wird $1000 = 4x - 90$

Nachdem man diese Gleichung so weit gebracht hat, muß man x nur allein auf die eine Seite, und alle bekannte Zahlen auf die andre bringen.

Um dieses zu bewerkstelligen folgt man der (§. 62.) gegebenen Regel, man schreibt nemlich die Zahl -90 mit dem umgekehrten Zeichen auf die andre Seite, so wird $1000 + 90 = 4x$

oder $1090 = 4x$

Der Theil des ersten viermahl genommen, ist also so groß als 1090 Thlr. Folglich muß der vierte Theil so gros seyn als x oder $\frac{1090}{4} = x$

und wenn man die Division würklich verrichtet

$272\frac{2}{4}$ Thlr. $= x$

§. 192.

Anmerkung.

Man sieht hieraus wie die erste Gleichnng immer nach und nach abgekürzt worden, indem man die

die bekannten Zahlen und die unbekannten, die sich zusammen addiren oder von einander subtrahiren liessen, würklich addirt oder subtrahirt. Hierauf brachte man alle bekannte Größen auf die eine Seite, und dadurch fand man endlich die Größe 1050, welche der verlangten viermal genommen gleich war, das übrige war leicht einzusehen.

Wenn man nun die Theile der andern Brüder wissen will, so ist der Theil des zweiten $x - 100 = 272\frac{3}{4} - 100$ oder $172\frac{1}{2}$ Thlr. Eben so ist der Theil des dritten $247\frac{1}{2}$ Thlr. und des vierten $307\frac{1}{2}$ Thlr. Und es ist offenbar daß diese Theile so groß sind als 1000 Thl.

§. 193.

Aufgabe.

Zwey Kaufleute haben ein Capital von 1800 Thlr. zusammengelegt. Nach Verlauf von einiger Zeit haben beyde gleichviel gewonnen, und der Gewinnst des ersten ist dreymahl so groß als die Summe die er einlegte, der Gewinnst des zweiten aber 5 mahl so groß als das Geld, welches er eingelegt. Man will wissen, wie viel ein jeder zu der Summe von 1800 Thlr. gegeben.

§. 194.

Vorbereitung.

Wenn x der Theil ist, den der erste eingelegt, so ist $1800 - x$ der Theil den der zweite gegeben. Der Gewinnst des ersten ist also dreymahl so groß als sein eingelegter Theil, folglich ist derselbe $3x$. Der Gewinnst des zweiten aber fünfmahl so groß

als das Geld was er eingelegt, folglich ist derselbe $5 \times 1800 - 5x$. oder wenn man wirklich multiplicirt $9000 - 5x$. Sie haben aber gleich viel gewonnen.

§. 195.

Auflösung.

Also ist $3x = 9000 - 5x$, bringt man nun $5x$ auf die andre Seite, so wird

$$3x + 5x = 9000$$

der $8x = 9000$

und $x = \frac{9000}{8}$

oder $x = 1125$

§. 196.

Anmerkung.

Bey der Aufgabe findet sich übrigens weiter keine Schwierigkeit. Es ist aber offenbar, daß man auf eben die Art die Aufgabe auflösen müste, das Capital, welches die beyde Kaufleute zusammengeleget haben, möchte beschaffen seyn wie es wolte, und der Gewinnst eines jeden möchte auch noch so viel mahl so groß seyn als sein eingelegtes Capital, wenn nur beyde gleich wären. Diese Aufgabe, die hier nur in einem einzigen Fall aufgelöset worden, kann dahero leicht so aufgelöset werden, daß man auf einmal alle mögliche Fälle bestimmt. Denn es kommt dabey nur auf folgendes an.

§. 197.

Aufgabe.

Eine gegebene Zahl a dergestalt in zwey Theile

zu

zu theilen, daß, wenn man den einen Theil mit m und den andern mit n multiplicirt, die beyde Produkte einander gleich sind.

§. 198.

Vorbereitung.

Es sey x der Theil den man durch m multipliciren soll, so ist $a - x$ der andere Theil. Das Produkt aus dem Theil x in die Zahl m ist mx und Produkt aus $a - x$ in die Zahl n ist $na - nx$. Da nun beyde Produkte einander gleich seyn sollen,

§. 199.

Auflösung.

So ist $mx = na - nx$

und wenn man nx auf die andere Seite bringt

$$mx + nx = na.$$

Nun ist aber leicht einzusehen, daß $mx + nx = (m+n)x$, folglich ist auch

$$(m+n)x = na.$$

Da nun gleiche Größen entstehen, wenn man gleiche Größen durch gleiche dividirt, so wird

$$\frac{(m+n)x}{(m+n)} = \frac{na}{m+n}$$

oder nach (§. 168) $x = \frac{na}{m+n}$.

§. 200.

Anmerkung.

Diese Aufgabe schließt die vorige in sich, und ist überhaupt von derselben in nichts unterschieden, als daß sie allgemeiner, und von den Zierathen befreyt ist, welche dabey nichts wesentliches ausmachen. Also wenn

$a = 1800$ und $m = 3$ und $n = 5$ ist, so wird $x = \frac{5.1800}{3+6} = \frac{9000}{8} = 1125$, wie vorhin.

§. 201.

Diese Aufgabe giebt die Auflösung aller möglichen Aufgaben, bey denen es darauf ankommt, eine gewisse Zahl dergestalt zu theilen, wie gesagt worden. So ist folgende Aufgabe beschaffen: Es machen zwey Spieler Moitie, und legen eine gewisse Anzahl Ducaten zusammen, die a ist, mit der Bedingung, daß der erste 6 mal soviel bekommen soll, als sein Einsatz, und der andre 10 mal so viel als das Geld, was er gegeben. Nachdem das Spiel geendigt, haben beyde gleichviel gewonnen. Es fragt sich, wie viel ein jeder gegeben?

Es ist offenbar, daß die vorige Aufgabe mit dieser einerley ist, wenn man die Umstände, als die Spieler den Gewinnst ꝛc. die nichts wesentliches ausmachen, wegnimt. Hieraus siehet man, daß es allemal gut ist, eine jede Aufgabe in ihrer grösten Allgemeinheit aufzulösen; man muß alsdenn, so zu sagen, die ganze Aufgabe, alles ihres äusserlichen Schmucks berauben, und sie in ihrer natürlichen Gestalt betrachten. Dadurch erhält man auch nicht selten noch den Vortheil, daß man alles besser einsieht und leichter zum Zwecke kommt.

§. 202.

Uebrigens hat man bey dieser Aufgabe den Werth der Größe x nicht eher bekommen können, als bis das Product $mx + nx$ in die beyde Factores

zerfält

zerfält worden, aus denen es entstanden. Dieses muß in allen Fällen geschehen, wo es angehen will.

§. 203.

Aufgabe.

Es werden zwey Zahlen a und b gegeben; die erste soll man in zwey Theile dergestalt theilen, daß, wenn man den einen Theil durch m und den andern durch n dividirt, die Quotienten sich eben so gegen einander verhalten, wie sich die Summe der beyden Zahlen zu der Differenz derselben verhält.

§. 204.

Vorbereitung.

Es sey x der Theil der Zahl a, welcher durch m dividirt werden soll, so ist $a - x$ der andre Theil. Der Quotient, welcher entsteht, wenn x durch m dividirt wird, $\frac{x}{m}$, und der andre $\frac{a-x}{n}$.

§. 205.

Auflösung.

Es muß also nach den Bedingungen der Aufgabe

$$\frac{x}{m} : \frac{a-x}{n} = a+b : a-b$$

seyn.

Um die Auflösung dieser Aufgabe weiter fortzusetzen, muß man sich erinnern, daß bey jeder Proportion das Product aus den äussersten Gliedern so groß ist, als das Product aus den mittlern. Hieraus wird

$$\frac{ax-bx}{m} = \frac{a^2-ax+ab-bx}{n}.$$

Aus dieser Gleichung muß nun der Werth von x bestimmt werden, und daher muß man denselben suchen auf die eine Seite allein zu bekommen; da aber beyde Größen durch zwey verschiedene Zahlen dividirt werden, so sieht man wohl, daß man darauf denken muß, dieselben wegzuschaffen. Nun weiß man, daß, wenn man zwey gleiche Größen durch eine andre Zahl multiplicirt, die Producte einander gleich seyn werden. Man weiß ferner, daß eine Größe nicht verändert wird, wenn man dieselbe mit einerley Zahl multiplicirt und hernach wieder dividirt. Durch Hülfe dieser beyden richtigen Sätze, läst sich also der Divisor m und n wegbringen. Man multiplicire erstlich die ganze Gleichung mit m, so wird

$$\frac{(ax-bx)m}{m} = \frac{a^2m-amx+abm-bmx}{n},$$

oder

$$ax-bx = \frac{a^2m-amx+abm-bmx}{n}.$$

Nun multiplicire man durch n, so wird

$$anx-bnx = \frac{(a^2m-amx+abm-bmx)n}{n},$$

oder

$$anx-bnx = a^2m-amx+abm-bmx.$$

Auf diese Art hat man die Gleichung so weit gebracht, daß man die Regeln dabey anbringen kann, welche bey den vorigen Aufgaben statt fanden. Man bringt nemlich alle die Glieder, in denen sich x befindet, auf einer Seite, so wird

$$anx-bnx+amx+bmx = a^2m+abm,$$

und löset das Product, auf der einen Seite, in seine Factores auf, so wird

$$(an-bn+am+bm)x = a^2m+abm,$$

dividirt

dividirt hernach mit den Factor der Zahl x, so wird

$$x = \frac{a^2 m + abm}{an - bn + am + bm}.$$

§. 206.

Anmerkung.

Wenn man einige Betrachtungen über die Art anstellt, wie man diese Aufgabe aufgelöset hat, so wird man gewahr, daß, nachdem man die Bedingungen der Aufgabe gehörig ausgedrückt, man aus andern festgesetzten Wahrheiten weiter gehen muste, ohngeachtet dieselben nicht in der Aufgabe angezeiget waren; allein diese wurden als bekannt voraus gesetzt. Und so geschiehet es in vielen andern Fällen, daß viele Dinge als bekannt angenommen werden, deren Wahrheit schon längst bewiesen worden. Alsdenn kommt es besonders auf eines jeden, der die Auflösung unternimt, seiner eigenen Scharfsinnigkeit an, um das zu entdecken, was stillschweigend gegeben oder voraus gesetzet wird. Ausserdem kann man bey jeder Auflösung das anbringen, was wahr und unumstößlich ist. Auf diese Art hat man die beyde Divisores m und n weggeschaft. Man ist dabey zwar etwas weitläuftig gewesen, und man hätte dieselben gleich wegbringen können, wenn man die ganze Gleichung gleich mit mn multiplicirt hätte; es würde alsdenn

$$\frac{mn(ax-bx)}{m} = \frac{(a^2-ax+ab-bx)mn}{n}$$

und also

$$n(ax-bx) = (a^2-ax+ab-bx)m$$

geworden seyn. Mit dem übrigen wäre man so verfahren, wie gezeigt worden.

§. 207.

Die Größe, wodurch x bestimmt wird, oder der Werth von x, ist indessen sehr zusammengesetzt; und es ist natürlich, daß man zusehen muß, ob derselbe wo nicht einfacher, wenigstens bequemer ausgedrückt werden kann. In dieser Absicht muß man zusehen, ob der Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Divisor haben. Um diesen zu entdecken, löse man dieselben in die Factores auf, aus denen sie entstanden sind. Dieses geht zwar nicht allemal, aber doch hier an, und man findet

$$x = \frac{(a+b)am}{(a+b)m+(a-b)n}.$$

Nun läst sich leicht einsehen, daß dieser Bruch sich nicht reduciren läst, inzwischen ist doch dieser bequemer als der erstere, wenn man die Rechnung in einen jeden besondern Fall anstellen soll.

Es sey z. Ex. $a=5$, $b=3$, $m=3$, $n=8$, so wird $x = \frac{(5+3)5.3}{(5+3)3+(5-3)8}$,

oder $x = \frac{8.5.3}{8.3+2.8} = \frac{8.5.3}{8.5.} = 3.$

Es sey $a=12$, $b=7$. $m=38$, $n=10$, so wird $x = \frac{(12+7)\ 12.\ 38}{(12+7)\ 38+(12-7)10} = \frac{19.12.38}{19.38+5.10.}$

oder $x = 11\frac{43}{193}$.

§. 208.

Wenn man die Eigenschaften der Proportions recht inne hat, so hätte man auch diese Aufgabe auf

eine

eine weit leichtere Art auflösen können: denn da

$$\frac{x}{m} : \frac{a-x}{n} = a+b : a-b,$$

so ist bekannt, daß die Proportion nicht verändert wird, wenn man zwey auf einander folgende Glieder einer Verhältnis, mit einerley Zahl multiplicirt. Multiplicirt man also die ersten beyde Glieder mit mn, so wird

$$nx : m(a-x) = a+b : a-b.$$

Aus dieser Proportion aber bekommt man gleich

$$(a-b)nx = ma(a+b) - mx(a+b)$$

und also $(a+b)mx + (a-b)nx = (a+b)am$,

oder $((a+b)m + (a-b)n)x = (a+b)am$,

und demnach $x = \dfrac{(a+b)am}{(a+b)m + (a-b)n}$.

§. 209.

Auf diese Art kommt man nicht nur weit eher zum Zwecke, sondern der Werth von x giebt sich so bequem als möglich. Bey dieser Gelegenheit kann man anmerken, daß es nicht allezeit gut ist, wenn man sich gleich in einen weitläuftigen Calcul verwickelt, der einem, in schwererern Fällen, öfters die Lust benimt, weiter fortzugehen; sondern, man muß gleich anfänglich zusehen, ob man nicht durch einige bekannte Sätze, die man gehörig anbringt, die Gleichungen simpler und bequemer machen kann.

§. 210.

Aufgabe.

Es werden zwey Zahlen a und b gegeben; man soll eine Zahl finden, die so beschaffen ist, daß, wenn

man

man dieselbe von der ersten wegnimmt und zu der zweyten hinzusetzt, sich die Differenz der ersten und dieser Zahl, zu der Summe der zweyten und dieser Zahl wie m zu n verhält.

§. 211.

Vorbereitung.

Die Zahl, welche man sucht, nenne man x, so ist die Differenz der ersten und dieser Zahl, $a-x$, und $b+x$ die Summe derselben und der zweyten Zahl.

§. 212.

Auflösung.

Es soll also seyn

$$a-x : b+x = m : n;$$

folglich ist $bm+mx = an-nx$

und $bm+mx+nx = an$

und $mx+nx = an-bm$,

folglich $x = \frac{an-bm}{m+n}$.

§. 213.

Anmerkung.

Es sey $a=36$; $b=6$. $m=2$. $n=4$ so wird $an=144$; $bm=12$ und $m+n=6$ folglich $x=\frac{132}{6}=22$.

Wäre aber $a=36$; $b=48$; $m=6$; $n=2$ so wäre $x=\frac{36.2-48.6}{6+2}=\frac{72-288}{8}$ oder

$x=-\frac{216}{8}=-27$.

§. 214.

§. 214.

Weil in diesem Falle x negativ ist, so siehet man, daß die Aufgabe nicht so bestehen kann, wie sie vorgetragen worden; außer wenn man die Addition und Subtraction im allgemeinen algebraischen Verstande nimt. Alsdenn aber müste die Aufgabe so vorgetragen werden, daß die Zahl, welche man sucht, zu der ersten hinzugesetzt, und von der zweiten weggenommen werden soll. Unter diesen Bedingungen ist offenbar, daß

$36+27:48-27=6:2$ denn $36+27=63$
und $48-27=21$. und $63:21=6:2$

Eben so ist es in andern Fällen, wenn die Größe, die man sucht, ein anderes Zeichen bekommt, als man nach den Bedingungen der Aufgabe erwarten konnte. Man kann alsdenn sicher behaupten, daß die Aufgabe unter den Bedingungen, wie sie vorgetragen worden, unmöglich ist; daß sie aber möglich wird, sobald man einige Bedingungen, welche in derselben vorkommen, nach der Bedeutung des Zeichens der verlangten Größe einrichtet.

§. 215.

Aufgabe.

Es will jemand eine gewisse Anzahl Arbeiter auszahlen. Er hat aber nicht so viel Geld als er braucht, sondern es fehlen ihm b Thlr. wenn er jeden Arbeiter a Thlr. geben wollte. Er entschließt sich also einem jeden nur c Thlr. zu geben, und alsdenn behält er d Thlr. übrig. Nun will man wissen, wie viel Geld der Eigenthümer, und wie viel Arbeiter er zu bezahlen gehabt.

§. 216.

Vorbereitung.

In dieser Aufgabe sind zwey Dinge zu bestimmen; die Anzahl der Arbeiter und die Anzahl der Thaler, oder das Geld. Es sind aber mit der Aufgabe solche Bedingungen verbunden, welche machen, daß man nur eins von diesen Stücken wissen darf, um gleich das andre zu bekommen. Denn gesetzt man wüste die Anzahl der Arbeiter, und diese wären x, so weiß man auch, daß das Geld, welches alle diese Arbeiter bekommen müssen, wenn ein jeder a Thl. bekommt. Denn wenn ein Arbeiter a Thlr. bekommt, so müssen 2, 3, 4 ꝛc. Arbeiter $2a$, $3a$, $4a$ und also überhaupt x Arbeiter ax Thlr. bekommen. Nun weiß man aber, daß b Thlr. fehlen würden, wenn ein jeder a Thlr. haben sollte. Da der Besitzer nun ax Thaler haben müste, so hat er wirklich nur $ax-b$ Thlr. weil ihm b Thlr. fehlen.

Auf der andern Seite weiß man, daß er d Thlr. übrig behält, wenn er jedem Arbeiter nur c Thlr. giebt. Er braucht also nicht alle das Geld was er hat, sondern er würde auskommen, wenn er d Thl. weniger hätte. Wenn er aber einen jeden Arbeiter c Thlr. giebt, so bekommen x Arbeiter cx Thaler. Da er nun d Thlr. übrig behält, so ist cx Thlr. $+d$ Thlr. das Geld was er wirklich hat.

Die Summe des Geldes ist nun auf zweyerley Art bestimmt worden, und um dieselbe zu bekommen darf man nur den Werth des Buchstaben x bestimmen, welches aber leicht geschehen kann.

§. 217.

Auflösung.

Denn es ist $ax - b = cx + d$

folglich $ax - cx = b + d$

oder $(a - c)x = b + d$

und $x = \frac{b + d}{a - c}$

§. 218.

Zweyte Art.

Wüßte man hingegen daß y das Geld wäre, welches der Besitzer hat, so würde er im ersten Falle noch b Thlr. haben müssen, um jeden Arbeiter c Thl. geben zu können. Es wäre also $\frac{y + b}{a}$ die Anzahl der Arbeiter.

Wenn er aber jeden c Thlr. giebt, so braucht er nicht alle sein Geld, sondern er kommt mit d Thlr. weniger aus, dahero ist auch $\frac{y - d}{c}$ die Anzahl der Arbeiter. Es ist also

$$\frac{y + b}{a} = \frac{y - d}{c}$$

Man multiplicire gleich die ganze Gleichung durch ac so wird $cy + cb = ay - ad$

und $cb + ad = ay - cy$

folglich $\frac{cb + ad}{a - c} = y$

§. 219.

Anmerkung.

Es sey $a = 6$; $b = 20$; $c = 4$; $d = 12$ so wird im ersten Fall $x = \frac{32}{2} = 16$ die Anzahl der Arbei-

Arbeiter, und das Geld $16.6-20=96-20=76$. Es ist aber offenbar, daß 96 Thlr. erfordert werden, wenn ein jeder 6 Thlr. haben soll. Wenn aber ein jeder 4 Thlr. bekommt, so bekommen 16 Arbeiter 64 Thlr. Da nun 76 Thlr. in Casse sind, so bleiben in diesem Falle 12 Thlr. übrig.

§. 220.

Will man aus der zweyten Auflösung das Geld zuerst haben, so setze man vor die Buchstaben die Zahlen, so wird $y = \frac{4.20+6.12}{6-4} = \frac{4.20+6.12}{2}$ $=2.20+3.12=76$, und die Anzahl der Arbeiter $\frac{76-12}{4}=16$. Und so in andern Fällen.

§. 221.

Aufgabe.

Eine gewisse Masse ist aus der Vermischung zweyerley Materien entstanden. Man weiß aber, daß eine gewisse Quantität als a Cubikfuß ein gewisses Gewicht b haben; es ist ferner bekannt, daß eine bestimmte Quantität von der andern Materie als c Cubikfuß ein gewisses Gewicht hat, welches durch d ausgedrückt wird. Die Masse, welche aus der Vermischung dieser beyden Materien entstanden, hält einen Raum von e Cubikfuß, und das Gewicht derselben ist f. Man will wissen wie viel von einer jeden Materie dazu genommen worden.

§. 222.

Vorbereitung.

In dieser Aufgabe ist keine Materie bestimt worden, es ist also offenbar, daß sie auf alle Materien gilt,

gilt, die sich mit einander vermischen lassen. Indessen wird man doch leicht gewahr, daß dabey stillschweigend die Bedingung voraus gesetzt wird, daß jede Materie in dem Raum den sie einnimt, dergestalt vertheilet ist, daß in einem jedem Theile dieses Raums so viel Materie enthalten ist, als in dem andern, man mag denselben so groß oder so klein annehmen als man will. Wenigstens kann unter diesen Bedingungen die Auflösung folgendergestalt unternommen werden. Weil nemlich die Materien auf diese Art vertheilet sind, so ist offenbar, daß, wenn 1 Cubikfuß z. E. 6. 8. oder 10 Pfund wiegt, alsdenn 2, 3, 4 ꝛc. Cubikfuß 12, 18, 24 ꝛc. oder 16, 24, 32 ꝛc. oder 20, 30, 40 ꝛc. Pfund wiegen werden. Kurz, daß sich die Gewichte dergleichen Materien gegen einander verhalten werden, wie die Räume, welche dieselben einnehmen.

Gesetzt x ist das Gewicht, welches von der ersten Materie zur Vermischung angenommen worden. Weil nun f das Gewicht der ganzen Vermischung ist, so muß $f - x$ das Gewicht der andern Materie seyn, welche zur Vermischung genommen worden. Nun nehmen b Pfund von der ersten Materie einen Raum von a Cubikfuß ein, also müßen x Pfund von der ersten Materie einen Raum einnehmen der $\frac{ax}{b}$ Cubikfuß ist. Eben so ist $\frac{cf - cx}{d}$ der Raum in Cubikfuß, den das Gewicht einnimt, welches von der zweiten Materie zur Vermischung genommen worden. Da nun e der Raum ist den die ganze Vermischung einnimt, so ist

§. 223.

Auflösung.

$$\frac{ax}{b} + \frac{cf - cx}{d} = e$$

Man multiplicire gleich die ganze Gleichung mit bd,

so wird $adx + bcf - bcx = bde$

und $adx - bcx = bde - bcf$

und $x = \frac{bde - bcf}{ad - bc}$.

§. 224.

Anmerkung.

Wenn man nun das Gewicht der ersten Materie, in einen jeden besondern Fall, weiß, so ist alsdenn das Gewicht der zweyten $f - x$.

Es sey $a = 1$, $b = 68$, $c = 2$, $d = 60$, $e = 3$, $f = 96$, so wird $x = \frac{68.60.3 - 68.2.96}{60 - 68.2.}$,

oder $x = \frac{68\,(180 - 192)}{60 - 136} = \frac{-12.68,}{-76}$

oder $x = 10\frac{14}{19}$ ℔. Und das Gewicht der andern ist $f - x = 96 - 10 - \frac{14}{19} = 85\frac{5}{19}$ ℔.

§. 225.

Diese Aufgabe verliehret nichts von ihrer Allgemeinheit, wenn man auch $a = c$ setzt; ja, man kann beyde Größen als 1 ansehen. Denn wenn man weiß, wie viel a oder c Cubicfuß von einer gewissen Materie wiegen, so ist es unstreitig, daß man auch weiß, wie viel 1 Cubicfuß wiegt. In diesem Falle wird aber der Werth von x nicht so zusammengesetzt, sondern man bekommt

$$x = \frac{bde - bf}{d - b}.$$

§. 226.

§. 226.

Man könnte auch noch zu mehrerer Bequemlichkeit $e = 1$ annehmen, und denn würde der Werth von x noch einfacher, nemlich $x = b \times \frac{d-f}{d-b}$.

In diesem Falle bedeuten b, d, f alsdenn die geometrische Räume, welche 1 ℔. von einer jeden Materie einnimmt. Eben so kann man in andern Fällen, wenn die Aufgabe nichts an der Allgemeinheit verliehrt, verschiedene Größen als eins (1) betrachten, und dadurch die algebraische Formeln einfacher machen.

§. 227.

Diese Formeln, wodurch x in der Aufgabe bestimmt wird, enthalten die ganze Alligations-Regel, welche in den Rechenbüchern vorkommt, und sind nicht blos auf diese einzige Art eingeschränkt, sondern erstrecken sich auf alle Aufgaben, darinnen die Größen, so von einander abhangen, wie in dieser. So sind z. E. die Sachen beschaffen, deren Gewichte sich wie die Preise dieser Gewichte verhalten, u. a. m.

§. 228.

Uebrigens zeigt die Formel vor x den Zusammenhang der Größen an, und man kann durch Hülfe derselben, eine jede finden. Man nehme z. E. die Formel (§. 225.) und setze, x wäre bekannt, man wolte aber b wissen, so ist

$$dx - bx = bd - bf$$

und $$b = \frac{dx}{x + d - f}.$$

Und die Aufgabe, welche dadurch aufgelöset wird, ist

„Man weiß, daß f ℔. von einer gewissen, aus „zwey andern Materien, vermischten Materie 1 „Cubicfuß halten. Man weiß ferner, daß 1 Cubic„fuß von der einen Materie d ℔ wiegt. Ferner „weiß man, daß von der andern Materie x ℔. ge„nommen worden. Man will wissen, wie viel 1 Cu„bicfuß davon wiegt; dieses Gewicht ist b, welches „durch diese Formel gegeben wird.“

§. 229.

Eben so, wenn man d als unbekannt betrachtet, findet man $d = \frac{b(x-f)}{x-b}$,

und wenn man f als unbekannt ansieht, so findet man

$$f = bd + bx - dx.$$

Und es ist leicht zu sehen, in welchem Falle diese Aufgaben vorkommen. Um hievon einige Beyspiele zu geben, setze man, daß

b den Preiß von einem Pfunde von einer gewissen Materie,

d den Preiß von einem Pfunde von einer andern Materie,

f den Preiß von einem Pfunde von der aus den vorigen beyden vermischten Materie,

x das Gewicht von der ersten Materie bedeute, welche zur Vermischung angenommen worden,

so kann man, durch diese angegebene Formel, gleich die Auflösung von folgender Aufgabe haben.

§. 230.

Ein Tuchfabrikant will Spanische- und Landwolle dergestalt vermischen, daß 1 ℔. (oder Stein) f Rthlr. kosten

kosten soll. Nun kostet 1 ℔. Spanische Wolle b Rthlr. und 1 ℔. Landwolle d Rthlr. wie viel wird er von jeder nehmen müssen? Hier wird x gesucht und es ist $x = \frac{b \times d - f.}{d - b}$

§. 231.

Die berühmte Aufgabe des Archimedes gehört auch hieher; um sie aber allgemeiner vorzutragen, bedeute

b die besondere Schwere eines gewissen Metalles,
d die besondere Schwere eine andern Metalles,
f die besondere Schwere des durch die Vermischung dieser beyden entstandenen Metalles,
x das Gewicht des ersten Metalles in der Vermischung.

Wenn nun diese Aufgabe vorgetragen wird. „Es wird „die besondre Schwere zweyer Metalle gegeben. Es „wird ferner die besondere Schwere des, aus der Ver„mischung dieser beyden, entstandenen Metalles ge„geben. Man will wissen, wie viel von einer jeden „Materie in der Vermischung ist:“

So wird hier x gesucht, und man hat

$$x = \frac{b(d - f.}{d - b}$$

Diese Aufgabe kann man auch dazu anwenden, um zu erfahren, wie viel Kupfer und Zinn zu dem Metall genommen worden, aus dem ein Canon gegossen ist; und x bedeutet alsdenn wie viel von einem Pfund, Centner ꝛc. von dem ersten Metall in einem Pfunde oder Centner von dem Metalle des Canons ist.

§. 232.

Aufgabe.

Fig. 17. Es gehet ein Bothe von einem gewissen Ort A nach dem Ort C, und hat Befehl, in einem jeden Tage den Weg *a* zurückzulegen. Nach Verfliessung der Zeit *b* wird ihm ein anderer Bothe von B nachgeschickt, welcher Ort dem Ort C näher ist als A, und die Entfernung desselben von A ist *c*. Dieser letzte Bothe soll den ersten einholen, und in dieser Absicht soll er in jedem Tage den Weg *d* zurücklegen. Man verlangt zu wissen, wo dieser zweyte Bothe den ersten antreffen wird.

§. 233.

Vorbereitung.

Weil man voraus setzt, daß ein jeder Bothe in einem jeden Tage so weit gehet, wie in dem andern, oder, daß die Geschwindigkeit derselben gleichförmig ist; so folgt daraus, daß die Wege, welche sie zurücklegen, den Zeiten proportional sind. Dieses ist offenbar: denn wenn der erste in einem Tag den Weg *a* zurückleget, so legt er in 2, 3, 4 ꝛc. Tagen die Wege $2a$, $3a$, $4a$ ꝛc. zurück. Eben so ist es auch mit dem andern. Dieses ist der Grundsatz aus dem diese Aufgabe aufgelöset werden muß.

Man nenne x den Weg, den der erste gegangen ist, ehe ihn der zweyte einholt. Da nun der Ort B dem Orte C näher liegt und $AB = c$, so ist $x - c$ der Weg, den der zweyte Bothe zu gehen hat. Weil nun die Zeiten den zurückgelegten Wegen proportional sind, so verhält sich der Weg, welchen

welchen der erste Bothe in einem Tage zurückgelegt, zu dem Wege welchen er zurückgelegt, ehe ihn der zweyte Bothe einholt, wie die Zeit, welche er anwendet, um den Weg a zu gehen, zu der Zeit, welche er anwenden muß, um den Weg x zu gehen, oder es ist $a : x = 1 : \frac{x}{a}$. Und $\frac{x}{a}$ ist die Zeit, welche derselbe auf den Weg x anwendet.

Der zweyte Bothe gehet nun, nach Verfliessung der Zeit b, aus, folglich muß die Zeit, welche er anwendet, um den ersten Bothen einzuholen, um so viel kleiner seyn, als die Zeit, die der erste gebraucht, um den Weg x zu gehen. Da nun aber der zweyte Bothe in einem Tage den Weg d gehet, so wird derselbe den Weg $x - c$ in $\frac{x-c}{d}$ Tagen gehen.

§. 234.

Auflösung.

Es ist also $\frac{x}{a} - b = \frac{x-c}{d}$,

und wenn man alles mit ad multiplicirt,

$$dx - adb = ax - ca,$$

folglich $dx - ax = abd - ca,$

oder $x(d-a) = a(bd-c)$

und also $x = a \times \frac{bd-c}{d-a}$.

§. 235.

Exempel.

Gesetzt, der erste Bothe soll in einem Tage 4 Meilen gehen, so ist $a = 4$; der zweyte Bothe

soll in einem Tage 5 Meilen gehen, so ist $d = 5$. Ist nun der Ort B von A 7 Meilen entfernt, so ist $c = 7$, und wenn 3 Tage verflossen sind, ehe der zweyte Bothe abgeht, so ist $b = 3$. Man setze nun diese Zahlen in die Stelle der Buchstaben, so bekommt man

$$x = \frac{(3.5 - 7)4}{5 - 4}$$

oder $x = 4.8 = 32$.

§. 236.

Dieser gefundene Werth von x ist eigentlich wieder eine Formel, welche anzeigt, wie die Größen, welche in der Aufgabe vorkommen, nach den Bedingungen der Aufgabe, von einander abhangen. Die besondere Fälle, welche dabey vorkommen, kann man leicht aus dieser Formel bekommen, wenn man nur die Größen, welche darinnen befindlich sind, so verändert, als es die Bedingungen, in jedem besondern Falle, verlangen. Wenn z. E. der zweyte Bothe auch von A abgeht, so ist es eben soviel, als wenn der Punkt B in A wäre, alsdenn aber würde $c = o$ und also

$$x = \frac{abd}{d - a}$$

Läge hingegen der Ort B nicht zwischen A nnd C, sondern auf der andern Seite von A, so wäre die Entfernung des Orts B von A oder C, der Lage dieses Orts, welche in der Aufgabe angenommen worden, entgegen gesetzt, und müste also als negativ angesehen werden. Dahero müste man vor c in der Formel $-c$ setzen, und alsdenn würde $x = a \times \frac{db + c}{d - a}$ seyn.

§. 237.

§. 137.

Man kann auch die Zeit, welche der erste Bothe anwendet, mit in die Rechnung bringen. Gesetzt, diese wäre t, so ist $1 : t = a : x$, folglich $t = \frac{x}{a}$, oder $x = at$. Man setze nun vor x diesen Werth, so wird $at = a \times \frac{bd - c}{d - a}$ (§. 232.)

oder $t = \frac{bd - c}{d - a}$.

§. 238.

Durch Hülfe dieser Formel, kann man auch diese Aufgabe auflösen: „Es wird ein Bothe von A abgeschickt, welcher täglich a Meilen geht; nachdem die „Zeit b verflossen, so wird ihm ein anderer Bothe nachgeschickt, welcher ihn nach drey Tagen einholen soll; „man will wissen, wie weit dieser jeden Tag gehen muß? „Die Zeit, die der erstere alsdenn gegangen, ist $3 + b$, „folglich ist nach dieser letzten Formel

$$3 + b = \frac{bd - c}{d - a}.$$

Man multiplicire alles mit $d - a$, so wird

$$3d - 3a + db - ba = bd - c,$$

oder wenn man das wegläßt, was sich aufhebt

$$3d - 3a - ba = -c,$$

und indem man $-3a - ba$ auf die andre Seite bringt

$$3d = 3a + ba - c,$$

und durch 3 dividirt

$$d = \frac{3a + ab - c}{3}.$$

Diese Größe ist nun diejenige, welche man suchte, und demnach völlig bestimmt.

§. 239.

Die ganze Aufgabe würde algemein so vorgetragen werden müssen. „Es werden die Geschwindigkeiten zweyer Körper gegeben, welche sich in einer geraden Linie bewegen. Es werden ferner die Puncte „von denen sie abgehen, und die Zeit welche der erstere voraus hat, gegeben. Man soll den Punkt bestimmen, wo dieselbe einander begegnen werden.“

Es ist offenbar, daß diese allgemeine Aufgabe mit der vorigen einerley ist. Denn die Geschwindigkeit ist nichts anders als der Raum, den ein Körper mit einer gleichförmigen Bewegung in einer gewissen Zeit beschreibt. Wenn eine Aufgabe so vorgetragen wird, so läßt sie sich auf unendliche Art verändern, und man darf in besondern Fällen nur die Formel nehmen, welche die Verbindung der darin befindlichen Größen zeigt, so kann man die Mühe spahren sie besonders aufzulösen. Es ist zwar nicht zu leugnen, daß man bey solchen kleinen Aufgaben besser thut, wenn man die Auflösung in jedem Fall vornimmt, allein es kommen in andern Wissenschaften oft Fälle vor, die ohne Hülfe einer schon bekanten Formel, viele Zeit und Mühe erfordern würden, wie z. E. die in der Mechanic, Astronomie ꝛc. vorkommende Aufgaben sind.

§. 240.

In den vorigen Aufgaben wurde nur allezeit eine unbekannte Größe gesucht, und die zu Beyspielen angeführte

geführte Aufgaben werden hinreichend erklären, wie man dieselbe finden kann; man wird auch angemerkt haben, daß man am Ende allezeit auf eine Gleichung kommt, welche diese Gestalt hat

$$x = A$$

wo x die unbekannte Größe und A eine Größe bedeutet, welche aus lauter bekannten zusammen gesetzt ist. Es kommen aber viel Aufgaben vor, in denen zwey und mehrere Größen gesucht werden, wie man alsdenn die Auflösung unternehmen muß, sollen folgende Aufgaben erläutern.

§. 241.

Aufgabe.

Es wird die Summe zweyer Zahlen und ihre Differenz gegeben, man soll die Zahlen selbst finden.

§. 242.

Auflösung.

Es sey die gegebene Summe $= a$ und die gegebene Differenz $= d$. Die gröste von den beyden Zahlen sey x und die kleinere y. So ist

$$x + y = a$$
$$x - y = d$$

Aus der ersten Gleichung ist $x = a - y$, und aus der zweiten $x = d + y$. Weil beyde Größen der Zahl x gleich sind, so ist $d + y = a - y$.

Auf diese Art hat man also eine Gleichung bekommen, in der nur eine unbekannte Größe, und übrigens lauter bekannte Größen sind, und ihre Auflösung hat weiter keine Schwürigkeit. Denn wenn man alle y auf einer Seite bringt, so wird

$$y + y = a - d \qquad \text{oder}$$

oder $2y = a - d$

folglich $y = \frac{a - d}{2}$

oder $y = \frac{a}{2} - \frac{d}{2}$

Will man nun die andere Zahl x auch durch lauter bekannte Größen ausdrücken, so kann man entweder in $a - y$ oder in $d + y$ diesen gefundenen Werth von y setzen, und alsdenn wird

$$x = a - \left(\frac{a}{2} - \frac{d}{2}\right)$$

oder $x = \frac{a}{2} + \frac{d}{2}$

Eben so bekomt man auch den Werth von x aus der andern Gleichung, und auf diese Art sind beyde unbekannte Größen bestimmt.

§. 243.

Anmerkung.

Es sey $a = 23$ und $d = 7$ so wird $x = \frac{23}{2} + \frac{7}{2} = 15$ und $y = \frac{23}{2} - \frac{7}{2} = 8$.

§. 244.

Ich bin bey dieser Aufgabe blos in der Absicht weitläuftig gewesen, um zu zeigen wie man verfahren muß, wenn zwey oder mehrere unbekannte Grössen vorkommen, davon man eine jede besonders bestimmen will. Erstlich ist offenbar, daß man aus den Bedingungen der Aufgabe so viel besondere Gleichungen bekommen muß, als unbekannte Größen vorkommen, wiedrigensals ist es unmöglich alle völlig zu bestimmen. Wenn man nun aber annimt, daß

man

man so viel Gleichungen hat, so sucht man aus der einen Gleichung den Werth der einen unbekannten Größe nach den schon oft in Ausübung gebrachten Regeln, und dieser wird alsdenn eine solche Größe seyn, welche aus lauter bekannten und den übrigen unbekannten zusammengesetzt ist. Hierauf nimmt man die zweite Gleichung, und setzt vor diese unbekannte Größe den gefundenen Werth, und verbindet denselben gehörig mit den andern Größen, so entsteht eine neue Gleichung in der eine unbekannte Größe weniger ist. Sind nun blos zwey unbekannte Größen da, so kann man aus der zweiten den Werth der einen unbekannten Größe durch lauter bekannte bestimmen, und nachdem diese bekannt ist, die andere auch leicht finden.

§. 245.

Dieses ist aber nicht die einzige Art die unbekannte Größen zu bestimmen; so hätte man in der vorigen Aufgabe die beyde Gleichungen

$$x + y = a$$
$$x - y = d$$

addiren können, weil gleiche Größen zu gleichen addirt, gleiche Größen hervorbringen; hieraus würde man gleich $2x = a + d$ und $x = \frac{a+d}{2}$ bekommen haben. Ferner hätte man die zweite von der erstern subtrahiren können, und alsdenn wäre $2y = a - d$ und $y = \frac{a-d}{2}$ gewesen. Diese zweite Art ist ohnstreitig der ersten in Ansehung der Kürze weit vorzuziehen, ohngeachtet man auf beyde Art zu seinem Entzwecke kommt. Um in diesem Stücke eine

Fer-

Fertigkeit zu erlangen, muß man sich besonders üben, und die Gleichungen und ihre Zeichen genau ansehen. Dadurch entdeckt man nach und nach solche Kunstgriffe, welche einen in schwehren Fällen ungemein zu statten kommen.

§. 246.

Diese Auflösung giebt aber nicht blos die verlangte Zahlen in einem besondern Falle, sondern man entdeckt dadurch einen Lehrsatz, welcher zeigt wie zwey Zahlen von ihrer Summe und ihrer Differenz abhängen, man mag die beyde Wörter im gewöhnlichen oder algebraischen Verstande nehmen. Es ist nemlich von zweyen Zahlen oder überhaupt Größen, die größte allemal so groß, als die halbe Summe nebst der halben Differenz: die kleinere aber so groß, als die halbe Summe weniger der halben Differenz. Dieses Satzes kann man sich öfters mit vieler Bequemlichkeit bedienen, und denselben als eine bekannte Wahrheit betrachten, oder unter die gegebene Sätze (Data) rechnen.

§. 247.

Aufgabe.

Ich bin in einer zahlreichen Gesellschaft gewesen, sagt jemand, in der dreymahl so viel Männer als Damen waren; und da vier Männer mit ihren Frauen weggiengen, blieben noch viermal so viel Männer als Damen zurück. Wie stark ist die Anzahl von jedem Geschlecht gewesen?

§. 248.

Vorbereitung.

Hier ist sowohl die Anzahl der Damen als Männer

ner unbekannt. Man setze also x sey die Anzahl der erstern, und y die Anzahl der zweyten. Weil nun 4 Männer und vier Frauen weggegangen, so ist $x - 4$ die Anzahl der zurückgebliebenen Männer, und $y - 4$ die Anzahl der zurückgebliebenen Damen. Im Anfange waren aber dreymal soviel Männer als Damen da.

§. 249.

Auflösung.

Es ist also $x = 3y$ vermöge der ersten Bedingung. Ferner ist nach der zweyten

$$x - 4 = 4(y - 4)$$

Setzt man aus der ersten Gleichung den Werth von x, vor x in der zweyten, so wird

$$3y - 4 = 4(y - 4)$$

oder $3y - 4 = 4y - 16$,

folglich $4y - 3y = 16 - 4$,

oder $y = 12$.

Da nun $x = 3y$, so wird $x = 3.12 = 36$. Es sind also überhaupt 36 Männer und 12 Damen in der Gesellschaft gewesen.

§. 250.

Anmerkung.

In der That ist, in diesem Falle, die Anzahl der Männer dreymal so groß, als des Frauenzimmers, und wenn 4 weggehen, so bleiben von der erstern 32. und von der zweyten Anzahl 8 übrig, folglich viermal soviel Männer als Damen. Diese Aufgabe läst sich noch auf unendliche Art verändern; und wenn man sie genau untersucht, so wird man leicht gewahr,

gewahr, daß sie nur ein besonderer Fall von folgender weit allgemeinern ist.

§. 251.

Aufgabe.

Man verlangt zwey Zahlen, deren Verhältnis gegen einander, der Verhältnis $m : n$ gleich ist. Sie sollen ferner so beschaffen seyn, daß, wenn man von jeder, die Zahl a wegnimt, die Verhältnis der von beyden übrig bleibenden Zahlen, der Verhältnis $p : q$ gleich ist.

§. 252.

Vorbereitung.

Man nenne die beyden Zahlen, welche man sucht x und y; wenn man nun von jeder die Zahl a weg nimt, so bleiben die Zahlen $x - a$ und $y - a$ übrig.

§. 253.

Auflösung.

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist nunmehro

1) $x : y = m : n.$

2) $x - a : y - a = p : q.$

Aus der ersten Gleichung ist $my = nx$,

aus der zweyten aber $py - ap = qx - aq$,

hieraus wird $py = qx - aq + ap$,

folglich $y = \frac{qx - aq + ap}{p}$.

Setzt man diesen Werth von y in die andre Gleichung, so wird $m.\frac{(qx - aq + ap)}{p} = nx$,

oder $\frac{mqx - maq + amp}{p} = nx$,

und

und $mqx - amq + amp = npx$,
folglich $mqx - npx = amq - amp$,
und $x = \frac{amq - amp}{mq - np}$

oder $x = \frac{am(q-p)}{mq-np}$

Da nun $y = \frac{nx}{m}$, und man setzt vor x diesen gefundenen Werth, so wird

$$y = \frac{an(q-p)}{mq-np}.$$

§. 254.

Anmerkung.

Gesetzt, die Verhältnis $m:n$ ist der Verhältnis $5:8$, und $p:q$ der Verhältnis $7:12$ gleich, so muß man in der Formel vor m die Zahl 5, und vor n, p, q, die Zahlen 8, 7, 12 setzen, alsdenn wird, wenn $a = 4$

$$x = \frac{5.4.(12-7)}{5.12 - 7.8.}$$

$$y = \frac{8.4(12-7)}{5.12 - 7.8}$$

oder $x = \frac{20.5}{4} = 25$

$$y = \frac{32.5}{4} = 40.$$

Und es ist $x:y = 25:40 = 5:8$,
und $x-4:y-4 = 21:36 = 7:12$,
also die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

§. 255.

Es kann zuweilen geschehen, daß die verlangte Zahlen x und y negativ werden; z. E. es sey $a = 6$

$m:n = 2:5$ und $p:q = 4:7$. Setzt man nun in beyden Formeln diese Zahlen vor die Buchstaben, so wird $x = \frac{2.6.(7-4)}{2.7-4.5} = \frac{2.6.3}{14-20} = \frac{36}{-6} = -6$

und $y = \frac{5.6.(7-4)}{14-20} = \frac{5.6.3}{-6} = -15$.

Diese Zahlen erfüllen die Bedingungen der Aufgabe eben so gut; denn es ist

$$-6:-15 = 2:5$$

und $-6-6:-15-6 = 4:7$

oder $-12:-21 = 4:7$.

Solte aber der negative Werth derselben einige Schwürigkeiten verursachen, und man darüber einiges Bedenken tragen, weil man in der Aufgabe positive Zahlen gesucht hat; so bedenke man, daß, in diesem Falle x und y nicht negativ werden können, als wenn $q-p$ negativ und $mq-np$ positiv; oder wenn $q-p$ positiv und $mq-np$, wie im vorigen Exempel, negativ ist. Im ersten Falle, wenn $q-p$ negativ und $mq-np$ positiv ist, so wird $q-p = -1.(p-q)$ und $p-q$ ist eine positive Größe, und man kann x und y so schreiben

$$x = \frac{-1.am(p-q)}{mq-np}$$

$$y = \frac{-1:an(p-q)}{mq-np}.$$

Ist aber $q-p$ positiv, und $mq-np$ eine negative Größe, so wird $np-mq$ eine positive Größe, und es ist $mq-np = -1 \times (np-mq)$; folglich kann man die vorige Größe so schreiben:

$x =$

$$x = \frac{am(q-p)}{-1 \times (np-mq)}$$

$$y = \frac{an(q-p)}{-1 \times (np-nq)}.$$

Der erste Ausdruck verwandelt sich aber in diesen

$$x = \frac{1}{-1} \times \frac{am(q-p)}{(np-mq)},$$

oder da $\frac{1}{-1} = -1$, in diesen

$$x = -1.\frac{a \times m(q-p)}{np-mq}.$$

Und eben so verwandelt sich der Werth von y in

$$y = -1.\frac{a \times n(q-p)}{np-mq}.$$

Wenn man nun die Zahlen q, p, n, m positiv annimt und man will x und y auch positiv haben, so wird die Zahl a negativ genommen werden müssen. Oder man muß die Subtraction welche in der Aufgabe verlangt wird, in eine Addition verwandeln. Denn wenn a negativ angenommen wird, so wird

$$x = -1.\frac{-am(q-p)}{np-mq} = \frac{+am(q-p)}{np-mq}.$$

$$y = -1.\frac{-a.n(q-p)}{np-mq} = \frac{+an(q-p)}{np-mq}.$$

Wenn man hier wieder $m:n = 2:5$ und $p:q = 4:7$ nimt, so werden die Zahlen, welche vorhin negativ waren, positiv nemlich $x = 6$ und $y = 15$. Dergleichen Fälle ereignen sich öfters und können daher, weil die Algebra eigentlich die Subtraction und Addition nicht von einander unterscheidet. In-

dessen zeigt ein geringes Nachdenken, wie man sich dabey verhalten muß.

§. 256.

Aufgabe.

Ich habe zwey Kugelhaufen gesetzt, sagt ein Kanonier, wenn ich von dem ersten 100 weggenommen und zum zweiten gelegt hätte, so wären in diesem letztern drey mahl so viel gewesen, als in dem ersten. Hätte ich aber 100 von dem zweiten genommen und zum erstern gelegt, so wären in beyden Haufen gleich viel gewesen. Man verlangt die Anzahl der Kugeln in jeden Haufen zu wissen.

§. 257.

Vorbereitung.

Man nenne x die Anzahl der Kugeln, welche im ersten und y diejenige, welche im zweiten Haufen gewesen. Wenn nun von dem ersten 100 weggenommen werden, so bleiben darin noch $x - 100$. Setzt man nun diese 100 zu der Anzahl im zweiten Haufen, so wird die ganze Anzahl $y + 100$ seyn. Nimmt man aber von dem zweiten Haufen 100 und setzt dieselben zum ersten, so kommen hierin $x + 100$ und im zweiten Haufen bleiben $y - 100$.

§. 258.

Auflösung.

Nach der in der Aufgabe vorgetragenen ersten Bedingung ist also

$$3(x - 100) = y + 100$$

und

und nach der zweiten

$$x + 100 = y - 100$$

aus dieser letztern wird

$$x + 100 + 100 = y$$

oder $x + 200 = y$.

Setzt man nun diesen Werth von y in der ersten Gleichung, so wird

$$3(x - 100) = x + 200 + 100.$$

oder $3x - 300 = x + 300$

und $3x - x = 300 + 300$

oder $2x = 600$

und also $x = 300$

Da nun $x + 200 = y$ so wird

$$y = 300 + 200 = 500.$$

§. 259.

Anmerkung.

Diese Zahlen erfüllen alle Bedingungen der Aufgabe, welche nur ein besonderer Fall von einer weit algemeinern ist, die so vorgetragen werden kann.

§. 260.

Aufgabe.

Es werden zwey Zahlen verlangt, die so beschaffen sind, daß wenn man von der ersten die Zahl a wegnimmt und zur zweiten hinzusetzt, die Verhältniß der dadurch entstehenden Zahlen, der Verhältniß $p : q$ gleich ist. Nimmt man aber von der zweiten die Zahl a weg und setzt sie zur ersten hinzu, so soll die Verhältniß der dadurch entstehenden Zahlen, der Verhältniß $n : m$ gleich seyn.

§. 261.

Auflösung.

Es sey x die erste, y die zweite Zahl. Nach der ersten Bedingung soll also seyn

$$x - a : y + a = p : q$$
$$y - a : x + a = n : m$$

Multiplicirt man in diesen Proportionen die äußersten und mittelsten Glieder in einander, so bekomt man diese Gleichungen

$$qx - aq = py + ap$$
$$my - am = nx + an.$$

Durch Hülfe dieser Gleichungen läst sich der Werth von x und y auf verschiedene Art bestimmen. Ich will davon einige anführen.

Erste Art.

§. 262.

Aus der ersten Gleichung ist

$$qx = py + ap + aq$$

indem man aq auf die andre Seite bringt. Folglich ist

$$x = \frac{py + ap + aq}{q}$$

Aus der andern Gleichung ist aber

$$my - am - an = nx$$

indem man na auf die andre Seite bringt. Dividirt man nun mit n so bekomt man

$$\frac{my - am - an}{n} = x$$

Da nun zwey Werthe von x gefunden worden, die durch verschiedene Größen ausgedrückt werden,

so

so kann man dieselben einander gleich setzen, weil sie einer dritten Größe gleich sind. Alsdenn bekomt man

$$\frac{my - am - an}{n} = \frac{py + ap + aq}{q}$$

In dieser Gleichung ist weiter keine unbekannte Größe als y. Um diese weiter zu bestimmen, multiplicire man mit nq so wird

$$nq\,\frac{(my - am - an)}{n} = nq\,\frac{(py + ap + aq)}{q}$$

oder $mqy - amq - anq = npy + anp + anq$. Man bringe npy auf die andre Seite, und so verfahre man auch mit $-amq - anq$ so erhält man

$$mqy - npy = anp + anq + amq + anq$$

oder indem man die Größen zusammen rechnet, welche sich addiren lassen,

$$(mq - np)\,y = anp + 2anq + amq.$$

Nun darf man nur durch $mq - np$ dividiren, so bekommt man $y = \frac{anp + 2anq + amq}{mq - np}$

Nachdem man die Zahl y bestimmt hat, kann man auch den Werth der andern Zahl x angeben. Man setze nemlich diesen gefundenen Werth von y in der Gleichung $x = \frac{my - am - an}{n} = \frac{my}{n} - \frac{am}{n} - a$

so erhält man

$$x = \frac{m(anp + 2anq + amq)}{n(mq - np)} - \frac{am}{n} - n$$

und also beyde Zahlen, die man gesucht hat.

Zweyte Art.

§. 263.

Man kann auch aus diesen beyden Gleichungen

1) $qx - aq = py + ap$

2) $nx + an = my - am$

den Werth von y oder x auf eine andre Art bekommen. Es kommt nur alles darauf an, eine neue Gleichung zu schaffen, in der nur eine unbekannte Größe, z. E. y allein und x nicht ist. Man weiß aber, daß wenn man gleiche Größen durch gleiche Zahlen multiplicirt, man wieder gleiche Größen bekommt. Wenn man diese beyde Gleichungen ferner etwas genau ansieht, so wird man gewahr, daß wenn man die erste mit n und die zweyte mit q multiplicirt, man zwey Gleichungen

$$nqx - anq = npy + anp$$
$$nqx + anq = mqy - amq$$

bekommt, in denen die Coefficienten der Größe x einander gleich sind. Subtrahirt man nun die erste von der zweiten, so heben sich die Glieder auf in denen x ist, und man bekommt

$$2anq = mqy - npy - amq - anq$$

und indem man $-amq - anp$ auf die andre Seite bringt

$$anp + 2anq + amq = mqy - npy$$

und also $y = \frac{anp + 2anq + amq}{mq - np}$

Eben so wie vorhin.

§. 264.

Auf eben diese Art findet man den Werth von x.

Man

Man multiplicire die erste Gleichung im vorigen §phen mit m und die zweite mit p, so wird

$$mqx - amq = pmy + amp$$
$$npx + anp = pmy - amp$$

subtrahirt man die zweite auf diese Art entstandene von der ersten, so wird

$$(mq - np)x - amq - anp = 2amp$$

und $$x = \frac{amq + 2amp + anp}{mq - np}$$

Dritte Art.

§. 265.

Wenn man die Eigenschaften der Proportionen sich gut bekannt gemacht hat, eine Sache, welche höchst nothwendig ist, so kann man auch auf folgende Art zu seinem Zwecke gelangen. Denn weil

$$x - a : y + a = p : q$$

und $$y - a : x + a = n : m$$

so ist auch $$x - a + y + a : y + a = p + q : q$$

oder $$x + y : y + a = p + q : q$$

Eben so ist $$y - a + x + a : x + a = m + n : m$$

oder $$y + x : x + a = m + n : m$$

Man hat also diese drey Proportions

$$x + y : y + a = p + q : q$$
$$x + a : x + y = m : m + n$$
$$y - a : x + a = n : m$$

Diese kann man zusammensetzen (§. 95) und alsdann wird

$$y - a : y + a = n(p + q) : q(m + n)$$

Es ist aber auch nach den bekannten Regeln der Proportionen

$$y - a + y + a : y + a - y + a = n(p + q) + q(m + n) : q(m + n) - n(p + q)$$

oder $2y:2a = n(p+q)+q(m+n):q(m+n) - n(p+q)$

oder $y:a = n(p+q)+q(m+n):qm-pn$

hieraus wird also

$$y = \frac{a \times (n(p+q)+q(m+n)}{mq-np}$$

§. 266.

Anmerkung.

Dieser Werth ist aber mit dem Werth von y in der ersten und zweyten Art einerley: denn es war

$$y = \frac{nap+2naq+amq}{mq-np}$$

oder $y = \frac{nap+naq+naq+maq}{mq-np}$

Löset man nun die Glieder in ihre Factores auf, so wird

$$y = \frac{na(p+q)+qa(m+n)}{mq-np}$$

oder $y = \frac{a \times n(p+q)+q(m+n)}{mq-np}$

Man siehet hieraus daß man in beyden Fällen durch verschiedene Wege eben das erhält, was man verlangte.

§. 267.

Dieser letzte gefundene Werth von y ist aber besonders deswegen den andern vorzuziehen, weil dadurch die Rechnung in jedem besondern Falle erleichtert, und zugleich das ganze Verfahren vor Augen gelegt wird, welches man zu beobachten hat. Ohngeachtet dieser Werth zwar mit dem ersten im Grun-

de

de einerley ist, so würde man doch ohne Noth in weitläuftige Rechnungen verfallen, wenn man sich lieber des ersten bedienen wolte. Man muß überhaupt alle gar zu verwickelte Ausdrücke der Größen zu vermeiden suchen, und dahero, wann es angehen will, jede Größe am Ende der Aufgabe so einfach als möglich auszudrücken suchen.

§. 268.

Der Werth von x in der ersten Auflösung kann ebenfals so verwandelt werden, daß er dem Ausdruck vor die Größe y ähnlich wird. Denn wenn man in

$$x = \frac{m(apn + 2anq + amq)}{n(mq - np)} - \frac{am}{n} - a$$

die Brüche auf einerley Nenner bringt und wirklich multiplicirt, so wird

$$x = \frac{(dmnp + 2amnq + am^2q - am^2q + amnp - amnq + amnp)}{n(mq - np)}$$

Läst man nun die Glieder weg, welche einander aufheben und addirt diejenigen, welche sich addiren lassen, so wird alsdenn

$$x = \frac{2amnp + amnq + an^2p}{n(mq - np)}$$

Dieses läst sich aber durch n dividiren und es ist

$$x = \frac{anp + 2anmp + amq}{mq - np}$$

oder $x = a \times \frac{m(p+q) + p(m+n)}{mq - np}$

Diese Beyspiele zeigen zu gleicher Zeit wie man ohngefehr verfahren muß, eine Größe einfacher auszudrücken. Allgemeine Regeln lassen sich nicht viel hierüber

über geben, und eines jeden sein eignes Genie muß ihm zeigen, welchen Weg er betreten muß.

§. 269.

Um dieses durch ein Exempel zu erläutern, setze man $a=3$, $m=6$; $n=7$, $p=4$, $q=9$ so wird $p+q=4+9=13$ und $m+n=13$. Ferner $mq=54$ und $np=28$ folglich $mq-np=26=2.13$. Setzt man diese Zahlen in die Stelle der Buchstaben, so wird

$$y=3\times\frac{(7.13+9.13)}{2.13}=\frac{3.(7+9)}{2}=24$$

$$x=3\times\frac{6.13+4.13)}{2.13}=\frac{3.(6+4)}{2.3}=15$$

§. 270.

Ich habe diese drey Arten in der Absicht angeführt um zu zeigen, daß man auf vielerley Arten zu seinem Zwecke kommen kann, davon eine jede allezeit vor der andern etwas vorzügliches hat. Die erste Art ist nach den gewöhnlichen algebraischen Schlendrian eingerichtet, man erlangt dadurch allezeit das, was man haben will, gemeiniglich aber verwickelt man sich dergestalt in den Calcul, daß einem beynahe alle Geduld vergehen möchte. Die zweite Methode ist leichter, und man bekommt nach einer geringen Mühe, mit mehrerer Bequemlichkeit, das was man sucht. Die dritte Art zeigt deutlich, was eigentlich algebraische Auflösungen sind, nemlich eine Kette von Schlüssen, oder ein auf richtigen Grundsätzen gegründetes Raisonnement. Ich überlasse einem jeden zu beurtheilen welche von diesen dreyen Methoden den Vorzug verdient.

§. 271.

§. 271.

Aufgabe.

Ein Vater stirbt und läst ein gewisses Vermögen zurück, welches man A nennt. Er macht zugleich ein Testament, unter folgenden Bedingungen. Wenn seine hinterlaßne Frau welche Schwanger ist, einen Sohn zur Welt bringt, so soll dieselbe von dem ganzen Vermögen den Theil m und der Sohn den übrigen Theil n haben; bringt sie aber eine Tochrer zur Welt, so soll die Mutter von dem ganzen Vermögen den Theil p und die Tochter den übrigen Theil q nehmen. Es fügt sich aber daß die Mutter mit einem Sohn und einer Tochter zugleich nieder kommt. Es ist die Frage wie viel jetzt ein jeder von dem hinterlaßnen Vermögen bekommen muß, so, daß des Vaters Wille erfüllt werde.

§. 272.

Vorbereitung.

Es ist offenbahr daß das Vermögen in drey Theile getheilt werden muß, davon ein jeder unbekannt ist. Es sey also x der Theil den die Mutter bekommt, y der Theil des Sohnes und z der Theil der Tochter. Alle diese drey Theile müssen zusammen genommen so groß seyn als das ganze Vermögen.

Aus den Bedingungen, die bey dem Testament hinzugefügt sind, erhellet, daß der Vater die Theile der Mutter, des Sohnes und der Tochter nach gewissen Verhältnissen bestimmt. hat. Nemlich sein Wille ist daß sich der Theil der Mutter zu dem

Theile

Theile des Sohnes verhalten soll, wie m zu n ferner will er haben daß sich der Theil der Mutter zu dem Theile der Tochter vorhalten soll wie p zu q. Hieraus folgt also daß das ganze Vermögen A dergestalt getheilt werden muß, daß diese Verhältnisse bey den Theilen des Mutter, des Sohnes und der Tochter statt finden.

§. 273.

Auflösung.

Es ist also $x+y+z=A$

$$x:y=m:n$$

$$x:z=p:q$$

Aus diesen beyden letztern Proportionen bekommt man die Gleichungen.

$$nx=my \text{ folglich } y=\frac{nx}{m}$$

$$qx=pz \qquad z=\frac{qx}{p}$$

Setzt man nun diese gefundene Werthe von y und z in die erste Gleichung, so wird

$$x+\frac{nx}{m}+\frac{qx}{p}=A$$

und wenn man alle Glieder mit mp multiplicirt

$$mpx+npx+mqx=Amp$$

folglich $x=\frac{Amp}{p(m+n)+mq}$

Nachdem man diesen Theil der Mutter gefunden, so sind dir übrigen leicht zu bestimmen, wenn man in den Gleichungen $y=\frac{nx}{m}$; $z=\frac{qx}{p}$ diesen gefundenen Werth setzt, und es wird

$y=$

$$y = \frac{Anp}{p(m+n)+mq}$$

$$z = \frac{Amq}{p(m+n)+mq}$$

§. 274.

Anmerkung.

Man kann diese Werthe etwas abkürzen, denn weil $m+n = A$ ist. So wird

$$x = \frac{Amp}{Ap+nq}$$

$$y = \frac{Anp}{Ap+mq}$$

$$z = \frac{Amq}{Ap+mq}$$

Das Vermögen A mag beschaffen seyn wie es will, es sey z. E. $m = \frac{1}{3}A$, $n = \frac{2}{3}A$; $p = \frac{3}{5}A$ $q = \frac{2}{5}A$ so wird $Ap + mq = \frac{3}{5}AA + \frac{1}{3}A \times \frac{2}{5}A$ $= \frac{9}{15}AA + \frac{2}{15}AA = \frac{11}{15}AA$. Ferner ist Amp $= A.\frac{1}{3}A.\frac{3}{5}A. = \frac{3}{15}AAA$. Hieraus wird also $x = \frac{3}{15}AAA$ oder $x = \frac{3.A.}{11}$ Und alsdenn $\frac{\frac{11}{15}AA}{}$

$y = \frac{6}{11}A$ und $z = \frac{2A.}{11}$ Und daß diese Theile richtig sind, siehet man daraus, daß

$x : y$

$$x:y = \frac{3}{11}A:\frac{6}{11}A = \frac{1}{3}A:\frac{2}{3}A$$
$$x:z = \frac{3}{11}A:\frac{2}{11}A = \frac{3}{5}A:\frac{2}{5}A$$

§. 275.

Man kann auch leicht diese Theile bestimmen, wenn die Mutter mit zwey Söhnen oder mit zwey Töchtern niedergekommen wäre; oder wenn sie aus einer ganz besondern Fruchtbarkeit mit zwey Söhnen und einer Tochter die Anzahl der Weltbürger vermehret hätte. Im ersten Falle, wenn zwey Söhne da wären, müste man $x:y = m:n$ und wieder $x:z = m:n$ oder $p=m$ und $q=n$ in der Formel sehen. Alsdenn würde aber $x = \frac{Amm}{Am+mn} = \frac{Am}{A+n}$; $y = \frac{An}{A+n}$ und $z = \frac{An}{A+n}$. Beyde Brüder müsten also gleich viel bekommen. Und so ist es auch wenn zwey Töchter angekommen wären.

§. 276.

Aufgabe.

Man soll drey Zahlen finden, die so beschaffen sind, daß die Summe der ersten und zweiten a; die Summe der ersten und dritten b, und die Summe der zweiten und dritten c ist.

§. 277.

Auflösung.

Es sey x die erste, y die zweite, z die dritte Zahl, so wird

$x+y$

$$x + y = a$$
$$x + z = b$$
$$y + z = c$$

Man subtrahire die zweite Gleichung von der ersten so bekomt man $y - z = a - b$ dazu addire man die dritte $y + z = c$ so wird

$$2y = a - b + c$$

folglich $y = \frac{a - b + c}{2}$

Hiedurch bekomt man gehöriger maßen

$$x = \frac{a - c + b}{2}$$

$$z = \frac{c - a + b}{2}$$

§. 278.

Anmerkung.

Es sey $a = 22$; $b = 26$; $c = 34$.

so wird $x = \frac{22 - 34 + 26}{2} = 7$ $y = \frac{22 - 26 + 34}{2}$

$= 15$; $z = \frac{34 - 22 + 26}{2} = 19$.

§. 279.

Aufgabe.

Es werden drey Stück Metall, A, B, C, gegeben, davon ein jedes eine Vermischung von Gold, Silber und Kupfer ist. In dem ersten Stück A sind dieselben dergestalt unter einander gemischt, daß ein jeder Theil von dem Gewichte desselben der, ein ℔ schwer ist, an Golde das

Gewicht a, an Silber b, und an Kupfer c enthält. Eben so hält ein ℔ von der andern Maße B, an Golde d, an Silber e und an Kupfer f. Von der dritten C aber hält ein jedes ℔ an Golde g, an Silber h, an Kupfer k. Man soll diese drey Maßen wieder so mit einander vermischen, daß ein jedes ℔ von der neuen Maße an Golde die Quantität l, an Silber die Quantität m und an Kupfer die Quantität n habe. Man verlangt zu wissen, wie viel man von jeder von den drey ersten Maßen nehmen muß, damit dieses statt finde?

§. 280.

Vorbereitung.

In dieser Aufgabe wird voraus gesetzt, daß in einen jeden Theil von den drey Maßen A, B, C, diese verschiedene Arten von Metall so vertheilet sind, wie in den andern, man mag diesen Theil so groß oder so klein annehmen, als man nur will. Wenn man nun dieses annimt, und x den Theil nent, der von dem ersten Stück Metall genommen werden muß, so folgt daraus daß die Quantität des Goldes, welches in diesem Stück ist, sich zu der Quantität des Goldes, welches in einem Pfunde von der Maße A ist verhält, wie das Gewicht, welches von einem Pfunde von der Maße A zur neuen Vermischung genommen wird, sich zu einem Pfunde verhält, oder daß

$$1 : x = a : ax$$

und ax ist die Quantität oder das Gewicht des Goldes, welches in dem Gewicht x von der Maße A enthalten ist. Eben so ist bx das Gewicht des

Sil-

Silbers, cx das Gewicht des Kupfers, welches in dem Gewicht x enthalten ist.

Es sey ferner y das Gewicht, welches von einem Pfunde der Maße B zur Vermischung genommen werden muß. Nach den vorigen Schlüßen findet man ebenfalls, daß dy die Quantität des Goldes, ey die Quantität des Silbers, und fy die Quantität des Kupfers ist, welche zusammen genommen, das Gewicht y ausmachen.

Wenn man z die Quantität oder das Gewicht nennet, welches von einem Pfunde der Maße C zur Vermischung genommen werden muß, so ist darinnen gz das Gewicht des Goldes, hz das Gewicht des Silbers, und kz das Gewicht des Kupfers. Die letzte Bedingungen geben also zur Auflösung folgende Gleichungen.

§. 281.

Auflösung.

Es ist
$$\begin{aligned} ax + dy + gz &= l \\ bx + ey + hz &= m \\ cx + fy + kz &= n \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung wird

$$x = \frac{l - dy - gz}{a}$$

Diesen Werth von x setze man in der zweiten und dritten Gleichung und multiplicire gehörig, so wird

$$\frac{bl - bdy - bgz}{a} + ey + hz = m$$

$$\frac{cl - cdy - cgz}{a} + fy + kz = n$$

Man multiplicire durch a so bekomt man

$bl - bdy - bgz + aey + ahz = am$

$cl - cdy - cgz + afy + akz = an$

Aus der ersten von diesen beyden letztern Gleichungen zieht man

$aey - bdy = am - bl + bgz - ahz$

und folglich

$$y = \frac{am - bl + bgz - ahz}{ae - bd}$$

Setzt man diesen gefundenen Werth von y wieder in der zweiten von diesen beyden letzten Gleichungen, so ist

$$cl + \frac{(af - cd)(am - bl + bgz - ahz)}{ae - bd} + akz - cgz = an$$

Oder wenn man alles mit dem Nenner $ae - bd$ multiplicirt.

$acel - bcdl + (af - cd)(am - bl + bgz - ahz) + a^2ekz - abdkz - acegz + bcdgz = a^2en - abdn$

Und wenn man ferner die in den Parentheseu eingeschloßne Größen wirklich multiplicirt

$acel - bcdl + a^2fm - abfl + abfgz - a^2fhz - acdm + bcdl - bcdgz + acdhz + a^2ekz - abdkz - acegz + bcdgz = a^2en - abdn$

Läst man nun das weg was sich aufhebt, so wird

$acel + a^2fm - abfl + abfgz - a^2fhz - acdm + acdhz + a^2ekz - abdkz - acegz = a^2en - abdn$

Bringt man alle Glieder in denen nicht z ist auf die rechte Seite und dividirt die ganze Gleichung mit a so wird

$bfgz - afhz + cdhz - bdkz + aekz - cegz = aen - bdn + bfl - afm + cdm - cel$

Divi-

Dividirt man nun durch den Factor von z so wird

$$z = \frac{aen - bdn + bfl - cel + cdm - afm}{bfg - afh + cdh - bdk + aek - ceg}$$

Nachdem der Werth von z gefunden, kann man den Werth von x und y durch Hülfe der beyden ersten Gleichungen finden.

§. 282.

Anmerkung.

Wenn man auf diese Art die Aufgaben auflöst, so ist der Calcul sehr weitläuftig, und man geräth leicht in der Gefahr sich zu irren, und wird öfters genöthiget von neuen wieder anzufangen. Diesem Uebel ist leicht abzuhelfen, wenn man so verfährt: Man multiplicire in den Gleichungen

1) $ax + dy + gz = l$
2) $bx + ey + hz = m$
3) $cx + fy + kz = n$

die erste mit b, die zweite mit a und subtrahire die erste von der zweiten, so wird

$$aey - bdy + ahz - bgz = am - bl$$

Man multiplicire die erste mit c und die dritte mit a und subtrahire die erste von der dritten, so bekomt man

$$afy - cdy + akz - cgz = an - cl$$

Um nun die Rechnung mit mehrerer Bequemlichkeit weiter fortsetzen zu können, setze man

$$ae - bd = \alpha$$
$$ah - bg = \beta$$
$$am - bl = \gamma$$
$$af - cd = \delta$$
$$ak - cg = \varepsilon$$
$$an - cl = \zeta$$

so wird

$$\alpha y + \beta z = \gamma$$
$$\delta y + \varepsilon z = \zeta$$

Man multiplicire die erste Gleichung mit δ und die zweite mit α und subtrahire hernach die erste von der zweiten, so wird

$$\alpha\varepsilon z - \beta\delta z = \alpha\xi - \gamma\delta$$

folglich

$$z = \frac{\alpha\xi - \gamma\delta}{\alpha\varepsilon - \beta\delta}$$

Man multiplicire ferner die erste mit ε und die zweite mit β und subtrahire wie vorhin, so wird

$$(\beta\delta - \alpha\varepsilon)\, y = \beta\xi - \gamma\varepsilon$$

folglich

$$y = \frac{\beta\xi - \gamma\varepsilon}{\beta\delta - \alpha\varepsilon}$$

Den Werth von x kann man nun leicht aus einer von den beyden ersten Gleichungen bekommen, wenn man darinnen vor y und z diese gefundene Werthe setzt. Denn es ist

$$x = \frac{l - dy - gz}{a}.$$

Indessen ist es genug den Werth eines Buchstaben y oder z zu wissen, weil man dadurch in allen Fällen die andre beyde leicht finden kann. Dieser letzten Methode, deren man sich bedienet um die Rechnung in der Absicht abzukürtzen um sie besser übersehen zu können, kann man sich überall bedienen, wo es angeht. Man kann nemlich vor verschiedene Größen, von denen man weiß wie sie von einander abhangen, einen einzigen Buchstaben setzen, welcher ebenfalls bekannt ist; und wenn man die

Auflö-

Auflösung in einem besondern Fall nöthig hat, so bestimmt man diese bekannte Größen und verfährt nach der in der Aufgabe gegebenen Formel.

§. 283.

Diese Aufgabe ist hauptsächlich ganz algemein aufgelöset worden, um zu zeigen wie man mit den Gleichungen umgehen muß, in denen drey unbekante Größen vorkommen. Denn wenn man in einem vorkommenden Fall vor die Buchstaben die gegebene Zahlen setzen wolte, so würde einem die Arbeit saurer werden, als wenn man die Aufgabe in diesem Falle mit bestimmten Zahlen ganz von neuen auflöset. Dahero thut man besser wenn man gleich anstatt die Buchstaben die gegebene Zahlen nimmt, und dadurch die Bedingungen der Aufgabe ausdrückt.

§. 284.

Aufgabe.

Es sind vier Materien A, B, C, D; eine gewisse Quantität *a* von der ersten, und *b* von der zweiten, *c* von der dritten und *d* von der vierten, kosten zusammen genommen M Rthl. Ferner die Quantität *e* von A, *f* von B, *g* von C, *h* von D, kosten zusammen genommen N. Drittens die Quantität *k* von A, *l* von B, *m* von C, *p* von D, kosten zusammen P; und endlich kosten die Quantität *q* von A, *r* von B, *s* von C, *t* von D, zusammen genommen Q. Man will wissen wie viel eine jede Quantität besonders kostet.

§. 285.

Vorbereitung.

Es mögen diese Materien beschaffen seyn wie sie wollen, so wird doch eine gewisse Einheit gegeben, durch die eine jede gemessen wird. Es sey also x der Preiß der Einheit der Materie A; y der Preiß der Einheit der Materie B; z der Preiß der Einheit der Materie C; u der Preiß der Einheit der Materie D. So sind ax, ex, kx, qx, die Preise der verschiedenen Quantitäten a, e, k, q von A; Ferner by, fy, ly, ry die Preise der Quantitäten b, f, l, r von B; cz, gz, mz, sz die Preise der Quantitäten c, g, m, s von C; und du, hu, nu, tu die Preise der Quantitäten d, h, n, t von der vierten Materie D.

§. 286.

Auflösung.

Es ist also

1) $ax + by + cz + du = M$
2) $ex + fy + gz + hu = N$
3) $kx + ly + mz + nu = P$
4) $px + qy + rz + su = Q$

Man multiplicire die Erste Gleichung mit e und die zweite mit a und subtrahire die zweite von der ersten, so wird

$eby - afy + cez - agz + deu - ahu = eM - aN$

Ferner multiplicire man die erste mit k und die dritte mit a und subtrahire die dritte von der ersten, so wird

$bky - aly + ckz - amz + dku - anu = kM - aP$

Eben

Eben so multiplicire man die erste Gleichung mit p und die vierte mit a und subtrahire nach geschehener Multiplication diese letztere von der ersten, so wird

$$pby - aqy + cpz - arz + dpu - asu = Mp - aQ$$

Wenn man nun den Calcul weiter fortsetzen wolte, so würde man in so weitläuftige Rechnungen verfallen, daß es fast nicht möglich wäre, Fehler zu vermeiden. Um denselben also abzukürzen, setze man

$$\begin{array}{llll} eb - af = \alpha & bk - al = \delta & bp - aq = \eta \\ ce - ag = \beta & ck - am = \varepsilon & cp - ar = \theta \\ de - ah = \gamma & dk - an = \xi & dp - as = \lambda \\ eM - aN = M' & kM - aP = N' & pM - aQ = P' \end{array}$$

so erhält man folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha y + \beta z + \gamma u &= M' \\ \delta y + \varepsilon z + \xi u &= N' \\ \eta y + \theta z + \lambda u &= P' \end{aligned}$$

Mit diesen Gleichungen verfahre man eben so, man multiplicire die erste mit δ die zweite mit α und subtrahire die zweite von der ersten, so wird

$$(\beta\delta - \alpha\varepsilon)z + (\gamma\delta - \alpha\xi)u = \delta M' - \alpha N'$$

Ferner multiplicire man die erste mit η und die dritte mit α und subtrahire die dritte von der ersten, so wird

$$(\beta\eta - \alpha\theta)z + (\gamma\eta - \alpha\lambda)u = \eta M' - \alpha P'$$

Um nun weiter so kurz als möglich fortzugehen, setze man

$$\begin{array}{ll} \beta\delta - \alpha\varepsilon = \alpha' & \beta\eta - \alpha\theta = \gamma' \\ \gamma\delta - \alpha\xi = \beta' & \gamma\eta - \alpha\lambda = \delta' \\ \delta M' - \alpha N' = M'' & \eta M' - \alpha P' = N'' \end{array}$$

so bekommt man diese Gleichungen

$$\alpha' z + \beta' u = M''$$
$$\gamma' z + \delta' u = N''$$

Aus der ersten wird $z = \frac{M'' - \beta' u}{\alpha'}$

aus der zweiten $z = \frac{N'' - \delta' u}{\gamma'}$

folglich ist $\frac{M'' - \beta' u}{\alpha'} = \frac{N'' - \delta' u}{\gamma'}$

folglich $M''\gamma' - \beta'\gamma' u = N''\alpha' - \delta'\alpha' u$

hieraus wird $u = \frac{M''\gamma' - N''\alpha'}{\beta'\gamma' - \alpha'\delta'}$

§. 287.

Anmerkung.

Diese Aufgabe zeigt ganz deutlich wie man sehr weitläuftige Rechnung abkürzen kann; man setzt nemlich vor so viel bekannte Buchstaben als es die Einrichtung der Aufgabe leidet, andre bekannte Buchstaben. In der Wahl dieser Buchstaben ist auch öfters ein Vortheil, und man thut allezeit wohl, wenn man solche wählet, bey denen ein gewisses Gesetz im Fortgange in die Augen fällt. Dieses wird in der Folge am besten durch verschiedene Beyspiele gezeigt werden können.

§. 288.

Wenn man diese Aufgabe in einem besondern Fall anwenden wollte, so müste man erstlich vor die Buchstaben *a*, *b*, *c*, *d*, M, N, P, Q die in diesem Falle gegebene Zahlen setzen, daraus alsdenn die Werthe der Buchstaben α β ꝛc. auch in Zahlen

len ausdrücken, und wenn diese gefunden, alsdenn aufs neue die Buchstaben α', β', γ', δ', M'', N'' berechnen. Es ist nicht zu leugnen, daß man besser thäte, wenn man die Aufgabe lieber von Anfang in diesem besondern Fall auflösete; weil aber die Uebung bey einem Anfänger der beste Lehrmeister ist, so ist diese Aufgabe, durch die nach und nach der Weg zur wichtigern Aufgaben gebahnet wird, angeführt worden. Die darin gezeigte Methode um die unbekannte Größen zu bestimmen, kann nicht genug angepriesen werden, ob es gleich auch nicht zu leugnen ist, daß man in manchen Fällen noch leichter zum Zweck kommen kann.

§. 289.

Aufgabe.

Es haben sich sechs Personen in einer Erbschaft getheilet, und die Summe der ersten fünfe ist a, die Summe der 1. 2. 3. 4. 6ten ist b; die Summe der 1. 2. 3. 5. und 6ten ist c; die Summe der 1. 2. 4. 5. 6ten ist d; die Summe der 1. 3. 4. 5. und 6ten ist e; und die Summe der 2. 3. 4. 5. 6ten ist f. Man will wissen, wie viel ein jeder bekommen.

§. 290.

Auflösung.

Es sey x, y, z, u, t, w der Theil der ersten, zweiten, dritten, vierten, fünften und sechsten Person, so ist

$x +$

$$\begin{aligned} x+y+z+u+t &= a\\ x+y+z+u+w &= b\\ x+y+z+t+w &= c\\ x+y+u+t+w &= d\\ x+z+u+t+w &= e\\ y+z+u+t+w &= f \end{aligned}$$

Man subtrahire von der ersten nach und nach alle die übrige Gleichungen, so wird

$$\begin{aligned} t-w &= a-b\\ u-w &= a-c\\ z-w &= a-d\\ y-w &= a-e\\ x-w &= a-f \end{aligned}$$

Alle diese Gleichungen addire man, so bekomt man

$x+y+z+u+t-5w=5a-(b+c+d+e+f)$

da nun $x+y+z+u+t=a$ so wird

$$a-5w=5a-(b+c+d+f)$$

folglich $w=\frac{b+c+d+e+f-4a}{5}$

oder $w=\frac{a+b+c+d+e+f-5a}{5}$

Wenn man nun $a+b+c+d+e+f=f$ setzet, so wird

$$w=\frac{f}{5}-a$$

$$t=\frac{f}{5}-b$$

$$u=\frac{f}{5}-c$$

$$z=\frac{f}{5}-d$$

$$y=\frac{f}{5}-e$$

$$x=\frac{f}{5}-f$$

§. 291.

§. 291.

Anmerkung.

Diese Beyspiele mögen genung seyn, um zu zeigen wie man die Auflösung der Aufgaben vornimt, in denen verschiedene unbekannte Größen vorkommen, die aber weder in einander noch durch sich selbst multipliert werden. Die Auflösung geschiehet bey diesen Gleichungen vom ersten Grade, daß man erstlich aus den Bedingungen der Aufgabe so viel einzelne Gleichungen zu bekommen sucht, als unbekannte Größen da sind; und denn aus jeder den Werth der einen sucht, und ihn nach und nach in den andern Gleichungen setzt. Ob nun zwar diese Methode recht gut ist, so ist sie doch sehr weitläuftig, dahero sind schon hin und wieder andere gezeiget worden. Da man aber diese Methode, die ich hier gewählet, auch in der Folge sehr wird brauchen können, so will ich noch einmal zeigen, wie man die unbekannte Größen bestimmen soll.

§. 292.

Gesetzt man hätte folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
&Ax + By + Cu + Dz + Et + \text{ꝛc.} = F\\
&A^{I}x + B^{I}y + C^{I}u + D^{I}z + E^{I}t + \text{ꝛc.} = F^{I}\\
&A^{II}x + B^{II}y + C^{II}u + D^{II}z + E^{II}t + \text{ꝛc.} = F^{II}\\
&A^{III}x + B^{III}y + C^{III}u + D^{III}z + E^{III}t + \text{ꝛc.} = F^{III}\\
&A^{IV}x + B^{IV}y + C^{IV}u + D^{IV}z + E^{IV}t + \text{ꝛc.} = F^{IV}
\end{aligned}$$

Die ganze Sache kommt nun blos darauf an, daß man nach und nach $x, y, z,$ ꝛc. wegschaft. In dieser Absicht multiplire man nach und nach mit dem Coefficienten von x in der ersten Gleichung, alle übrigen

Glei-

Gleichungen; und nach und nach mit dem Coefficienten von x in den andern Gleichungen die erste Gleichung. Die durch die Multiplication entstandene Gleichungen ziehe man nach und nach von der ersten durch die Multiplication entstandenen Gleichung ab, so erhält man folgende Gleichungen.

$$(BA'-B'A)y+(CA'-C'A)z+(DA'-D'A)u+(EA'-E'A)t=(FA'-F'A)$$
$$(BA''-B''A)y+(CA''-C''A)z+(DA''-D''A)u+(EA''-E''A)t=(FA''-F''A)$$
$$(BA'''-B'''A)y+(CA'''-C'''A)z+(DA'''-D'''A)u+(EA'''-E'''A)t=(FA'''-F'''A)$$
$$(BA^{IV}-B^{IV}A)y+(CA^{IV}-C^{IV}A)z+(DA^{IV}-D^{IV}A)u+(EA^{IV}-E^{IV}A)t=(FA^{IV}-F^{IV}A)$$

Nun setze man

$$(BA^{I}-B^{I}A)=a \qquad BA^{II}-B^{II}A=a^{I}$$
$$(CA^{I}-C^{I}A)=b \qquad CA^{II}-C^{II}A=b^{I}$$
$$(DA^{I}-D^{I}A)=c \qquad DA^{II}-D^{II}A=c^{I}$$
$$EA^{I}-E^{I}A=d \qquad EA^{II}-E^{II}A=d^{I}$$
$$FA^{I}-F^{I}A=f \qquad FA^{II}-F^{II}A=f^{I}$$

$$BA^{III}-B^{III}A=a^{II} \qquad BA^{IV}-B^{IV}A=a^{III}$$
$$CA^{III}-C^{III}A=b^{II} \qquad CA^{IV}-C^{IV}A=b^{III}$$
$$DA^{III}-D^{III}A=c^{II} \qquad DA^{IV}-D^{IV}A=c^{III}$$
$$EA^{III}-E^{III}A=d^{II} \qquad EA^{IV}-E^{IV}A=d^{III}$$
$$FA^{III}-F^{III}A=f^{II} \qquad FA^{IV}-F^{IV}A=f^{III}$$

so bekomt man

$$a\,y+b\,z+c\,u+d\,t=f$$
$$a'\,y+b'\,z+c'\,u+d'\,t=f'$$
$$a''\,y+b''\,z+c''\,u+d''\,t=f''$$
$$a'''\,y+b'''\,z+c'''\,u+d'''\,t=f'''$$

Nun ist leicht einzusehen, daß diese Gleichungen mit der ersten einerley gestalt haben. Dieses ist deswegen

sehr

sehr bequem, weil man dadurch gleich die folgenden Gleichungen finden kann, welche entstehen, wenn man mit diesen eben so verfährt, wie vorher. Denn man darf nur setzen

$ba' - b'a = `a$	$ba'' - b''a = ''a$	$ba''' - b'''a = '''a$
$ca' - c'a = `b$	$ca'' - c''a = ''b$	$ca''' - c'''a = '''b$
$da' - d'a = `c$	$da'' - d''a = ''c$	$da''' - d'''a = '''c$
$fa' - f'a = `f$	$fa'' - f''a = ''f$	$fa''' - f'''a = '''f$

so erhält man diese Gleichungen

$$`az + `bu + `ct = `f$$
$$''az + ''bu + ''ct = ''f$$
$$'''az + '''bu + '''ct = '''f$$

Da diese Gleichungen wieder von der ersten Form sind, so fällt es leicht in die Augen, wie man weiter fortgehen kann.

Diese hier angenommene Art die Coefficienten der unbekannten Größen in den nach und nach entstandenen Gleichungen zu bezeichnen, ist zwar willkührlich, aber sie ist doch besonders bequem, weil man dadurch im Stande ist, schon vorhero den ganzen Fortgang einzusehen. Dadurch ist man aber der Mühe überhoben einen verdrießlichen Calcul zu unternehmen, und man bekomt einen deutlichern Begrif von den ganzen Zusammenhang der Größen.

Vierter Abschnitt.

Einfache geometrische Aufgaben.

§. 293.

Auf eine ähnliche Art wird die Auflösung geometrischer Aufgaben angestellt. Gemeiniglich werden aber die Aufgaben von dieser Art so vorgetragen, daß dabey viele Dinge voraus gesetzt werden, die derjenige wissen soll, welcher die Auflösung unternimt. Wenn man dahero in diesem Stücke fortkommen will, so muß man sich die Anfangs-Gründe der Geometrie so geläufig als möglich zu machen suchen; denn aus denselben werden die Gleichungen hergenommen, welche zu der Auflösung der Aufgaben führen.

Verschiedene geometrische Aufgaben laßen sich öfters ohne Hülfe der Algebra netter und deutlicher auflösen, dahero muß man nicht allezeit gleich seine Zuflucht zum Calcul nehmen, sondern durch fleißiges Nachdenken so weit gehen als man kann. Findet man endlich daß die Reiche der Schlüße so weitläuftig wird, daß man sie kaum mehr übersehen kann, so kann man alsdenn durch die Regeln der Auflösungskunst sich die Arbeit erleichtern. Es ist oft eine größere Kunst eine Aufgabe blos geometrisch auflösen, und es gehört öfters mehr Scharfsinnigkeit dazu, als einen langen und verdrießlichen Calcul

zu

zu machen; ob man zwar auch nicht leugnen kan, daß es eine eben so große Geschicklichkeit ist, einen Calcul auf eine ganz simple und natürliche Art auszuführen. Außerdem giebt es aber auch tausend Fälle, wo der Calcul unumgänglich nöthig ist, und vieleicht wäre die Geometrie noch nicht viel weiter als bey den alten, wenn man den Calcul gänzlich daraus verbannt hatte. Die alten Geometer haben Meisterstücke der geometrischen Auflösungskunst hinterlassen, und wenn man sich darinnen üben will, so darf man nur die Werke eines **Simpson, Mac-Laurin** und anderer strenger Nachfolger der alten, durchgehen. Um in diesen Stücke einigermaßen zu zeigen, worauf es ankomt, will ich folgende Aufgabe nehmen.

§. 294.

Aufgabe.

Es wird die Grundlinie eines Trängels, der derselben gegen über liegende Winkel, und die Summe der bey den übrigen Seiten gegeben; man soll die beyde Seiten jede besonders bestimmen.

§. 295.

Geometrische Auflösung.

Man nehme an, die Aufgabe wäre aufgelöset und A B C wäre der verlangte Triangel, dessen Grundlinie A B der gegebenen Linie A, und die Summe der beyden übrigen Seiten A C und B C der gegebenen Linie B und der Winkel A C B dem gegebenen Winkel C gleich ist. Man untersuche Fig. 18.

nun, was aus dieser Voraussetzung folgen muß. In dieser Absicht verlängere man die Seite BC bis in D, so daß die Linie BD der Summe der beyden Seiten AC, BC, oder der Linie B gleich ist. Man ziehe hierauf die Linie AD.

In dem Triangel ACD ist also die Seite AC der Seite CD gleich, denn die Summe der Seiten AC und CB ist der Linie B, folglich auch der Linie BD gleich, weil BD auch so groß ist, als B. Hieraus folgt also, daß die Linie AC der Linie DC gleich, und demnach der Triangel ACD ein gleichschenklichter ist.

Es ist also der Winkel ADC dem Winkel CAD gleich, wegen der Natur des gleichschenklichten Triangels. (Euc. 5. 1) Der Winkel ACB ist aber der Summe der beyden Winkel ADC, DAC gleich, folglich ist der Winkel ADC der Hälfte des Winkels ACB gleich. Da nun der Winkel ACB dem gegebenen Winkel C gleich ist, so ist auch der Winkel ADC der Hälfte des gegebenen Winkels C gleich.

Eben so kann man zeigen, daß der Winkel E dem halben gegebenen Winkel C gleich ist, wenn man AC bis E verlängert, daß AE der Linie B gleich ist, und die Linie BE zieht.

Hieraus sieht man leicht, daß man den Triangel durch die Zeichnung folgender gestalt bestimmen muß.

§. 296.

§. 296.

Constrinktion.

Man nehme die Linie B D so groß an, als die Lienie B, oder die Summe der beyden gegebenen Seiten. In dem Punkt D beschreibe man einen Winkel F D B, welcher der Hälfte des gegebenen Winkels C gleich ist. Aus dem Punkt B beschreibe man alsdenn mit der Entfernung B A, welche der gegebenen Grundlienie A gleich ist, ein Bogen, welcher die Lienie D F in A durchschneidet. In dem Punkt A beschreibe man einen Winkel D A C welcher dem Winkel D oder auch der Hälfte des gegebenen Winkels C gleich ist. Zieht man nun die Lienie A C, so ist A B C der verlangte Triangel. Fig. 19.

§. 297.

Beweis.

Denn der Winkel A C B ist den beyden Winkeln A D C und D A C, folglich dem Winkel C gleich. Die beyden Seiten A C, C A sind aber so groß, als die Seiten B C und D C, weil D A C ein gleichschenklichter Triangel ist. (Euc. 6. 1.) Die Grundlienie A B ist ferner der gegebenen Grundlienie A gleich. Folglich hat der Triangel A B C die erforderlichen Eigenschaften.

§. 298.

Anmerkung.

Es ist aber nicht genug die Auflösung anzugeben, man muß auch zeigen, in welchem Falle die Aufgabe möglich, und in welchem sie unmöglich ist,

und ob sich auch noch andre Fälle gedenken lassen, welche der Aufgabe ein Genüge thun.

Wenn diese Aufgabe möglich seyn soll, so muß die Linie B A die Lienie D F durchschneiden, und wenn dieses nicht geschieht, so ist die Aufgabe nicht möglich, und man kann sicher behaupten, daß sich aus den gegebenen drey Stücken kein Triangel verfertigen läßt.

Wenn aber die Lienie A B der Linie D F begegnet, so geschiehet dieses entweder in zwey Punkten, oder nur in einem.

Im ersten Fall sind alle beyde Triangel A B *c* *a* B *c* so beschaffen, als es die Aufgabe erfordert. Sie sind auch einander in allen Stücken gleich, und blos der Lage nach von einander unterschieden. Denn da der Winkel A D C dem Winkel D A C und dieser dem Winkel D *a* C gleich ist, so sind die Lienien A C und *a c* parrallel. Der Triangel A B *a* ist aber ein gleichschenklichter, und folglich der Winkel B A *a* dem Winkel A *a* B gleich. Der Winkel B A *a* ist aber den beyden Winkeln A D B und A B D zusammengenommen gleich. Da nun der Winkel A *a* B dem Winkel B A *a* gleich ist, so ist auch der Winkel A *a* B den Winkel A D B und A B D zusammen gleich. Es ist aber der der Winkel A *a* B den Winkeln A *a c* und *c a* B gleich. Dahero ist die Summe der Winkel A *a c* und *c a* B der Summe der Winkel A D B und D B A gleich. Es ist aber der Winkel A *a c* dem Winkel A D B gleich, folglich ist auch der Winkel D B A dem Winkel *c a* B gleich.

Hier-

Hieraus folgt aber, daß auch der Winkel CAB dem Winkel cBa gleich ist. In den beyden Triangeln BAC und Bac ist also $AB = Ba$, $ac = BC$ und $BC = AC$. Folglich sind die Triangel nur der Lage nach unterschieden.

§. 299.

Wenn aber die Linie BA der Lienie DF nur in einem Punkte begegnet, so ist nur ein einziger Triangel möglich, und dieser ist ein gleichschenklichter. Denn weil alsdenn die Linie BA auf DF perpendikular ist, so ist der Winkel BAF dem Winkel BAD gleich. Folglich da der Winkel D nebst dem Winkel DBA zusammen einen rechten Winkel machen, und der Winkel DAC dem Winkel D gleich ist, so ist auch der Winkel BAC dem Winkel ABC gleich und also der Triangel ABC ein gleichschenklichter, so, daß $AC = CB$.

§. 300.

Auf diese Art ist also die Aufgabe in ihrem völligen Umfange aufgelöset worden. Auf eine ähnliche Art verfährt man mit andern Aufgaben, wenn man sie ohne Hülfe der Algebra auflösen will. Es lassen sich in diesem Stücke keine Regeln geben, ein jeder muß sich die meisten selbst erfinden. Inzwischen thut man allezeit wohl, wenn man die Aufgabe schon als aufgelöset annimt, und alsdenn zurück auf die Grundsätze der Geometrie geht. Es wird niemanden gereuen, wenn er sich in dieser Art geometrischer Auflösungen übet, es wird ihm alsdenn leicht fallen, die algebraische Auflösungen zu unter-

nehmen, davon folgende Aufgaben einige Beyspiele abgeben sollen.

§. 301.

Aufgabe.

In dem Triangel A B C werden alle Seiten gegeben. Aus der Spitze des Winkels A, welcher der Grundlinie B C gegen über liegt, wird die Lienie A D auf die Grundliene perpendikulär gezogen. Man soll die Theile B D, D C, der Grundlienie bestimmen.

§. 302.

Vorbereitung.

Fig. 20. Man drücke die gegebene Seiten alle durch Buchstaben aus, und setze B C = a, B A = b, A C = c; den einen Theil der Grundlienie, als B D, nenne man x, so wird der andre $DC = a - x$. Durch die perpendikulär Lienie A D wird der Triangel A B C in zwey recht winklichte Triangel getheilet. Nun ist in einem jedem rechtwinklichten Triangel das Quadrat der grösten Seite der Summe der Quadrate aus den beyden übrigen Seiten gleich. (Euc. 47. 1) Wenn man diese Eigenschaft hier anwendet, so wird das Quadrat der Seite B A so groß, als die Summe der Quadrate aus B D und A D seyn. Eben so wird auch das Quadrat der Seite A C so groß, als das Quadrat der Seite A D und der Seite D C. Dieses muß statt finden, der Triangel mag beschaffen seyn, wie er will. Drückt man nun diese Sätze durch die Zeichen aus, welche angenommen worden, und

geht

geht mit denselben so um wie schon öfters gezeigt worden, so wird es nicht schwer seyn, der Aufgabe ein Genüge zu leisten.

§. 303.

Auflösung.

Das Quadrat der Seite AB ist bb, das Quadrat der Seite BD ist xx, das Quadrat der Seite AC ist cc, und das Quadrat der Seite CD ist $(a - x)(a - x)$. Es ist also

$$bb = x^2 + AD^2$$
$$c^2 = (a - x)(a - x) + AD^2$$

Es ist also $bb - x^2 = AD^2$
und $c^2 - (a - x)(a - x) = AD^2$
folglich $bb - x^2 = c^2 - (a - x)(a - x)$

Bringt man nun alle die Glieder, in denen x vorkomt, auf die eine Seite und die andern bekannten auf die andre, so wird

$$(a - x)(a - x) - x^2 = c^2 - b^2$$

oder wenn man die Multiplication wirklich verrichtet, und die Glieder welche sich aufheben, weg läst.

$$a^2 - 2ax + x^2 - x^2 = c^2 - b^2$$
oder $a^2 - 2ax = c^2 - b^2$
folglich $2ax = a^2 + b^2 - c^2$
und $x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$

oder $x = \frac{a}{2} + \frac{b^2 - c^2}{2a}$

oder da $\frac{b^2 - c^2}{2a} = \frac{(b + c)(b - c)}{2a}$

so ist auch $x = \frac{a}{2} + \frac{(b + c)(b - c)}{2a}$

§. 304.

Anmerkung.

Diese Auflösung ist auf alle mögliche Fälle eingerichtet, und sie verändert sich nach Beschaffenheit der gegebenen Größen. Es sey z. E. $b = a$, so wird $x = \frac{2a^2 - cc}{2a}$. Ist aber $b = c$, so wird $b - c = a$, folglich ist $x = \frac{a}{2}$

§. 305.

Es kann ferner AC größer seyn als AB, in diesem Falle ist $\frac{(b + c)(b - c)}{2a}$ negativ, und $x = \frac{a}{2} - \frac{(c + b)(c - b)}{2a}$.

Dieses kann sich öfters zutragen, es geschiehet aber allezeit gewiß, wenn der Winkel B ein stumpfer Winkel ist. In diesem letztern Falle aber ist auch x negativ. Denn da $x = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{2a}$ und c^2 größer, als $a^2 + b^2$ (Euc. 12. 2.) so wird x nothwendig eine negative Größe.

§. 306.

Wenn man den Werth der unbekannten Größe durch algebraische Zeichen ausgedrückt hat, und man erklärt dieselben gehörig, so kann man mit einen Blick das ganze Verfahren einsehen, nachdem man die Aufgabe geometrisch auflösen muß. Man kann aber auch die ganze Formel in die geometrische Sprache übersetzen. Und damit man in diesem

Stücke

Stücke nicht zu weitläuftig werde, ist es gut, wenn man mit der Formel noch einige Veränderungen vornimt, ohne daß der Werth der unbekannten Größe darunter selbst leidet, dadurch aber der Ausdruck derselben kürzer wird. Also multiplicire man hier $2a$ mit 2 und dividire eben durch 2, so wird.

$$x = \frac{a}{2} + \frac{\frac{(b+c)}{2}\,\frac{(b-c)}{2}}{\frac{a}{2}}$$

Es ist also dieser Theil x aus der halben Grundlienie BC und der vierten proportional Lienie zu der halben Grundlienie, der halben Summe der beyden übrigen Seiten BA + AC und der halben differenz der Seiten BA und AC, zusammen gesetzt. Dieses ist aber nur im strengen Verstande alsdenn richtig, wenn b oder BA größer ist, als AC, ist aber BA kleiner, als AC, so muß man diese vierte proportional Lienie von $\frac{1}{2}$ BC subtrahiren.

§. 307.

Wenn man diese Aufgabe algebraisch aufgelöset, und die letzte Formel durch welche die unbekannte Größen gegeben werden, gehörig erkläret hat, so wird es nicht schwer fallen, die Aufgabe geometrisch aufzulösen, indem man sich dazu blos der Lienien bedienet, welche in einer geraden Fläche beschrieben werden. Im gegenwärtigen Falle aber kann man diese Stücke BD, DC leichter finden, wenn man

nur aus den gegebenen Seiten einen Triangel verfertigt, und alsdenn die perpendikulär Lienie A D zieht. Wolte man aber diese Größe x nach Anleitung der Formel finden, so müste man die vierte proportional Lienie zu $\frac{1}{2}a$, $\frac{b+c}{2}$ und $\frac{b-c}{2}$ suchen, und denn dieselbe zu $\frac{1}{2}a$ hinzusetzen, oder davon wegnehmen.

§. 308.

Der Hauptvortheil, den man aus der algebraischen Auflösung geometrischer Aufgaben zieht, bestehet darin, daß man den Zusammenhang der bekannten und unbekannten Lienien besser übersieht, und das was man sucht in praktischen Fällen leicht durch die Rechnung bestimmen kann. Denn wenn man die Lienien AB, AC, BC, nach einem gewißen angenommenen Maaße durch Zahlen ausdrückt, so findet man durch die algebraische Formel die Theile der Grundlienie in Zahlen, welche sich auf eben das Maas beziehen. Es sey z. E. $a = 30$ Ruthen, $b = 26$ Ruthen, $c = 22$ Ruthen, so wird $x = \frac{30}{2} + \frac{48.4.}{60}$ oder $x = 15 + \frac{48}{15}$ $= 15 + 3 + \frac{3}{15} = 18\frac{1}{5}$ Ruthen.

§. 309.

Uebrigens sind die Gleichungen, welche zu der Auflösung führen, aus den Anfangsgründen der Geometrie genommen worden, und daraus werden sie auch noch beständig in der Folge genommen werden. Die

geome-

geometrische Aufgaben sind aber sehr verschieden, und man muß öfters Flächen, Winkel, Körper ꝛc. mit einander nach ihren Eigenschaften vergleichen, wenn man seinen Zweck erreichen will. Jedoch muß man so viel möglich die Auflösung blos durch Hülfe gerader Lienien zu bewerkstelligen suchen, wenn es angeht, und überhaupt allemahl den leichtesten und kürzesten Weg zu betreten suchen. In dieser Absicht kann man alle bekannte Eigenschaften von den Figuren, Flächen, Körper und andre Aufgaben, die schon aufgelöset sind, als bekannt annehmen, oder als gegebene Dinge betrachten. In diesem Stücke werden einem die Data des Eculides besonders zu statten kommen.

§. 310.

Was die Winkel anbelanget, so bedienet man sich derselben nicht in dem Calcul, es müste denn seyn, daß derselbe etwa mit einen andern Winkel verglichen würde, anstatt dessen nimmt man aber eine Verhältniß, durch welche die Größe des Winkels bestimt wird. Diese Verhältniße zeigen besonders die Sinus Tafeln an. Denn so bald als ein Winkel gegeben wird, so wird auch aus den Tafeln, dessen Sinus, Cosinus, Tangente ꝛc. gegeben, und wenn man den Sinus ꝛc. eines gewissen Winkels weiß, so ist sogleich der Winkel bekannt.

§. 311.

Wenn diese Sinus und Cosinus gegeben werden, so kann man dieselben entweder durch einzelne Buchstaben ausdrücken, oder man kann sie auch so schreiben, Sin. A, Cos. A. Dieses bedeutet, den

Sinus

Sinus oder Cosinus des Winkels A, oder des Bogen A. Eben so bedeuten Tang. A, Cot. A, Sec. A, Cosec. A. Die Tangente, Cotangente, Secante, Cosecante ꝛc. des Winkels A. Diese Art zu schreiben ist zuweilen bequemer, als wenn man lauter Buchstaben nimt, zuweilen ist es zuträglicher, sich der Buchstaben zu bedienen.

§. 312.

Fig. 21. Der Nutzen dieser in der Trigonometrie so bekannten Dinge ist überhaupt in der ganzen Mathematik so algemein und wichtig, und der Calcul wird dadurch so erleichtert, daß ich nicht umhin kann, mich dabey etwas aufzuhalten. Es sey also AB der vierte Theil eines Zirkels, dessen Mittelpunkt C und AC der Radius auf dem DC in C perpendikulär ist. AB ein gewisser Bogen. Man ziehe die Lienien HA und GD, welche auf AC und CD in A und D perpendikulär sind, und also den Zirkel in diesen Punkten berühren. Man ziehe ferner die Lienien CB und verlängre sie, bis sie die Lienien AH und DG in H und G durchschneidet. Endlich ziehe man die Lienien BE, BF auf CA und CD perpendikulär, so ist AH die Tangente, CH die Secante, DG die Cotangente, CG die Cosecante, EB der Sinus, BF = CE der Cosinus des Winkels ACB oder des Bogen AB.

Nun sind die rechtwinklichte Triangel CBE, CHA, CBF, CGD alle einander ähnlich, und es ist also CE: BE = CA: HA; oder wenn r den Radius bedeutet, und A den Bogen oder Winkel BCA.

Cos.

Cos. A: Sin. A = r: tg A

2) CE: CB = CA: CH. oder
Cos. A: r = r: Sec. A.

3) CF: FB = CD: DG. oder
Sin. A: Cosin. A = r: Cot. A.

4) CF: CB = CD: CG. oder
Sin. A: r = r: Cosec. A.

§. 313.

Diese Proportions dienen dazu um die Sinus und Cosinus ꝛc. zu verändern, denn man kann diese Proportions auch so schreiben,

$$\text{Tang. A} = \frac{r \text{ Sin. A}}{\text{Cos. A.}} \qquad \text{Sec. A} = \frac{r^2}{\text{Cos. A}}$$

$$\text{Cot. A} = \frac{r \text{ Cos. A}}{\text{Sin. A}} \qquad \text{Cosec. A} = \frac{r^2}{\text{Sin. A}}$$

Diese Ausdrücke kann man noch auf sehr verschiedene Art verändern, und wenn man besonders den Radius als 1 ansiehet, so wird

1) tg A = $\frac{\text{Sin. A}}{\text{Cos. A}}$ 3) Sec. A = $\frac{1}{\text{Cos. A}}$

2) Cot. A = $\frac{\text{Cos. A}}{\text{Sin. A}}$ 4) Cosec. A = $\frac{1}{\text{Sin. A}}$

Hieraus wird aber wieder tg A = $\frac{1}{\text{Cotang. A}}$ welches man leicht sieht, wenn man nur die ersten beyden in einander multiplicirt. Uebrigens kann man aus diesen vier Formeln noch verschiedene andre herleiten.

§. 314.

Der Radius pflegt beständig als 1 betrachtet zu werden, damit man nicht nöthig hat die verschiedene

dene Dignitäten desselben mit in Rechnung zu bringen. In den bekannten Sinus Tafeln wird derselbe aber 10000000 angenommen, will man dieselben nun in andre verwandeln, wo der Radius 1 ist, so muß man von der letzten Ziffer rechter das (,) um sieben Ziffern nach der linken zu rücken. Z. E. In den Tabellen ist der Sinus von $8^\circ = 1391731$. wenn also der Radius $= 1$ ist, so ist der Sinus von $8^\circ = 0,1391731$. Eben so ist in den Tabellen der Sinus von $28^1 = 81448$. Wenn aber der Radius 1 angenommen wird, so ist der Sinus $28^1 = 0,0081448$. Auf gleiche Weise muß man mit den Tangenten, Seckanten die verfahren. Man hat deswegen den Radius in den Tabellen so groß angenommen um die Decimal Brüche zu vermeiden, wobey aber im Grunde keine Schwürigkeit ist.

§. 315.

Fig. 22. Ein jeder Winkel wird aber auch völlig bestimmt, wenn man von den Schenkeln, desselben die Linie A, B, A C abschneidet, und die Punkte B und C durch die gerade Linie B C vereinigt. Denn da der Winkel gegeben wird so wird auch die Lage der Schenkel desselben gegeben. folglich wird die Verhältnis A B: B C und B C: A C gegeben.

§. 316.

Wenn nun wieder umgekehret die Verhältnis A B: A C und B C: A C gegeben wird, so wird auch

auch der Winkel A gegeben, jedermann kan denselben allezeit beschreiben, wens nöthig ist. Denn wenn man diese drey Linien A, B, C dergestalt nimt, daß A: C = AB: BC und B: C = BC: AC ist, und mit diesen Linien den Triangel *a b c* beschreibt dergestalt daß *a c* = C; *a b* = A und Fig. 28.
BC = B so ist der Triangel *a b c* dem erstern ABC ähnlich, folglich der Winkel *b a c* dem Winkel BAC gleich. Folglich wird dieser Winkel in allen Triangeln durch diese gegebene Verhältnisse bestimmt.

§. 317.

Wenn aber die Linie BC auf AC perpendikulär gezogen wird, so wird der Winkel A blos durch die Verhältniß der Linien BC zu AC bestimmt, die entweder durch diese Lienien selbst, oder durch zwey andre gegeben wird, so daß wenn A und B diese Lienien sind. A: B = BC: AC ist. Hieraus folgt auch, daß man A und B durch absolute Zahlen ausdrücken kann, und daher sind eben, die Sinus Tafeln entstanden.

§. 318.

Aufgabe.

Es werden in einen Triangel die Grundlienie und die beyde an der Grundlenie liegende Winckel gegeben, man soll die Höhe dieses Triangels finden.

§. 319.

Vorbereitung.

Man solle sich vor ABC sey der Triangel, Fig. 20.
und AD sey die verlangte Höhe, welche man *x* nennt.

nennt. Die gegebene Grundlienie BC nenne man a. Weil nun die Winkel B und C gegeben werden, so wird auch die Verhältniß CD: AD gegeben. Eben so wird auch die Verhältniß BD: AD gegeben. (§. 316.) Es sey also CD: AD $= k : h$ und BD: AD $= g : f$, so wird BD $= \frac{gx}{f}$ und CD $= \frac{kx}{h}$.

§. 320.

Auflösung.

Es ist aber BC = BD + DC

folglich $a = \frac{gx}{f} + \frac{kx}{h}$

und wenn man die ganze Gleichung mit fh multiplicirt

$$fah = ghx + fkx$$

oder $(gh + fk)\,x = afh$

folglich $x = \frac{afh}{gh + fk}$

§. 221.

Anmerkung.

Weil ABD, ACD recht winklichte Triangel sind, so wird BD: AD $= 1 : tg$ B und CD, AD $= 1 : tg$ C, hieraus aber BD $= \frac{x}{tg\,B}$ und CD $= \frac{x.}{tg\,C}$ Folglich $a = \frac{x}{tg\,B} + \frac{x}{tg\,C}$ und da $1 = tg\,B$ und $1 = tg\,C$. So ist $a = x$ (Cot. B + Cot. C) und demnach $x = \frac{a.}{\text{Cot. B} + \text{Cot. C}}$ Und wenn einer von

den

den beyden Winkeln stumpf wäre, z. E. der Winkel C, so würde $x = \frac{a}{\text{Cot. B} - \text{Cot. C}}$ seyn, weil die Cotangenten eines stumpfen Winkels negativ sind.

§. 322.

Diese Aufgabe ist an und vor sich leichter durch die bloße Geometrie zu finden; diese algebraische Formel dient aber dazu, um in praktischen Sachen, geschwinder fortzukommen. Uebrigens muß man sich dieser Auflösungen bedienen, um die Grenzen der Geometrie zu erweitern. Also kann man hiedurch leicht den Inhalt eines Triangels finden, wenn die Grundlienie und die an derselben liegende Winkel bekannt sind. Denn da der Inhalt eines Triangels entsteht, wenn man die Grundlienie mit die $\frac{1}{2}$ Höhe multiplicirt, so ist der Inhalt des Triangels $\text{A B C} = \frac{a^2}{2(\text{Cot. B} + \text{Cot. C})}$

§. 323.

Es sey z. E. die Grundlienie $a = 24$ Ruthen und der Winkel $\text{B} = 36°$ und $c = 85°$, so ist die Cot. $36° = 1,376$ und Cot. $85° = 0,087$ folglich ist der Inhalt des Triangels $= \frac{24 \times 24}{2(1,376+0,087)}$ $= \frac{12.24}{1,463} = 190$ Ruthen ohngefehr.

§. 324.

Aufgabe.

Es werden in einem Triangel zwey Seiten und der Winkel den sie einschließen, gegeben, man soll die übrige Winkel finden.

§. 325.

Auflösung.

Fig. 20. Man setze A B C sey der verlangte Triangel, und die gegebene Seiten A B = *a*; B C = *b*. und B der gegebene Winkel. Man ziehe von A auf B C die Linie A D perpendikulär, so ist in den rechtwinklichten Triangel A B D; A B : B D = rad: Cos. B, folglich ist B D = *a*. Cos. B, eben so ist A B: A D = rad: Sin. B, folglich A D = *a*. Sin. B.

Es ist aber C D = B C — B D oder C D = *b* — *a* Cos. B. Da nun ferner A C D ein rechtwinklichter Triangel ist, so wird C D: A D = rad: *tg* C, folglich, wenn man vor C D, und A D die gefundene Werthe setzet, so wird

$$b - a \text{ Cos. } B : a \text{ Sin. } B = \text{rad} : tg\, C$$

und also $tg\, C = \frac{a \text{ Sin. } B}{b - a \text{ Cos. } B}$ weil rad: = 1

Da nun die Tangente des Winkels B bekannt ist, so weiß man den Winkel C und folglich auch den Winkel A.

§. 326.

Anmerkung.

Diese Aufgabe gehöret eigentlich in die Trigonometrie, wo man sie auch schon aufgelöset findet. Diese Auflösung hier ist aber in der Ausübung weit bequemer, als die gewöhnliche: Es sey z. E. *a* = 20 Ruthen, *b* = 30; Der Winkel B = 50°. So ist Sin. 50° = 0, 766 und Cos. 50° = 0, 642. Hieraus wird *a* Sin. B = 20 × 0,

766

766 und $b - a$. Cos. B = 30 — 20 × 0, 643 = 30 — 12, 86 = 17, 14. Folglich ist tg C = $\frac{20 \times 0, 766}{17, 14} = \frac{7, 66}{8, 57}$. Nun kann man das Uebrige entweder durch die wirkliche Division oder durch Hülfe der Logaritmen verrichten. Im ersten Falle findet man tg C = 0, 89383, folglich ist C = 41° 48′. Nimmt man die Logaritmen, so ist Log. 7, 66 = 0, 8842288 und Log. 8, 57 = 0, 9329808, also Log. tg C = — 0, 0487520. Wenn man diesen Logaritmus in den gewöhnlichen Tabellen sucht, so findet man ihn nicht so. Dieses komt aber daher, weil der Logaritmus des Radius in den Tabellen 10 ist. Man muß also diesen Logaritmus von 10 subtrahiren und denn wird der Logaritmus der Tangente des Winkels C nach den Tabellen 9, 9512480, welcher ebenfalls zeigt, daß der Winkel C = 41° 48′ ist.

§. 327.

Wenn der Winkel B ein stumpfer Winkel ist, so ist der Cosinus desselben negativ und in diesem Falle wird tg C = $\frac{a. \text{Sin. B}}{b + a \text{Cos. B}}$. Will man aber den Radius mit herein bringen, damit man sich desto bequemer der gewöhnlichen Sinus Tafeln bedienen kann, so ist Tang. C = $\frac{r. a. \text{Sin. B}}{br \mp a \text{ Cos. B}}$ in der r den Radium aus den Tabellen oder 10000000000 bedeutet. Unten im Nenner sind die Zeichen $\mp$ deswegen gesetzt, um beyde Fälle zu-

gleich anzuzeigen, wenn der Winkel B ein stumpfer oder ein spitzer ist, und das Zeichen + gilt im ersten und — im zweiten Fall.

§. 328.

Es sey z. E. der Winkel $B = 120°$ die Seite $AB = a$ 50 Ruthen, $BC = b = 75$ Ruthen. So ist der Sinus $120° = 8660254$ und Cos. $120° =$ Sin. $30° = \frac{1}{2} r$ folglich $tg\,C = \frac{r \times 50 \times 8660254}{r.\,75 + 50 \times \frac{1}{2} r}$ oder $tg\,C = \frac{86602540}{2}$ 4330127, also $C = 23° 24'$

§. 329.

Aufgabe.

Es wird der Umkreis eines Triangels, ein Winkel desselben, und die perpendikulär Lienie gegeben, welche von der Spitze dieses Winkels auf die gegen über liegende Seite gezogen worden: Man soll den Triangel bestimmen.

§. 330.

Vorbereitung.

Fig. 24. Man nehme an ABC sey der verlangte Triangel, in dem der Winkel A dem gegebenen gleich ist. AD sey die gegebene perpendikulär Lienie, welche man b nennen kann. Da nun der ganze Umkreis dieses Triangels gegeben wird, so setze man $AB + BC + AC = a$. Weil man den ganzen Triangel bestimmen soll, so muß man alle Seiten desselben angeben. Dahero nenne man BC, x; AB, u; AC, z. Um nun diese Größen zu bestim-

bestimmen, müste man drey Gleichungen haben, und es ist zu vermuthen, daß die Rechnung etwas weitläuftig werden würde. Man siehet aber leicht ein, daß man kürzer zu seinem Zwecke kommen kan, wenn man die Differenz der beyden Seiten AB und AC, y nennt. Denn da $AB + AC + x = a$ so wird $a - x = AB + AC$ und weil $y = AB - AC$, so ist $AB = \frac{a - x + y}{2}$

und $AC = \frac{a - x - y}{2}$.

Man ziehe von B auf AC die Linie BE perpendikulär. Weil nun der Winkel BAC gegeben wird, so werden auch der Sinus und Cosinus desselben gegeben. Es sey also c der Cosinus und f der Sinus des Winkels BAC.

Die Linie BE theilet den ganzen Triangel in zwey rechtwinklichte Triangel BAE und BEC. Es ist also nach den Eigenschaften des rechtwinklichten Triangels $BC^2 = BE^2 + CE^2$.

Es ist aber auch $BE^2 = BA^2 - AE^2$ und $CE^2 = (CA - AE)^2$ oder $CE^2 = AC^2 - 2CA.AE + AE^2$. Hieraus wird also

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2CA.AE$.

Wenn man aber die Triangel ADC, BCE etwas genauer untersucht, so findet man, daß sie einander ähnlich sind. Denn der Winkel C ist in beyden gemeinschaftlich, und da beyde rechtwinklicht sind, so folgt auch daß der Winkel DAC dem Winkel CBE gleich ist. Es sind also in beyden

Triangeln die Linien, welche um gleiche Winkel auf einerley Art liegen, proportional. Also ist

$$AD : AC = BE : BC$$

§. 331.

Auflösung.

Weil $AB : AE = \text{rad} : \text{Cos. } A$ und $AB : BE = \text{rad. Sin. } A$. so wird $AE = c. \frac{(a-x+y)}{2}$ und $BE = f\frac{(a-x+y)}{2}$. Aus der andern Proportion $AD : AC = BE : BC$ oder $b : \frac{a-x-y}{2} = BE : x$ wird $BE = \frac{2bx}{a-x-y}$

Setzt man nun diese beyde Werthe einander gleich, so ist $f\frac{(a-x+y)}{2} = \frac{2bx}{a-x-y}$

und wenn man mit $a-x-y$ multiplicirt

$$a^2 - 2ax + x^2 - y^2 = \frac{4bx}{f}$$

folglich wird $y^2 = x^2 - 2ax + a^2 - \frac{4bx}{f}$

Da ferner $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2CA.AE.$ und man setzt hierin die gehörigen Werthe, so wird

$$x^2 = \frac{(a-x+y)^2}{4} + \frac{(a-x-y)^2}{4} - 2\frac{(a-x-y)}{2} \times c\frac{(a-x+y)}{2} \text{ oder}$$

$$x = \frac{a^2 - 2ax + x^2 + 2ay - 2xy + y^2}{4}$$

$$+ a^2$$

$$\frac{+a^2-2ax-2ay+x^2+2xy+y^2}{4}$$

$$\frac{-(2ca^2-4acx+2cx^2-2cy^2)}{4}$$

Läßt man nun die Glieder weg die einander aufheben, so wird

$$x^2=\frac{2a^2-4ax+2x^2-2ca^2+4acx-2cx^2+2y^2+2cy^2}{4}$$

oder

$$4x^2=2a^2-4ax+2x^2-2ca^2+4acx-2cx^2+(2+2c)y^2$$

dividirt man alles mit 2 und bringt die Glieder in denen nicht y^2 ist, auf die eine Seite, so wird

$$x^2-a^2+(2a-2ac)x+ca^2+cx^2=(1+c)y^2$$

folglich wenn man alles durch $1+c$ dividirt,

$$\frac{(1+c)x^2+2(a-ac)x-(1-c)a^2}{1+c}=y^2.$$

Man hat also zwey Werthe von y^2 die einander gleich sind,

$$x^2-2ax+a^2-\frac{4bx}{f}=x^2+\frac{2ax-2acx-a^2+ca^2}{1+c}$$

läßt man hier x^2 weg und multiplicirt mit $1+c$ so wird

$$-2ax-2acx+a^2+ac^2-\frac{4bx-4bcx}{f}=2ax-2acx-a^2+ca$$

und wenn das weggelassen wird, was einander aufhebt

$$-4ax+a^2-\frac{4bx-4bcx}{f}=-a^2$$

Man multiplicire durch f so wird

$$-4afx+a^2f-4bx-4bcx=-a^2f$$

oder

$(-4af-4b-4bc)\,x = -2a^2f$

oder $(4af+4b+4bc)\,x = 2a^2f$

folglich $x = \frac{aaf}{2af+2b+2bc}$

§. 332.

Anmerkung.

Nachdem man die Seite bestimt hat, welche dem gegebenen Winkel gegen über liegt, so ist es leicht die übriegen zu bestimmen. Um aber doch auch zu zeigen, wie man diesen Werth von x geometrisch construiren muß, so beschreibe man einen Winkel A der dem gegebenen gleich ist. Auf dem einen Schenkel desselben nehme man die Lienie $AF = a$, und ziehe FH auf dem andern Schenkel AG perpendikulär, so wird $FH = af$. Denn $1 : f = AF$ Fig. 25 $(a) : FH$. Und da auch $AF : AH = 1 :$ Cos. A, so wird $AH = a$. Cos. $A = ac$. Man nehme ferner auf den Schenkel AF, die Lienie $AK = b$ und ziehe KL auf AH perpendikulär so wird $AK\,(b) : AL = 1 :$ Cos. $A = 1 : c$, also ist $AL = bc$.

Man verlängere ferner die Lienie FH und nehme auf derselben $HM = b$ und $MN = AL$ theile AF in O in zwey gleiche Theile, und ziehe die Lienie NO und mit derselben HP parrallel, so ist FP die Seite welche dem Winkel A in dem Triangel gegen über liegt, oder x. Denn es ist $FN : FO = FH : FP$ oder da $FN = af + b + bc = AH + HM + AL$, $af + b + bc : \frac{1}{2}a = af : FP$ folglich ist

$FP =$

$$FP = \frac{aaf}{2(af + b + bc)} = x$$

Nachdem diese Seite geometrisch bestimt worden, so kann man die andern folgendergestalt bestimmen. Man beschreibe über FP ein Segment FPRSF in dem der Winkel dem gegebenen gleich ist (Euc. 3. Buch. 33 Satz). Aus einem Punkte in der Lienie AF, als aus F richte man eine Lienie perpendikulär auf, und nehme auf derselben die Lienie $FQ = b$. Hierauf ziehe man durch Q die Lienie SR parrallel mit AF; wenn nun diese Lienie den Zirkel in S und R durchschneidet und man ziehet die Lienien FR und PR, oder FS und PS, so ist ein jeder von diesen beyden Triangeln der verlangte Triangel. Denn in einem jeden von diesen Triangeln ist die Grundlienie so, als sie durch die Auflösung bestimt worden, der Winkel welcher dieser Grundlienie gegen über liegt, ist dem gegebenen Winkel gleich, und die Höhe des Triangels ist ebenfalls so groß, als die gegebene.

§. 333.

Es ist noch übrig, daß man die Fälle bestimt, wenn die Aufgabe möglich und unmöglich ist. Nun ist offenbar, daß die parrallel Lienie SR entweder den Zirkel durchschneidet, oder denselben in einem Punkte berühret, oder dem Zirkel gar nicht begegnet. Im ersten Falle sind allezeit zwey Triangel möglich, die einander vollkommen gleich, und nur der Lage nach voneinander unterschieden sind.

Wenn aber die Lienie SR den Zirkel z. E. in T berühret, und man ziehet die Lienien PT, FT

so sind die Winkel R T P, T P F einander gleich, weil die Linie R S, P F einander parrallel, und die Winkel so eben genannt worden, wechsels Winkel sind. Es ist aber auch der Winkel S T F dem Winkel F P T gleich, (Euc. 32. Satz. 3 Buch) folglich ist auch der Winkel F P T dem Winkel P F T gleich; und also ist der Triangel T P F ein gleichschenklichter (Euc. 6. S. 1 B.). Um nun diesen Fall durch eine Gleichung zu bestimmen, ziehe man T t auf A F perpendikulär, so ist der Winkel F T t der Hälfte des gegebenen Winkels gleich und F t = P t = $\frac{1}{2}x$. Ist nun A der gegebene Winkel, so wird T t: F t = 1: Tang. $\frac{1}{2}$ A, folglich ist b Tang. $\frac{1}{2}$ A = $\frac{1}{2}x$ = $\frac{a^2 . \text{Sin. A}}{(4a \text{ Sin. A} + 4b + 4b . \text{Cos. A})}$

Hieraus folgt also, daß, sobald b Tang. $\frac{1}{2}$ A größer ist, als $\frac{a^2 \text{ Sin. A}}{4a \text{ Sin. A} + 4b + 4b \text{ Cos. A}}$, die Aufgabe unmöglich wird, weil die Linie R S den Zirkel alsdenn nicht mehr berühren kann.

§. 334.

Wenn der gegebene Winkel ein rechter Winkel ist, so ist $c = o$ und $f = 1$ folglich wird in diesem Falle $x = \frac{a^2}{2a + 2b}$ und man findet x indem man zu $a + b$, $\frac{1}{2}a$ und a die vierte proportional Linie sucht, und das vorige bleibt, wie bey der vorigen Construction.

§. 335.

Die algebraische Auflösungen geometrischer Aufgaben müssen besonders in der Absicht angestellt werden, um den Zusammenhang gewisser Dinge in einer geometrischen Figur zu entdecken, und diesen zeiget allezeit die letzte Formel, wodurch die verlangte Größe bestimt wird, besonders wenn man bemühet gewesen ist, die letzte Gleichung, so einfach als möglich, auszudrücken. Die in der letzten Formel vorkommende Buchstaben können wieder durch diejenigen Lienien ausgedrückt werden, welche sie in der Figur bedeuten, und man kann alsdenn öfters den Zusammenhang besser einsehen. Also ist die Formel

$$BC = \frac{aa \text{ Sin. A}}{2a \text{ Sin. A} + 2AD(1 + \text{Cos. A})}$$

Aus dieser siehet man nun gleich, wie der Umkreis die eine Seite BC, der, ihr gegen über liegende Winkel A und die von dem Winkel, auf die demselben gegen über liegende Seite gezogene perpendikulär Lienie zusammenhangen. Durch eine kleine Veränderung kann man alsdenn auch die Seite AD finden, und dadurch gleich eine neue Aufgabe auflösen.

§. 336.

Man dividire die ganze Formel mit Sin. A, so wird

$$BC = \frac{aa}{2a + 2AD\frac{(1 + \text{Cos. A})}{\text{Sin. A}}}$$

Fig. 26.

Wenn aber AGB ein halber Zirkel ist, und BCE ist = A = dem gegebenen Winkel, und DE = Sin. A und CD = Cos. A, so wird AD = 1 +

Cos.

Cos. A. man ziehe AE und CF mit derselben parallel. Ist nun GC auf AB perpendikulär, und GF berühret den Zirkel in G, so wird $GF = \text{Cotg.} \frac{1}{2} A$, und da die Triangel AED, CGF einander ähnlich sind, so wird $ED : AD = CG : GF$ und also $GF = \text{Cotg.} \frac{1}{2} A = \frac{1 + \text{Cos. A}}{\text{Sin. A}}$

Hieraus wird $BC = \frac{aa}{2a + 2AD \text{ Cot.} \frac{1}{2} A}$

Durch Hülfe dieser Formel läst sich die folgende Aufgabe sehr nett und simpel auflösen.

§. 337.

Aufgabe.

Es wird der Umkreis, ein Winkel und der Inhalt eines Triangels gegeben, man soll die Basin desselben bestimmen.

§. 338.

Vorbereitung.

320. Man nehme an, der Triangel ABC sey der verlangte Triangel und A der gegebene Winkel. Da nun der ganze Winkel gegeben wird, so wird auch der halbe Winkel folglich die Cotangente des halben Winkels gegeben. Der ganze Umkreis AB + BC + AC sey *a*, welcher ebenfalls gegeben wird. Der Inhalt sey *d*, welcher auch bekannt ist.

Es ist aber aus der Geometrie bekannt, daß der Inhalt entsteht, wenn man die Base des Triangels mit der halben Höhe multiplicirt. Man nehme also die dem gegebenen Winkel gegen über liegende Seite BC zur Grundlienie an, und ziehe

die

die Linie A D auf derselben perpendikulär, so ist der Inhalt des Triangels $\frac{B C \times A D.}{2}$ Die Formel (§. 336.) zeigt aber wie die Seite B C, die Höhe A D der Umkreis a und die Cotangente des halben Winkels zusammen hangen.

§. 339.

Auflösung.

Es sey $B C = x$, $A D = y$, so wird der Inhalt des Triangels $\frac{x y}{2} = d$, folglich $x y = 2 d$

Nun ist aber (§. 336.) $B C = \frac{a a}{2a + 2 A D. \text{Cot.} \frac{1}{2} A}$

setzt man hierinnen die gehörigen Buchstaben, so wird $x = \frac{a a}{2 a + 2 y. \text{Cot.} \frac{1}{2} A}$ folglich $2 a x + 2 x y \text{ Cot.} \frac{1}{2} A = a a$. Setzt man in dieser letzten Gleichung $2 d$ von $x y$, so wird $2 a x + 4 d \text{ Cot.} \frac{1}{2} A = a a$. Folglich wenn man $4 d \text{ Cot.} \frac{1}{2} A$ hierüber bringt und durch $2 a$ dividirt, so bekomt man

$$x = \frac{a a - 4 d \text{ Cot.} \frac{1}{2} A}{2 a}$$

und $$y = \frac{4 a d}{a a - 4 d \text{ Cot.} \frac{1}{2} A.}$$

§. 340.

Nachdem man auf diese Art die dem gegebenem Winkel gegen über liegende Seite und die Höhe des Triangels bestimt hat, so läst sich das übrige auf eine geometrische Art weit leichter bestimmen.

Man

Man nehme nemlich die Lienie B C so groß an, als die gefundene Lienie x die als bekannt angesehen werden muß, und beschreibe über derselben ein Segment B F C in dem der Winkel dem gegebenen gleich ist. In der Entfernung D E $= y$ von B C ziehe man die Lienie A A′ parrallel mit B C. Wenn nun diese Lienie den Zirkel in A und A′ durchschneidet, und man zieht die Lienien B A, C A und B A′, C A′, so sind die beyde Triangel B A C, B A′ C die verlangte Triangel, und einander vollkommen gleich, nur der Lage nach verschieden.

Fig 27.

§. 341.

Anmerkung.

Wenn man sich der (§. 336.) gegebenen Formel nicht bedient hätte, so würde man in eine ziemlich weitläuftige Rechnung verfallen seyn. Hieraus kann man sehen, *wie nützlich es ist, eine jede algebraische Formel zu untersuchen.* Dadurch bekomt man öfters den Schlüßel zu verschiedenen Aufgaben, die, wenn sie ohne diesen Kunstgrif aufgelöset werden solten, öfters unsere Geduld ermüden würden. Uebrigens siehet man auch aus dieser Aufgabe, daß man nicht allezeit nöthig hat, dieselbe so aufzulösen, wie sie vorgetragen wird, sondern daß es hinlänglich ist, dieselbe so weit zu bringen, daß das Uebrige durch eine schon bekannte Methode bewerkstelliget werden kann.

§. 342.

Da die ganze Summe der Seiten des Triangels a ist, so ist $a - x = \frac{aa + 4d \text{ Cot. } \frac{1}{2}A}{2a}$

die

die Summe der beyden übrigen Seiten oder AB + AC = $\frac{aa + 4d \text{ Cot.} \frac{1}{2}A}{2a}$. Subtrahirt man auf beyden Seiten die Linie BC = $\frac{a^2 - 4d \text{ Cot.} \frac{1}{2}A}{2a}$, so wird AB + AC − BC = $\frac{4d \text{ Cot.} \frac{1}{2}A}{a}$. Hieraus siehet man nun gleich, daß da a = AB + AC + BC ist, auch $(AB + AC)^2 - BC^2 = 4d \text{ Cot.} \frac{1}{2}A$ ist. Wenn also in einem Triangel die Summe zweyer Seiten gegeben wird, der Winkel A den sie einschließen und die dem Winkel gegen über stehende Seite, so kann man durch diese Formel den Augenblick den Inhalt haben. Denn gesetzt, die Summe beyder Seiten wäre b, die dritte Seite oder BC = c so wird

$$(b^2 - c^2) = 4d \text{ Cot.} \tfrac{1}{2}A$$

folglich $d = \frac{b^2 - c^2}{4 \text{ Cot.} \frac{1}{2}A}$ oder da $b + c = a$ ist

$$d = \frac{a(b - c)}{4 \text{ Cot.} \frac{1}{2}A}$$

§. 343.

Setzt man hierin wieder vor d dessen Werth $\frac{BC \times AD}{2}$ so wird $BC \times AD = \frac{b^2 - c^2}{2 \text{ Cot.} \frac{1}{2}A}$ oder da BC = c ist, und man setzet AD = p

$cp = \frac{b^2 - c^2}{2 \text{ Cot.} \frac{1}{2}A}$ oder $2cp \text{ Cot.} \frac{1}{2}A = b^2 - c^2$

Diese Formel zeigt den Zusammenhang an, welcher zwi-

zwischen der Base c, die Höhe p und der Summe der übrigen Seiten oder b, welche dem Winkel A einschließen, statt findet.

§. 344.

Alle diese Formeln sind gewissermaßen eben so viel Lehrsätze, und man könnte dergleichen noch mehrere herleiten, wenn man noch andre Veränderungen mit diesen Formeln vornehmen wollte. Ich bin indessen dabey etwas weitläuftig gewesen um zu zeigen, wie man mit den algebraischen Formeln umgehen muß, damit man daraus auch einigen Nutzen zieht, und nicht blos calculirt um calculirt zu haben.

§. 345.

Aufgabe.

Es wird die Lage dreyer geraden Lienien A B, A C, B D gegeben, man soll den Punct P finden, der so beschaffen ist, daß, wenn man von demselben auf diese gerade Lienien, die Lienien P E, P F, P G perpendikulär zieht, die Verhältniß P F: P E einer gegebenen Verhältniß, und die Verhältniß P F: P G ebenfalls einer gegebenen Verhältniß gleich ist.

§. 346.

Vorbereitung.

Fig. 28. Wenn die Lage dreyer oder mehrerer Lienien gegeben wird, so versteht man darunter, daß die Winkel bekannt sind, unter denen sich dieselben durchschneiden. So bald aber dieses ist, so sind auch die Sinus, Cosinus ꝛc. aller dieser Winkel bekannt.

Man

Man stelle sich nunmehro vor der Punkt P wäre so beschaffen, als es die Aufgabe erfordert. Man nehme ferner eine von den Lienien, welche zwischen den beyden andern eingeschlossen ist, z. E. AB und nenne dieselbe *a*. Die von P auf AB gezogene perpendikulär Lienie PF verlängre man bis sie die beyde andre Lienien AC und BD in C und E durchschneidet, so entstehen dadurch zwey rechtwinklichte Triangel, in denen alle Winkel bekannt sind. Denn in den Triangel AFC ist der Winkel A wegen der Lage der Lienien bekannt, und da F ein rechter Winkel ist, so ist auch der Winkel ACF bekannt; eben so ist auch der Winkel FDB vollkommen bestimmt, weil die Winkel B und F gegeben werden.

Weil nun die Lienien PE, PG auf AC und DB perpendikulär sind, so sind die Triangel ACF, PEC, desgleichen DFB und DPG einander ähnlich, und also die Lienien die in denselben auf einerley Art liegen, proportional.

Um nun den Punkt P zu bestimmen, muß man wissen, wie weit der Punkt F von A oder B, und wie weit der Punkt P von F entfernt ist. In dieser Absicht sey also $AF = x$ und $FP = y$, so wird $BF = a - x$.

§. 347.

Auflösung.

Die Verhältniß, der die Verhältniß PF: PE gleich seyn soll, sey $m : n$ und $m : p$ diejenige Verhältniß, der die Verhältniß PF: PG gleich seyn

soll. Es sey ferner $1 : t$ der Verhältniß des Radius zur Tangente des Winkels A gleich, und $1 : \delta$ die Verhältniß des Radius zur Tangente des Winkels B. Desgleichen $1 : c$ die Verhältniß der Radius zum Cosinus des Winkels A, und $1 : \xi$ die Verhältniß des Radius zum Cosinus des Winkels B.

In dem Triangel AFC ist nun AF: FC = rad: Tang. A oder x: FC = $1 : t$, folglich FC = tx und demnach PC = FC — PF oder PC = $tx - y$.

Ferner ist PC: PE = rad: Cos. A oder $tx - y$: PE = $1 : c$ folglich PE = $ctx - cy$. Nun soll PF: PE = $m : n$ seyn, folglich wird $y : ctx - cy = m : n$ und also $ny = mctx - cmy$ und

$$ny + cmy = mctx$$

und $$y = \frac{mct}{n + cm} \cdot x$$

In dem andern Triangel FBD ist BF: FD = rad: Tang. B oder $a - x$: FD = $1 : \delta$ folglich ist FD = $a\delta - \delta x$.

Es ist aber auch PD = FD — PF oder PD = $a\delta - \delta x - y$, ferner PD: PG = rad: Cos. B oder $a\delta - \delta x - y$: PG = $1 : \xi$ folglich PG = $a\delta\xi - \delta\xi x - \xi y$. Da nun auch die Verhältniß PF: PG der Verhältniß $m : p$ gleich seyn muß, so wird

$$y : a\delta\xi - \delta\xi x - \xi y = m : p$$

folglich $py = ma\delta\xi - m\delta\xi x - m\xi y$

und $py + m\xi y = ma\delta\xi - m\delta\xi x$

folg-

folglich $y = \frac{m\delta\xi\,(a - x)}{p + m\xi}$

Dahero ist $\frac{mctx}{n + cm} = \frac{am\delta\xi - m\delta\xi x}{p + m\xi}$

und $cptx + mcpt\xi x = an\delta\xi + acm\delta\xi - n\delta\xi x - cm\delta\xi x$

und $cptx + mct\xi x + n\delta\xi x + cm\delta\xi x = an\delta\xi + acm\delta\xi$

folglich $x = \frac{a\delta\xi\,(n + cm)}{ct\,(p + m\xi) + \delta\xi\,(n + cm)}$

Nachdem man den Werth von x bestimt hat, und man setzt denselben oben vor x in der Gleichung durch die y gegeben wird, so wird

$$y = \frac{a\delta\xi mct}{ct\,(p + m\xi) + \delta\xi\,(n + cm)}$$

§. 348.

Anmerkung.

Man kann diese beyde Ausdrücke vor x und y etwas abkürzen, denn da $1 : c = r$: Cos. A und $1 : t = r$: Tang. A, so wird $1 : ct = r^2$: Cos. A Tang. A, da nun Cos. A : Sin. A $= r$: tg A, so wird Cos. A tg A $= r$: Sin. A, folglich $1 : ct = r$: Sin. A. Auf eben diese Art wird $1 : \delta\xi = r$: Sin. B. Setzt man nun in den Formeln $\frac{\text{Sin. A}}{r}$ von ct, und $\frac{\text{Sin. B}}{r}$ von $\delta\xi$, so wird

$$x = \frac{a\,\text{Sin. B}\,(n + m.\,\text{Cos. A})}{\text{Sin. A}\,(p + m\,\text{Cos. B}) + \text{Sin B}\,(n + m\,\text{Cos. A})}$$

$$y = \frac{a\,m.\,\text{Sin. A Sin. B}}{\text{Sin. A}\,(p + m\,\text{Cos. B}) + \text{Sin. B}\,(n + m\,\text{Cos. A})}$$

Nachdem nun die Winkel A und B, und die Verhältnisse $m : n$ und $m : p$ beschaffen sind, nachdem verändern sich auch diese Ausdrücke. Z. E. wenn die Lienien C A, D B auf A B perpendikulär sind, so ist Cos. A = Cos. B = o und Sin. A = Sin. B = 1 folglich $x = \frac{an}{p + n}$

und $y = \frac{am}{p + n}$

Fünfter Abschnitt.

Von den Gleichungen welche nicht mehr einfach sind, in denen aber doch die unbekannte Größe von den bekannten abgesondert sind, oder von den reinen Gleichungen.

§. 349.

Aufgabe.

Es wird die Summe zweyer Zahlen gegeben, und das Produckt aus denselben; man soll die Zahlen selbst finden.

§. 350.

Auflösung.

Es sey die Summe der beyden Zahlen = a, die differenz derselben sey x. Das Produckt aus denselben = b. So ist die größere Zahl $\frac{a + x}{2}$

und

und die kleinere $\frac{a - x}{2}$ (§. 246.). Es ist also nach den Bedingungen der Aufgabe

$$\frac{(a + x)}{2} \cdot \frac{(a - x)}{2} = b$$

oder $b = \frac{a^2 - x^2}{4}$

und $4b = a^2 - x^2$

folglich $x^2 = a^2 - 4b$

Um also die Zahl x zu bekommen, muß man die Quadrat-Wurzel aus $a^2 - 4b^2$ ziehen, und alsdenn wird

$$x = \sqrt{(a^2 - 4b)}$$

§. 351.

Anmerkung.

Es sey $a = 13$, $b = 40$, so ist $a^2 = 169$ und $4b = 160$, folglich $a^2 - 4b = 169 - 160 = 9$ und also $x = \sqrt{9} = 3$. Dahero ist die Differenz der beyden Zahlen $= 3$ und die gröste $\frac{13 + 3}{2} = \frac{16}{2} = 8$ und die kleinere $\frac{13 - 3}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

§. 352.

Diese Aufgabe führet auf eine andre Art von Gleichungen. Bishero waren alle unbekannte Grössen am Ende der Auflösung in keiner höhern Dignität als in der ersten, hier aber zeigt sich die zweite, und man kann den Werth der unbekannten Größe nicht eher bestimmen, als bis man die Qua-

drat Wurzel aus der unbekannten Größe ausgezogen. Es ist leicht zu vermuthen, daß Aufgaben vorkommen müssen, in denen die unbekannte Grösse in der dritten, vierten ꝛc. Dignität erhoben ist. Ehe man also weiter gehet, wird es dienlich seyn, diese Art von Gleichungen, in denen höhere Dignitäten der unbekannten Größe vorkommen, etwas genauer zu untersuchen.

§. 353.

Erklärung.

Eine quadratische Gleichung ist diejenige, in welcher die zweite Dignität der unbekannten Grösse die Höchste ist. Eben so heist eine cubische, biquadratische Gleichung ꝛc. diejenige, in welcher die höchste Dignität der unbekannten Größe, die dritte, vierte ꝛc. ist.

§. 354.

Anmerkung.

Man unterscheidet die Gleichungen auch nach Graden, und diese Grade erhalten ihre Benennung von der höchsten Dignität der unbekannten Größe. Also nenut man eine Gleichung vom ersten Grade, in der die unbekannte Größe in keiner höhern als der ersten Dignität vorkomt. Und auf eine ähnliche Art heist eine Gleichung vom zweiten, dritten, vierten, fünften, sechsten ꝛc. Grade in der die höchste Dignität der unbekannten Größe, entweder die zweite, dritte, vierte, fünfte, sechste ꝛc. ist.

§. 355.

Außer der höchsten Dignität der unbekannten Größe können auch niedrigere in der Gleichung vorkom-

kommen, und alle oder einige können mit bekannten Größen multiplicirt oder dividirt seyn. In allen dergleichen Fällen wird dennoch der Grad der Gleichung nach der höchsten Dignität der unbekannten Größe bestimt. Also sind z. E.

$x^2 + 2ax = bc$; $(a+b)x^2 - \frac{2fx}{g} + ab = o$

Gleichungen vom zweiten Grade, oder quadratische Gleichungen.

$x^3 + px^2 + qx = r$; oder $Ax^3 + \frac{(2b-c)x}{3d} + f = o$

oder $\frac{ax^3}{4b^2} + (24cd - f)x + \frac{(a^2-b^2)}{c} = 25g^2 - f^2$

und was dergleichen mehr sind, Gleichungen vom dritten Grade, oder cubische Gleichungen.

$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + f = o$

$\frac{ax^4}{b} + b^2x^3 + \frac{2cgx}{f} = a^2 - \frac{3b^3}{4}$

$\frac{(a^2+b^2)}{c2}x^4 + \frac{3}{4}abx - c = o$

biquadratische oder Gleichungen von vierten Grade.

Man kann leicht so weiter gehen, und die bekannte Größen mit denen die verschiedene Dignitäten der unbekannten Größe in einer Gleichung multipliciret oder dividiret werden, oder die Coefficienten der verschiedenen Glieder, wo Dignitäten der unbekannten Größe vorkommen, mögen beschaffen seyn wollen, so rechnet man doch allezeit den Grad der Gleichung nach der höchsten Dignität der unbekannten Größe x.

§. 356.

Erklärung.

Wenn hingegen in einer quadratischen Gleichung die zweite Dignität von x nur allein oder x^2 vorkomt, und die übrige Größen alle bekannt sind, so heist eine solche quadratische Gleichung eine reine oder entwickelte Gleichung (æquatio quadratica pura). Komt aber außer diesem x^2 noch ein Produckt aus x in eine bekannte Größe vor, so heist alsdenn eine solche Gleichung, eine verwickelte quadratische Gleichung (æquatio impura & affecta). Auf eben diese Art heißen die cubische, biquadratische ꝛc. Gleichungen rein, wenn darin blos die dritte, vierte ꝛc. Dignität der unbekannten Größe vorkommt, finden sich aber außerdem noch niedrigere Dignitäten, so heißen diese Gleichungen ebenfalls verwickelte cubische oder biquadratische ꝛc. Gleichungen.

§. 357.

Anmerkung.

Wenn man durch die Bedingungen einer gewissen Aufgabe auf eine Gleichung von einem gewissen Grade geführet wird, so muß man daraus den Werth der unbekannten Größe bestimmen, oder da die Dignitäten derselben mit andern unbekannten Größen verwickelt sind, die unbekannte Größe heraus wickeln, oder die Gleichung auflösen. Dieses geht hier aber nicht so leicht an, als bey den Gleichungen, welche bishero vorgekommen sind. Indessen wird es gut seyn, die Gleichungen von jedem

Gra-

Grade nach und nach zu untersuchen, um zu sehen, wie weit man in diesem Stücke kommen kann.

§. 358.

Alle reine Gleichungen, sie mögen von einem Grade seyn, von welchen sie wollen, lassen sich auf diese Form bringen.

$$x^n = A$$

In der n eine ganze Zahl bedeutet, und A eine Sammlung von lauter bekannten Größen, die übrigens untereinander verbunden seyn können, wie sie wollen. Setzt man nun nach und nach n so groß, als 2, 3, 4 ꝛc. so stellen

$$x^2 = A \quad x^4 = A \quad x^6 = A$$
$$x^3 = A \quad x^5 = A \quad x^7 = A$$

und so weiter alle reine Gleichungen vom 2. 3. 4. 5. 6. 7ten ꝛc. Grade vor.

§. 359.

Da man unter A verstehen kann was man will, wenn nur lauter bekannte Größen darinnen vorkommen, so sind

$$x^2 = 2ab + cd; \; x^3 = \frac{3a^2c + fa^4}{2bc}$$

$$x^4 = \frac{5a^2\sqrt{bc} - bc^2df - 2c^3\sqrt{(a+b)}}{7a^3\sqrt{b}}$$

Reine Gleichungen vom 2. 3. 4ten ꝛc. Grade. Und wenn man auf eine Gleichung komt, welche diese Form hat $Bx^n = C$ wo B und C lauter bekannte Größen bedeuten, so kann eine solche Gleichung doch leicht auf die vorige Form gebracht werden, wenn man durch B dividirt: und alsdenn ist

$x^n = \frac{C}{B}$ eine Gleichung, welche der vorigen (§. 358) vollkommen ähnlich ist.

§. 360.

Die Gleichungen welche auf diese Form $(x \pm a)^n = A$ oder $(x - a)^n = A$ gebracht werden können, werden auch als reine Gleichungen angesehen, weil, wenn man $x \mp a = z$ setzet, dieselben sich in der vorigen Form verwandeln. Wenn man nun z weiß, so ist sehr leicht die Größe x zu bestimmen. Also ist $x^2 + 2ax + a^2 = A$ eine reine quadratische Gleichung $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = A$ eine reine cubische Gleichung und so weiter.

§. 361.

In der algemeinen Form aller reinen Gleichungen $x^n = A$ ist also $x = \sqrt[n]{A}$ (§. 128.) oder $x = (A)^{\frac{1}{n}}$. Der Werth der Größe x hängt nun von der Beschaffenheit der Größe A und der Zahl n ab, die entweder eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

§. 362.

Wenn n eine ungerade Zahl ist, so ist der Werth von x allezeit eine wirkliche Größe, die Größe A mag beschaffen seyn, wie sie will. Denn A ist allezeit das $n$te Glied in der Progreßion davon die erste Verhältniß $1 : x$ ist, wenn man das erste Glied 1 nicht mit rechnet. Ist nun A eine positive

tive Größe, so ist $x = \sqrt[n]{A}$ auch eine positive Größe, ist aber A eine negative Größe, so ist $x = \sqrt[n]{A}$ auch eine negative Größe, oder $x = -\sqrt[n]{A}$. Denn in der Progreßion

$1 : -\sqrt[n]{A} = -\sqrt[n]{A}$ ꝛc. . . . . .

ist ein jedes Glied eine negative Größe, dessen Exponent eine ungerade Zahl ist.

§. 363.

Ist aber n eine gerade Zahl, so kommen hier zwey Fälle zu untersuchen vor: wenn A eine positive Größe bedeutet, und wenn dieselbe negativ ist. Bedeutet A eine positive Größe, so hat die Größe x allezeit zwey wirkliche Werthe, die einander an und vor sich betrachtet, vollkommen gleich sind, davon der eine aber positiv, der andre negativ ist. Denn in den Progreßionen

$1 : x = x : x^2 = x^2 : x^3 = x^3 : x^4 \ldots\ldots + x^n$

$1 : -x = -x : x^2 = x^2 : -x^3 = -x^3 : x^4 \ldots\ldots + x^n$

ist allezeit das Glied x^n wenn n eine gerade Zahl ist, eine positive Größe, x mag eine positive oder eine negative Größe bedeuten.

Wenn also $x^n = A$, so ist $x = \mp\sqrt[n]{A}$, daß ist, x hat zwey Werthe, davon ein jeder an und vor sich betrachtet, so groß ist, als $\sqrt[n]{A}$, der eine aber positiv, der andre negativ ist.

§. 364.

§. 364.

Wenn aber n wieder eine gerade Zahl, A aber eine negative Größe bedeutet, so ist $x = \mp \sqrt[n]{A}$ weder eine positive, noch eine negative Größe. Denn wenn x eine positive Größe wäre, so müste ein jedes Glied in der Progreßion $1 : x : x^2 : x^3 : x^4$ ꝛc. dessen Exponent eine gerade Zahl ist, auch eine positive Größe seyn. Folglich da A das Glied bedeutet, dessen Expourut n eine gerade Zahl ist, so müste A eine positive Größe seyn. Nun ist aber A wirklich eine negative Größe, folglich kann x keine positive Größe bedeuten. Es kann aber der Werth von x auch keine negative Größe seyn. Denn alsdenn müste A das Glied bedeuten, dessen Exponent n in der geometrischen Progreßion

$$1 : -x = -x : x^2 = x^2 : -x^3 \text{ ꝛc.}$$

eine gerade Zahl ist. Ein jedes Glied aber in dieser geometrischen Progreßion, dessen Exponent eine gerade Zahl ist, ist ebenfalls eine positive Größe; folglich müste A auch eine positive Größe seyn. Es ist aber A eine negative Größe, folglich da sich dieses widerspricht, so kann x keine negative Größe bedeuten.

Da nun x, wenn A negativ ist, in der Gliechung $x^n = A$, weder eine positive noch eine negative Größe seyn kann, so ist offenbar, daß x in diesem Falle unmöglich gefunden werden kann, oder daß der Werth von x eine unmögliche Größe seyn muß.

§. 365.

§. 365.

Man setze $A = -B$, und $n = 2m$ so wird diese Gleichung $x^{2m} = -B$ oder $x = \sqrt[2m]{(-B)}$ allezeit anzeigen, daß die Größe welche durch diese Gleichung bestimt wird, eine eingebildete oder unmögliche Größe ist. Daß es aber dergleichen Größen geben muß, ist leicht zu begreifen. Denn es können in einer Aufgabe solche Bedingungen vorkommen, welche miteinander nicht bestehen können. Sucht man nun durch diese Bedingungen eine gewisse Größe, so ist offenbar, daß dieselbe unmöglich seyn muß. Und wenn man aus den Bedingungen, und den in der Aufgabe gegebenen Größen diese unbekannte Größe nach den in der Algebra angenommenen Regeln sucht, so muß man nothwendig am Ende auf eine solche Gleichung kommen, in der die Verbindung der Zeichen anzeigt, daß das, was man sucht, unmöglich ist.

§. 366.

Man muß sich übrigens daran nicht stossen, daß man etwas eine unmögliche Größe nennt, und auch diese nicht mit einer Größe welche nichts ist, vor einerley halten. Man versteht unter einer unmöglichen Größe in einer Aufgabe dasjenige, was man sucht und in Gedanken als wirklich betrachtet, welches aber unter den gegebenen Umständen nicht seyn kann, aber unter andern Umständen gar wohl seyn könnte. Ein mathematisches Nichts aber bedeutet, daß das, was man sucht, wirklich gar nicht da ist.

§. 367.

§. 367.

Der Werth der Größe x in der allgemeinen Gleichung $x^n = A$ kann am besten durch Hülfe der Logaritmen gefunden werden. Denn wenn $x^n = A$, so ist auch Log. x^n = Log. A. Nun ist Log. $x^n = n$ Log. x und also n Log. x = Log. A, folglich Log. $x = \frac{1}{n}$ Log. A. Wenn man nun den Logaritmus der Größe A durch n dividirt und in den gewöhnlichen Tabellen diese Zahl aufsucht, so findet man daneben diejenige Zahl zu der der Logaritmus gehört, welche alsdenn x ist.

§. 368.

Will man sich aber nicht der Logaritmen bedienen, so muß man aus A die Wurzel von der Ordnung n herausziehen, welche alsdenn die Größe x vollkommen oder beynahe richtig angiebt. Dieses aber wird weiter unten gezeigt werden.

§. 369.

Will man aber die Größe x durch gerade Lienien bestimmen, so muß man zwischen 1 und der Lienie A so viel mittlere proportional Lienien suchen, als Einheiten in der Zahl $n - 1$ sind, und alsdenn ist x diejenige Lienie welche der Einheit am nächsten ist.

§. 370.

Es ist aber nicht so leicht dieses zu bewerkstelligen, und meistentheils sind die Anfangsgründe der Geometrie gar nicht dazu hinreichend. Wenn aber $n = 2$

so

so daß $x^n = A$ ist, so kann man x durch Hülfe des Zirkels und gerader Lienien finden. Man ziehe nemlich eine gerade Lienie und nehme auf derselben $AB = 1$ und $BC = A$. Die Lienie AC nehme man zum Dameter eines Zirkels an, Fig. 29. und beschreibe über denselben den Zirkel $ADCEA$. Durch B ziehe man die Lienie DE auf AC perpendikulär, so ist BD die eine und BE der andre Werth oder die Wurzel von x.

Denn die Lienie BD sowohl, als die BE ist die mittlere proportional Lienie zwischen $AB (= 1)$ und BC (oder A) und es ist $AB : BD = BD : BC$ oder $1 : BD = BD : A$, da nun auch $1 : x = x : A$, so wird $x : BD = BD : x$, folglich $x^2 = BD^2$ und $x = BD$. Eben so wird auch bewiesen, daß $x = BE$ ist.

Hieraus siehet man auch offenbar, daß in jeder quadratischen Gleichung, x einen doppelten Werth haben muß, davon der eine positiv der andre negativ ist. Denn da sowohl BD als BE, x seyn kann, so ist offenbar, daß wenn BD als positiv betrachtet wird, BE als negativ angesehen werden muß.

§. 371.

Auf eben diese Art kann man auch alle die Wurzeln aus den Gleichungen $x^4 = A$; $x^8 = A$; $x^{16} = A$ ꝛc. auf eine geometrische Art finden, denn $x = \sqrt[4]{A}$ ist ebenfalls so viel, als $x = \sqrt{\sqrt{A}}$ und $x = \sqrt[8]{A} = x = \sqrt{\sqrt{\sqrt{A}}}$. (§. 137.)

es

es ist leicht zu sehen, wie man dabey geometrisch verfahren muß.

§. 372.

Aufgabe.

Ein gewisses Capital a nimt jährlich nach einer gewissen Verhältniß zu, nach Verfließung einer gewissen Anzahl von Jahre, die durch n angedeutet wird, hat es sich in das Capital b verwandelt. Es ist die Frage, wie groß es am Ende des ersten Jahres gewesen.

§. 373.

Auflösung.

Es sey y die Größe des Capitals am Ende des ersten Jahres, so ist $a : y$ die Verhältniß nach welcher daßelbe zugenommen. Da es nun jedes Jahr in eben der Verhältniß zunehmen soll, so ist $a : y = y : \frac{y^2}{a}$ und $\frac{y^2}{a}$ das Capital am Ende des zweiten Jahres. Eben so ist $\frac{y^3}{a^2}, \frac{y^4}{a^3}, \frac{y^5}{a^4}$ das Capital am Ende des dritten, vierten und fünften Jahres, und überhaupt $\frac{y^n}{a^n - 1}$ das Capital nachdem n Jahre verflossen. Es ist also

$$\frac{y^n}{a^n - 1} = b$$

folglich $y^n = a^{n-1} b$

und $y = \sqrt[n]{a^{n-1} b}$

oder $y = a \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$

§. 374.

§. 374.

Anmerkung.

Will man den Werth von y durch Hülfe der Logaritmen haben, so ist n Log. y = Log. $(a^{n-1}b)$ = $(n-1)$ Log. a + Log. b, folglich Log. $y = \frac{(n-1)\text{ Log. } a + \text{Log. } b}{n}$.

Z. E. Ein Kaufmann hat 3000 Rthlr. und damit gehandelt, so, daß sich in jedem Jahre sein Capital in einerley Verhältniß verändert hat, nach Verfließung von 10 Jahren ist sein Capital 7000 Rthlr. Hier ist also $a = 3000$, $b = 7000$, $n = 10$, folglich ist

Log. $y = \frac{9\text{. Log. } 3000 + \text{Log. } 7000}{10}$

Es ist aber Log. 3000 = 3, 4771212
und 9 Log. 3000 = 31, 2940908
Log. 7000 = 3, 8450980
folglich 9 Log. 3000 + Log. 7000 = 35, 1391888

Dieses durch 10 dividirt = 3, 51391888 = Log. y

Schlägt man nun in den Tafeln die Zahl auf, welche zu diesem Logaritmen gehört, so findet man, daß es die Zahl 3265 ist, folglich ist beynahe y = 3265 Rthlr.

§. 375.

Aufgabe.

Man soll drey Zahlen finden, die so beschaffen sind, daß das Producкt aus der ersten in die Summe der zweiten und dritten, der Zahl a, das Producкt aus der zweiten in die Summe der ersten

und dritten, der Zahl b, und das Product aus der dritten in die Summe der ersten und zweiten, der Zahl c gleich ist.

§. 376.

Auflösung.

Es sey x die erste, y die zweite und z die dritte Zahl, so ist nach den Bedingungen der Aufgabe.

$$x(y+z)=a \text{ oder } xy+xz=a$$
$$y(x+z)=b \qquad xy+yz=b$$
$$z(x+y)=c \qquad zx+zy=c$$

Man subtrahire die zweite Gleichung von der ersten, so wird $xz-yz=a-b$

dazu addire man die dritte, so bekomt man

$$2xz=a-b+c$$

folglich 1) $z=\frac{a-b+c}{2x}$

Man subtrahire wieder die dritte von der ersten und addire zur Differenz die zweite, so bekomt man

$$2)\ 2xy=a-c+b$$

Endlich subtrahire man die erste Gleichung von der dritten und addire zu der Differenz die zweite, so wird

$$3)\ 2zy=c-a+b$$

$$\text{also } y=\frac{c-a+b}{2z}$$

setzt man diesen Werth in der zweiten, so wird

$$\frac{x(c-a+b)}{z}=(a-c+b)$$

oder $x(c-a+b)=z(a-c+b)$

und

und wenn man vor z den zuerst gefundenen Werth setzt, $x(c-a+b)=\frac{(a-b+c)(a-c+b)}{2x}$

folglich $x^2(c-a+b)=\frac{(a-b+c)(a-c+b)}{2}$

und hieraus $x^2=\frac{(a-c+b)(a-b+c)}{2(c-a+b)}$

und $x=\mp\sqrt{\left(\frac{(a-c+b)(a-b+c)}{2(c-a+b)}\right)}$

setzt man diesen Werth von x^2 in der zweiten, so wird

$y=\mp\sqrt{\left(\frac{(a-c+b)(c-a+b)}{2(a-b+c)}\right)}$

und $z=\mp\sqrt{\left(\frac{(c-a+b)(a-b+c)}{2(a-c+b)}\right)}$

§. 377.

Anmerkung.

Es sey $a=20$; $b=13$; $c=25$, so wird $+b-c=8$; $a+c-b=32$; und $c-a+b=18$, folglich $x=\mp\sqrt{\frac{8.32}{2.18}}=$

$\sqrt{\frac{4.16}{9}}=\frac{2.4}{3}=\mp 2\frac{2}{3}$

$y=\mp\sqrt{\frac{8.18}{2.32}}=\mp\sqrt{\frac{4.9}{16}}=\mp\frac{2.3}{4}=\mp 1\frac{1}{2}$

und $z=\mp\sqrt{\frac{32.18}{2.8}}=\mp\sqrt{2.18}=\mp\sqrt{36}=6.$

Hierbey ist zu merken, daß, wenn man den Werth von x negativ nimt, man die Werthe von z und y auch negativ nehmen muß.

§. 378.

Aufgabe.

Man soll drey Zahlen finden, die so beschaffen sind, daß, wenn man das Product aus denselben nach und nach durch die Summe der ersten und zweiten, der zweiten und dritten, der ersten und dritten dividiret, die Quotienten, den gegebenen Zahlen a, b, c gleich sind.

§. 379.

Auflösung.

Es sey x die erste, y die zweite, z die dritte Zahl, so muß

$$\frac{xyz}{x+y} = a$$

$$\frac{xyz}{y+z} = b$$

$$\frac{xyz}{x+z} = c$$

seyn. Hieraus entstehen also diese Gleichungen

$$ax + ay = by + bz$$
$$ax + ay = cx + cz$$
$$by + bz = cx + cz$$

Aus der ersten Gleichung wird

$$ax = by - ay + bz$$

und $cx = by + bz - cz$

Multiplicirt man die erste mit c und die zweite mit a, und subtrahirt die zweite von der ersten, so wird

$$bcy - aby - acy + bcz - abz + acz = o$$

folglich $(bc + ac - ab)z = (ab + ac - bc)y$

und

und $z = \frac{(ab + ac - bc)y}{(bc + ac - ab)}$

Diesen Werth von z setze man in der ersten Gleichung, so wird

$ax = by - ay + \frac{(abb + bac - b^2c)y}{bc + ac - ab}$

und wenn man alles auf einen Nenner bringt

$ax = \frac{b^2cy + abcy - ab^2y - abcy - a^2cy + a^2by + b^2ay + bacy - b^2cy}{bc + ac - ab}$

Läst man nun die Glieder weg, welche einander aufheben und dividirt mit a, so wird

$x = \frac{(ab - ac + bc)y}{bc + ac - ab)}$

Da nun $xyz = ax + ay$, und man setzt auf der einen Seite von x den eben jetzt gefundenen Werth, so wird

$xyz = \frac{a^2by - a^2cy + abcy + ay}{bc + ac - ab}$

und wenn man alles auf einen Nenner bringt

$xyz = \frac{a^2by - a^2cy + abcy + abcy + a^2cy - a^2by}{bc + ac - ab}$

und wenn man das wegläst, was sich aufhebt, und mit y dividirt

$xz = \frac{2abc}{bc + ac - ab}$

Setzt man endlich vor x und z die gefundene Werthe, so wird

$\frac{(ab - ac + bc)y}{bc + ac - ab} \times \frac{(ab + ac - bc)y}{bc + ac - ab} = \frac{2abc}{bc + ac - ab}$

folglich wenn man mit $bc + ac - ab$ multiplicirt,

$$\frac{(ab - ac + bc)\,(ab + ac - bc)y^2}{bc + ac - ab} = 2abc$$

dividirt man nun auf beyden Seiten mit den Factor von y^2, so wird

$$y^2 = \frac{2abc\,(bc + ac - ab)}{(ab + ab - bc)\,(ab - ac + bc)}$$

Um die beyde Zahlen x und z zu bekommen, quadrire man die gefundene Werthe derselben, und setze darinnen vor y^2 den hier gefundenen Werth, so wird

$$x^2 = \frac{2abc\,(ab - ac + bc)}{(ab + ac - bc)\,(bc + ac - ab)}$$

$$z^2 = \frac{2abc\,(ab + ac - bc)}{(ab - ac + bc)\,(bc + ac - ab)}$$

Wenn man nun hieraus die Quadratwurzeln nimt, so bekomt man vor jede Zahl zwey Werthe, davon der eine positiv, der andre negativ ist; die aber an und vor sich betrachtet, einander vollkommen gleich sind.

§. 380.

Anmerkung.

Es sey z. E. $a = 2$, $b = \frac{6}{4}$, $c = \frac{6}{5}$, so wird $ab = 3$, $ac = \frac{12}{5}$, $bc = \frac{36}{20} = \frac{9}{5}$, folglich $ab + ac - bc = \frac{18}{5}$, $ab + bc - ac = \frac{12}{5}$, $bc + ac - ab = \frac{6}{5}$ und $abc = \frac{18}{5}$. Hieraus wird

$x^2 =$

$x^2 = \frac{2.18}{5} \times \frac{12}{5} = 4$, folglich $x = \mp 2$.

$\frac{18}{5} \times \frac{6}{5}$

$z^2 = \frac{2.18}{5} \times \frac{18}{5} = 9$ und $z = \mp 3$.

$\frac{12}{5} \times \frac{6}{5}$

$y^2 = \frac{2.18}{5} \times \frac{6}{5} = 1$ und $y = \mp 1$.

$\frac{12}{5} \times \frac{18}{5}$

Und so in andern Fällen.

§. 381.

Aufgabe.

Es werden alle Seiten eines Triangels gegeben, man soll die Winkel desselben bestimmen. Fig. 20.

§. 382.

Auflösung.

Dieses ist eigentlich eine schon bekannte Aufgabe in der Trigonometrie, und man will hier nur Formeln finden, welche den Zusammenhang der Seiten eines Triangels mit den Sinus, Cosinus, Tangenten ꝛc. der Winkel anzeigen. Es sey also die gegebene Seite $BC = a$; $AB = b$; $AC = c$; Man ziehe die Linie AD auf BC perpendikulär. So sind (§. 303.) die Theile BD, DC schon aus den gegebenen Seiten bestimt worden, und es

ist $BD = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$ und $CD = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$

In dem rechtwinklichten Triangel ABD ist aber $AB : BD = r : \text{Cos. } B$ und also, wenn man vor AB und BD die gehörige Buchstaben setzet,

$$\text{Cos. } B = \frac{r(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}$$

oder wenn $r = 1$ gesetzt wird,

$$\text{Cos. } B = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

§. 383.

Aus dieser Formel folgt also dieser Lehrsatz, wenn man dieselbe mit Worten ausdrückt.

I.

Das Product aus den beyden Seiten, welche den Winkel einschließen, zweymahl genommen, verhält sich zu der Summe der Quadrate der beyden Seiten, welche den Winkel B einschließen, weniger dem Quadrate, der Seite, welche dem Winkel B gegen über liegt, wie der Radius zu dem Cosinus des Winkels B.

§. 384.

Wenn man den Sinus des Winkels B wissen will, so kann dieses auf folgende Art geschehen. Es ist nemlich $rr = \text{Sin. } B^2 + \text{Cos. } B^2$ und $(r + \text{Cos. } B.) \times (r - \text{Cos. } B) = \text{Sin. } B^2$. Es ist aber $r + \text{Cos. } B = r + \frac{r(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}$

oder $1 + \text{Cos. } B = \frac{2abr + ra^2 + rb^2 - rc^2}{2ab}$

da

da nun $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, so wird $1 + \text{Cos. B} = r\,\frac{(a + b)^2 - c^2}{2ab}$. Es ist aber allezeit $A^2 - c^2 = (A + c)(A - c)$ nimt man nun hier $a + b = A$ an, so wird $r + \text{Cos. B} = r\,\frac{(a + b + c)(a + b - c)}{2ab}$

Auf eben diese Art findet man $r - \text{Cos. B} = r\,\frac{(b + c - a)(a + c - b)}{2ab}$

Wenn man nun diese beyde Werthe in einander multiplicirt, und die Multiplication blos anzeigt, so wird

$r^2 - \text{Cos. B}^2 \text{ od. Sin. B}^2 = \frac{r^2(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4a^2b^2}$

und also

$\text{Sin. B} = \frac{r}{2ab}\sqrt{\big((a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\big)}$

Diese letzte Formel vor den Sinus ist besonders bequem, wenn man sich der Logaritmen bedienen will.

§. 385.

Hieraus folgt also wieder ein neuer Lehrsatz.

II.

Wenn man in einen Triangel zwey und zwey Seiten addirt, und von jeder Summe allezeit die dritte subtrahirt, und hernach das Produckt aus denen daraus entstehenden Größen durch die Summe aller Seiten multiplicirt, so verhält sich das doppelte Produckt aus den beyden Seiten, welche den Winkel B einschließen, zu der Quadratwurzel aus dem gedachten

Produckt, wie der Radius zu dem Sinus des Winkels B.

§. 386.

Anmerkung.

Gesetzt, es wäre $AB = 3$; $BC = 5$; $AC = 4$. Will man nun den Sinus des Winkels B wissen, so ist $a + b + c = 12$; $a + b - c = 4$; $a + c - b = 6$; $b + c - a = 2$, und $2ab = 30$, folglich Sin. $B = \frac{r}{30} \sqrt{12.4.6.2.} = \frac{r\sqrt{3.4.4.2.2.3}}{30} = \frac{1.3.4.2}{30} = \frac{4.1.}{5}$ Sucht man diese Zahl, wenn $r = 10000000$, so wird Sin. $B = \frac{40000000}{5} = 8000000$ diese Zahl gehört, zu dem Winkel $53^{\circ}8'$ beynahe.

Wäre hingegen $a = 5$; $b = 6$; $c = 7$, so wird $a + b + c = 18$; $a + b - c = 4$; $a + c - b = 6$; $b + c - a = 8$, folglich Sin. $B = \frac{r}{2.5.6} \sqrt{18.4.6.8} = \frac{r.4.2.\sqrt{18.3}}{2.5.6} = \frac{2r\sqrt{18.3.}}{3.5}$ Will man sich nun der Logarithmen bedienen, so ist Log. Sin. B = Log. $2r$ + Log. $\sqrt{3.18}$ − Log. 15, da nun Log. $\sqrt{3.18} = \frac{1}{2}$ Log. $3.18 = \frac{1}{2}$ Log. 54, so wird Log. Sin. B = Log. $2r + \frac{1}{2}$ Log. 54 − Log. 15.

Es

Es ist also Log. $2r$ = Log. 2 + Log. r = 10,3010300
$\frac{1}{2}$ Log. 54 = 0,8661969
also Log. $2r + \frac{1}{2}$ Log. 54 = 11,1672264
Log. 15 = 1,1760913
Log. Sin. B = 9,9911351

Dieser Logaritmus zeigt in den Tabellen den Winkel B = 78°27′ beynahe an.

§. 387.

Dieser Formel kann man sich auch mit Nutzen bedienen, wenn man den Inhalt eines Triangels finden will. Denn der Inhalt des Triangels ist $\frac{BC \times AD}{2}$, und ist aber AB : AD = r : Sin. B, folglich der Inhalt $\frac{BC \times A'B \text{ Sin. } B}{2r}$, folglich wenn man vor diese Linien, und den Sin. B die gefundene Werthe setzet, so wird der Inhalt

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\left((a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\right)}$$

Durch Hülfe dieser Formel läst sich der Inhalt eines Triangel sehr leicht durch Logaritmen finden, und man kann sich derselben überhaupt in praktischen Fällen mit vieler Bequemlichkeit, bedienen.

§. 388.

Es sey z. E. $a = 16$; $b = 18$; $c = 22$, so wird $a + b + c = 56$; $a + b - c = 12$; $a + c - b = 20$; $b + c - a = 24$.

Nun

Nun ist Log. 56 = 1, 74818
Log. 12 = 1, 07918
Log. 20 = 1, 30103
Log. 24 = 1, 38021
5, 50860

Dieser Logaritmus muß mit 2 dividirt und von dem Quotienten 2, 75430 der Logaritmus von 4, welcher 0, 60206 ist, subtrahiret worden. Alsdenn aber ist der Logaritmus des Inhalts, = 2, 15224, welcher zu der Zahl 142, gehört.

§. 389.

Man kann diese Aufgabe durch Hülfe des folgenden Satzes bequemer auflösen.

Es sey nemlich BE ein Bogen, dessen Sinus EH und Cosinus CH. Man ziehe die Sehne
Fig. 30. AE und mit derselben die Linie CD aus dem Mittelpunkt C parrallel, so wird der Bogen BE dadurch in zwey gleiche Theile getheilet, so, daß BD = DE. Von D ziehe man auf CB die Linie DI perpendikulär, so wird DI der Sinus und CI der Cosinus der Hälfte des Bogens BD. Ferner ziehe man CG auf AE perpendikulär, so wird AG = GE. Weil nun die Linie AC = CD, als Halbmessers eines Zirkels, und die Winkel GAC, AGC und DCI, DIC einander gleich sind, so ist auch AG = CI und CG = DI. Wenn also der Bogen BE = A gesetzt wird, so ist BD = $\frac{1}{2}$A und also CI = AG = Cos. $\frac{1}{2}$A und DI = GC = Sin. $\frac{1}{2}$A. Weil nun die Triangel ACG, AEH einander ähnlich

sind,

sind, so wird AC: AG = AE: AH. Es ist aber AH = AC + CH, und wenn r = AC, so wird AH = r + Cos. $\frac{1}{2}$ B. Da nun AE = 2 AG, so wird AE = 2 Cos. $\frac{1}{2}$ B, folglich wird r: Cos. $\frac{1}{2}$ B = 2 Cos. $\frac{1}{2}$ B: r + Cos. $\frac{1}{2}$ B. Also ist beständig $(\text{Cos. } \frac{1}{2} \text{ A})^2 = \frac{r^2 + r \text{ Cos. B}}{2}$

und $\text{Cos. } \frac{1}{2} \text{ B} = \sqrt{\left(\frac{r^2 + r \text{ Cos. B.}}{2}\right)}$

§. 390.

Es ist ferner AC: CG = AE: EH, oder r: Sin. $\frac{1}{2}$ B = 2 Cos. $\frac{1}{2}$ B: Sin. B, da nun Sin. B = $\sqrt{r^2 - (\text{Cos. B})^2}$ und 2 Cos. $\frac{1}{2}$ B = $\sqrt{2(r^2 + r \text{ Cos. B})}$, so wird r: Sin. $\frac{1}{2}$ B = $\sqrt{2(r^2 + r \text{ Cos. B})}$: $\sqrt{(r^2 - (\text{Cos. B},^2)}$ folglich ist

$$\text{Sin. } \frac{1}{2} \text{ B} = \sqrt{\left(\frac{r^2 - r \text{ Cos. B.}}{2}\right)}$$

Da nun (§. 384.) r + Cos. B = $\frac{r(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}$

und r — Cos. B = $\frac{r(b+c-a)(a+c-b)}{2ab}$

und man setzt diese Werthe in den (§. 389.) gefundenen Formeln, so ist in einem jedem Triangel ABC, dessen Seiten alle bekannt sind.

$$\text{Cos. } \frac{1}{2} \text{ B} = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}$$

und $$\text{Sin. } \frac{1}{2} \text{ B} = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{(a+c-b)(b+c-a)}{ab}}$$

Diese beyde Formeln sind in praktischen Fällen noch besser zu gebrauchen, als die erstern.

§. 391.

§. 391.

Aufgabe.

Der Turm ED stehet auf der Fläche in der die gerade Linie AC gezogen worden, perpendikulär. Die Winkel unter denen man den Turm aus den dreyen Punkten A, B, C sieht, werden gegeben, und die Entfernungen der Punkte voneinander, werden auch gegeben. Man soll die Entfernung des Turms von jedem Punkte bestimmen.

§. 392.

Auflösung.

Weil die Entfernungen der Punkte gegeben wird, so sey $AB = a$; $BC = b$, und die Entfernung $BE = x$. Da auch die Winkel DAE, Fig. 31. DBE, DCE gegeben werden, so sey $m =$ Tang. DAE; $n =$ Tang. DBE und $p =$ Tang. DCE. Weil nun alle Triangel DBE, DAE, DCE recht winklicht sind, so wird, wenn der Radius 1 angenommen wird,

$1 : tg\,DAE = EA : DE$ oder $1 : m = EA : DE$
$1 : tg\,DBE = EB : DE$ = $1 : n = x : DE$
$1 : tg\,DCE = EC : DE$ = $1 : p = EC : DE$

Es ist also $mEA = nx$, folglich $EA = \frac{nx}{m}$

$pEC = nx$, = $EC = \frac{nx}{p}$

Ferner ist in dem Triangel EBA, nach der vorigen Aufgabe.

$$\text{Cos. } EBA = \frac{BA^2 + BE^2 - EA^2}{2\,BE.\,AB.}$$

oder

oder Cos. EBE $= \dfrac{a^2 + x^2 - \frac{n^2x^2}{m^2}}{2ax}$

In dem Triangel EBC ist ebenfalls

Cos. EBC $= \dfrac{BC^2 + BE^2 - CE^2}{2\ BC.\ BE.}$

oder Cos. EBC $= \dfrac{b^2 + x^2 - \frac{n^2x^2}{p^2}}{2bx}$

Weil nun die beyde Winkel EBA, EBC zusammengenommen, zweyen rechten Winkeln gleich sind, so ist einer das Supplement des andern, folglich sind ihre Cosinus einander gleich. Es ist demnach

$$\frac{a^2 + x^2 - \frac{n^2x^2}{m^2}}{2ax} = \frac{-b^2 - x^2 + \frac{n^2x^2}{p^2}}{2bx}$$

folglich $a^2b + bx^2 - \frac{bn^2x^2}{m^2} = -ab^2 - ax^2 + \frac{an^2x^2}{p^2}$

wenn man nun die ganze Gleichung mit $m\,p^2$ multiplicirt, so wird

$$p^2m^2a^2b + p^2m^2bx^2 - bp^2n^2x^2 = -p^2m^2ab^2 - ap^2m^2x^2 + am^2n^2x^2$$

folglich $(m^2p^2b - n^2p^2b)x^2 - (am^2n^2 - am^2p^2)x^2 = ab^2p^2m^2 + a^2bp^2m^2$

und $x^2 = \dfrac{(ab^2 + a^2b)p^2m^2}{m^2p^2b - n^2p^2b - am^2n^2 + am^2p^2}$

oder $x^2 = \dfrac{(ab^2 + a^2b)p^2m^2}{(m^2 - n^2)p^2b + (p^2 - n^2)am^2}$

und $x = \mp mp\sqrt{\left(\dfrac{ab^2 + a^2b}{(m^2 - n^2)p^2b + (p^2 - n^2)am^2}\right)}$

Sechster

Sechster Abschnitt.

Von den verwickelten quadratischen Gleichungen, oder von den Gleichungen vom zweiten Grade überhaupt, und denen, die auf die Form dieser Gleichungen gebracht werden können.

§. 393.

Aufgabe.

Es wird die Summe und das Produckt zweyer Größen gegeben, man soll die Größen selbst finden.

§. 394.

Vorbereitung.

Es sollen P die Summe der beyden Größen und Q das algebraische Produckt aus denselben, x und y aber die beyde Größen selbst seyn. Da man nun unter P und Q Größen versteht, welche beschaffen seyn können, wie sie wollen, so ist offenbar, daß bey dieser Aufgabe verschiedene Fälle vorkommen müssen. Nach den Bedingungen der Aufgabe ist also

$$P = x + y$$

$$Q = xy$$

Aus der ersten Gleichung bekomt man $P - x = y$. Setzet man diesen Werth in der zweiten, so erhält man

$$Q = Px - xx.$$

Und

Und weiter läst sich aus den Bedingungen der Aufgabe keine Gleichung herleiten; und wenn man anstatt x den Werth $P - y$ in der zweiten Gleichung setzte, so würde auch $Q = Py - y^2$ seyn, eine Gleichung die von der ersten in nichts weiter unterschieden ist, als daß hier die andre unbekannte Größe, y ist.

Beyde Gleichungen zeigen aber noch nicht den Werth der beyden Größen, so viel aber sieht man leicht ein, daß beyde Größen in jeder Gleichung liegen, und mit einander auf eine gewisse Art verbunden seyn müssen. Um nun den Werth einer jeden besonders zu bestimmen, muß man diese Verbindung suchen zu entdecken.

Wenn man aber die Gleichung so schreibt, daß das Quadrat der unbekanten Größe positiv wird, und die Glieder dergestallt verwechselt, daß dieselbe diese Form bekommt,

$$x^2 - Px = -Q$$

so kann man den Werth von x auf folgende Art bestimmen.

§. 395.

Auflösung.

Man addire auf beyden Seiten das Quadrat der Hälfte des Coefficienten von x oder $\frac{1}{4}PP$, so wird

$$x^2 - Px + \tfrac{1}{4}PP = \tfrac{1}{4}PP - Q.$$

Auf der einen Seite ist aber ein vollkommnes Quadrat der Größe $x - \frac{P}{2}$ und auf der andern Seite

sind lautre bekannte Größen. Wenn man also die Quadratwurzel heraus zieht, so wird

$$x - \frac{P}{2} = \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4} PP - Q)}$$

folglich da die Quadratwurzel sowohl positiv als negativ angenommen werden kann, so sind die beyde Werthe der unbekannten Größe

$$x = \frac{P}{2} + \sqrt{(\tfrac{1}{4} PP - Q)}$$

$$x = \frac{P}{2} - \sqrt{(\tfrac{1}{4} PP - Q)}$$

§. 396.

Zweite Auflösung.

Man kann sich auch auf eine andre Art überzeugen, daß diese beyde gefundene Werthe von x die unbekannte Größen sind, die in der Aufgabe verlangt werden. Anstatt die Größen selbst zu suchen, suche man die algebraische Differenz derselben. Es sey dieselbe u. Da nun P die Summe der beyden Größen ist, so ist $\frac{P + u}{2}$ die eine und $\frac{P - u}{2}$ die andre Größe. Das Produckt aus diesen beyden also, oder

$$Q = \frac{P^2 - u^2}{4}$$

bringt man nun $\frac{u^2}{4}$ auf die andre Seite, so wird

$$\frac{u^2}{4} = \frac{P^2}{4} - Q.$$

folglich $\frac{u}{2} = \mp \sqrt{(\frac{P^2}{4} - Q)}$

Hier-

Hieraus wird also die eine Größe, oder

$$x = \frac{P}{2} + \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)}$$

und die andre, oder

$$y = \frac{P}{2} - \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)}$$

§. 397.

Anmerkung.

Da aber die Größen P und Q sowohl positiv als negativ seyn können, so muß man die Fälle die hierbey vorkommen können, etwas genauer untersuchen.

1.) Wenn sowohl P als Q eine positive Größe ist, so müssen beyde Größen x und y auch positiv seyn, denn sonst könnte ihr Product keine positive Größe seyn, und zugleich auch ihre Summe. Denn gesetzt, es wäre y eine negative Größe, und x eine positive, so könnte zwar $x - y$ eine positive Größe seyn, allein das Product aus beyden würde eine negative Größe seyn, welches aber doch eine positive seyn soll. In diesem Falle aber ist die Gleichung, durch welche die unbekannte Größen bestimt werden.

$$x^2 - Px + Q = 0.$$

In der also alle beyde unbekannte Größen positiv sind.

2.) Ist aber P eine negative Größe, und Q noch positiv, so müssen beyde unbekannte Größen negativ seyn. Denn wenn die eine positiv wäre, und die andre negativ, so könnte ihre Summe zwar negativ seyn, das Product aber würde

auch negativ seyn. Da es aber positiv seyn soll, so ist offenbar, daß beyde Größen negativ seyn müssen. In diesem Falle entsteht aber die Gleichung

$$x^2 + Px + Q = o$$

in welcher also beyde unbekannte Größen negativ sind.

3.) Wäre aber P positiv und Q negativ, so muß die eine von den beyden unbekannten Größen positiv, die andre negativ seyn. Denn wenn beyde positiv oder beyde negativ wären, so würde das Produckt allezeit positiv seyn, dieses aber widerspricht den angenommenen Bedingungen. In diesem Falle aber entsteht diese Gleichung

$$x^2 - Px - Q = o$$

in der also die eine unbekannte Größe positiv, die andre negativ ist.

4.) Wenn endlich P und Q negativ sind, so ist in diesem Falle die Gleichung

$$x^2 + Px - Q = o$$

und die eine unbekannte Größe ist positiv, die andre negativ. Denn sonst könnte nach der Voraussetzung nicht ihre Summe und ihr Produckt zugleich negativ seyn.

§. 398.

Wenn man nun die unbekannten Größen in den verschiedenen Fällen entwickelt, so ist vor dem

1. Fall.

$$x = \tfrac{1}{2}P \mp \sqrt{\left(\frac{PP}{4} - Q\right)}$$

2. Fall.

2. Fall.

$$x = -\tfrac{1}{2}P \mp \sqrt{\left(\frac{PP}{4} - Q\right)}$$

3. Fall.

$$x = \tfrac{1}{2}P \mp \sqrt{\left(\frac{PP}{4} + Q\right)}$$

4. Fall.

$$x = -\tfrac{1}{2}P \mp \sqrt{\left(\frac{PP}{4} + Q\right)}$$

§. 399.

Es sey z. E. im ersten Fall $P = 10$ und $Q = 21$, so wird $\frac{1}{2}P = 5$ und $\frac{1}{4}P^2 = 25$, folglich ist

$x = 5 \mp \sqrt{(25 - 21)} = 5 \mp \sqrt{4} = 5 \mp 2$,

und also die eine unbekannte Größe 7 und die andre 3, und es ist $7 + 3 = 10$ und $3 \cdot 7 = 21$.

Im zweiten Falle sey $P = -12$ und $Q = 27$, so wird $\frac{1}{2}P = -6$ und $\frac{1}{4}P^2 = 36$, folglich $x = -6 \mp \sqrt{(36 - 27)} = -6 \mp \sqrt{9} = -6 \mp 3$, und also die eine unbekannte Größe -3, das andre -9.

Im dritten Fall sey $P = 3$ und $Q = -40$, so wird $\frac{1}{2}P = \frac{3}{2}$, folglich $\frac{1}{4}P^2 = \frac{9}{4}$, und also

$$x = \frac{3}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{9}{4} + 40\right)} = \frac{3}{2} \mp \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{3}{2} \mp \frac{13}{2},$$

folglich ist 8 die eine und -5 die andre unbekannte Größe.

Im vierten Falle sey $P = -4$ und $Q = -77$, so wird $x = -2 \mp \sqrt{(4 + 77)} = -2 \mp 9$, also ist die eine unbekannte Größe -11 und die andre $+7$. Und in allen diesen Fällen, sind die Größen so beschaffen, wie es die Aufgabe verlangt.

§. 400.

Es lassen sich aber alle Gleichungen vom zweiten Grade auf diese Form

$$x^2 + Px + Q = o$$

bringen, in der P und Q lauter bekannte Größen bedeuten. Denn wenn man die Gleichungen also ordnet, daß die zweite Dignität von x oder x^2 vorangeht, und darauf die andern Glieder folgen, so hat entweder das Quadrat von x keinen Coefficienten, und in diesem Falle ist sie schon unter dieser Form, wenn man unter P alle die Größen versteht, durch die die erste Dignität von x multiplicirt wird, und unter Q alle die übrigen bekannten Glieder die in der Gleichung vorkommen. Hat aber x^2 einen Coefficienten, so kann man damit die ganze Gleichung dividiren, und sie hernach wieder unter diese Form bringen.

§. 401.

Also wird diese Gleichung

$3a^2x^2 + 2bx^2 + (a^2b^2 - 3bc)x = 5b^3 - 2ca$

auf diese algemeine Form gebracht, wenn man die ganze Gleichung erstlich mit $3a^2 + 2b$ dividiert und hernach alle Glieder auf eine Seite bringt, als

$$x^2 + \left(\frac{a^2b^2 - 3bc}{3a^2 + 2b}\right)x + \frac{2ca - 5b^3}{3a^2 + 2b} = o$$

Wenn

Wenn man nun $P = \frac{a^2b^2 - 3bc}{3a^2 + 2b}$ und $Q = \frac{2ca - 5b^3}{3a^2 + 2b}$ setzet, so bekomt sie die angegebene Form.

§. 402.

Es lassen sich also nach der vorhin gezeigten Methode alle Gleichungen vom zweiten Grade auflösen, und nachdem man dieselbe auf die allgemeine Form gebracht hat, so bringt man alle die Glieder in denen die unbekannte Größe vorkomt, auf die eine und alle bekannte Größen auf die andre Seite, und alsdenn hat man ferner diese Regel zu beobachten.

Man addire auf beyden Seiten das Quadrat der Hälfte des Coefficienten des Gliedes, in der blos die erste Dignität von x vorkomt, als

$$x^2 + Px + \tfrac{1}{4}PP = \tfrac{1}{4}PP - Q$$

ziehe aus beyden Theilen die Quadratwurzel, so wird

$$x + \tfrac{1}{2}P = \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4}PP - Q)}$$

und bringe alsdenn die bekannten Größen alle auf einer Seite, so wird

$$x = -\tfrac{1}{2}P \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4}PP - Q)}$$

und man kann sich leicht überzeugen, daß dieses in allen Fällen statt findet.

§. 403.

Man pflegt bey dieser Art von Gleichungen die Werthe der unbekannten Größen auch die Wurzeln der Gleichungen zu nennen, dieser Werth bedeutet aber hier ganz etwas anders als in der Aritmetik. Eine jede Gleichung vom zweiten Grade oder eine

jede verwickelte quadratische Gleichung hat also allezeit zwey Wurzeln und nicht mehr, und die niemals einander gleich sind, wie bey den reinen quadratischen Gleichungen.

§. 404.

In dem ersten und zweiten Fall (§. 397. 398.) kann es geschehen, daß Q größer ist, als $\frac{1}{4}$ PP, in diesem Falle wird $\frac{1}{4}$ PP — Q eine negative Größe, aus welcher es unmöglich ist eine Wurzel zu ziehen. Die Größe x ist alsdenn die algebraische Summe einer wirklichen Größe, $\frac{1}{2}$ P und einer unmöglichen $\sqrt{(\frac{1}{4}\,PP - Q)}$, folglich selbst unmöglich.

§. 405.

Wenn hingegen $Q = \frac{1}{4}\,PP$, so wird alsdenn $\frac{1}{4}\,PP - Q = 0$, und in diesem Falle ist

$$x = \frac{1}{2}\,P.$$

Dieses siehet man auch aus der allgemeinen Gleichung, denn diese ist alsdenn

$$x^2 + Px + \frac{1}{4}\,P^2 = 0$$

das Quadrat der Größe $x + \frac{P}{2}$.

§. 406.

Die Auflösung der Gleichung

$$x^2 + Px + Q = 0$$

in diese einfache Gleichungen

$$x = -\frac{P}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4}\,PP - Q)}$$

$$x = -\frac{P}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4}\,PP - Q)}$$

muß

muß alsdenn allezeit vorgenommen werden, wenn man die Größen durch Zahlen ausdrücken will. Will man aber die Werthe der unbekannten Größen geometrisch angeben, so kann es auf folgende Art geschehen.

§. 407.

Aufgabe.

Die unbekannten Größen in der allgemeinen Gleichung $x^2 \ldots . Px \ldots . Q = o$ geometrisch zu bestimmen.

§. 408.

Auflösung.

Die Größen P und Q mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, so muß man vor allen Dingen dieselben durch gerade Linien ausdrücken. Da sie nun aber sowohl positiv als negativ seyn können, so muß man dieses auch nach den angenommenen Begriffen von dem positiven und negativen zu erhalten suchen.

Man ziehe also zwey gerade Linien AB und DE, welche sich unter einen gewissen Winkel C durchschneiden. Man setze ferner, daß alle gerade Linien, welche positiv sind, auf der Linie AB von Fig. 32.
C nach B zu, die negative aber von C nach A zu, genommen werden. Ferner, daß alle diejenige gerade Linien, welche auf der Linie DE genommen werden, und positiv sind, von C nach E zu, die negativen aber von C nach D zu, fortgehen. Die Einheit aus der die Größen P und Q ausgedrückt werden, nenne man U, und diese ist entweder gegeben,

oder man kann dieselben willkührlich annehmen, und dabey ist zu merken, daß dieselbe allezeit positiv ist.

In der Gleichung liegen nun vier Fälle, welche folgende sind:

1) $x^2 - Px + Q = o$
2) $x^2 + Px + Q = o$
3) $x^2 - Px - Q = o$
4) $x^2 + Px - Q = o$

Diese aber entstehen aus folgenden Proportionen

1) $U: P - x = x: Q$
2) $U: -P - x = x: Q$
3) $U: P - x = x: -Q$
4) $U: -P - x = x: -Q$

Wenn also die unbekannte Größen der Gleichung

1) $x^2 - Px + Q = o$

oder

$U: P - x = x: Q$

gefunden werden sollen, so nehme man von C nach E zu die Linie $CF = U$, und da in der Proportion die Linien P und Q positiv sind, so nehme man auf CE die Linien $CG = Q$ von C nach E zu, und von C nach B die Linie $CH = P$ auf der Linie AB.

Hierauf theile man die Linien CH und GF in I und Q in zwey gleiche Theile, und richte in den Punkten I und Q die Linien IK, QK perpendikulär auf, welche sich in K durchschneiden. Mit der Entfernung KF oder KG beschreibe man einen Zirkel, durchschneidet derselbe die Linie AB in L und M, so sind CL und CM die beyde Werthe

der

der unbekannten Größen oder die Wurzeln der Gleichung, welche allezeit positiv sind.

2. Fall.

Wenn man die Gleichung

$$x^2 + Px + Q = o$$

in die Proportion

$$U: -P - x = x: Q$$

aufgelöset hat, so bleibet alles wie in der vorigen Figur, weil aber die Linie P in der Proportion negativ ist, so muß man CH = P auf der Linie AB von C nach A zu, nehmen. Alsdenn sind ebenfalls CL, CM die verlangte Wurzeln, und beyde negativ. Fig. 33.

3. Fall.

Wenn man die Gleichung

$$x^2 - Px - Q = o$$

in die Proportion

$$U: P - x = x: -Q$$

auflöset, so bleibet alles wie im ersten Fall, weil aber die Linie Q negativ ist, so muß man CG = Q von C nach D zu, nehmen. Alsdenn aber sind CM, CL wieder die Wurzeln der Gleichung, davon die eine positiv, die andre negativ ist. Fig. 34.

4. Fall.

Nachdem man die Gleichung

$$x^2 + Px - Q = o$$

in diese Proportion

$$U: -P - x = x: -Q$$

verwandelt, so ist sowohl P als Q negativ. Man nehme Fig. 35.

nehme also wie in dem vorigen Fall $CG = Q$ von C nach D und $CH = -P$ von C nach A. Das Uebrige mache man wie im dritten Falle, so sind wieder CL, CM die Wurzeln der Gleichung, davon die eine positiv, die andre negativ ist.

§. 409.

Beweis.

In allen diesen Figuren ist $CF : CL = CM : CG$. Denn wenn man in allen diesen Figuren die Linien GL, MF zieht, wie (Fig. 35.) so sind die Triangel CLG, CMF einander ähnlich, denn die Winkel bey C sind einander gleich, und da die Winkel CGL, CMF auf einerley Bogen LF stehen, so sind sie auch einander gleich, folglich auch die übrigen Winkel. Ferner ist in allen diesen Figuren die Linie KI perpendikulär aus dem Mittelpunkt auf die Sehne LM des beschriebenen Zirkels, folglich theilet sie dieselbe dergestalt, das $IL = IM$ (Euc. 3. 3). Da nun $CI = IH$ nach der Construktion, so ist auch $CI - IL = IH - IM$, oder $CL = MH$.

Da nun überall $CH = P$; $CF = Q$; $CI = U = 1$, und man nennt CM, x, so ist in dem ersten Fall $CL = MH = CH - CM = P - x$, folglich $1 : P - x = x : Q$ und $Q = Px - x^2$, oder $x^2 - Px + Q = 0$ wie es verlangt worden.

Im zweiten Fall ist $CL = P - x$ wann CM, $+ x$ genennt wird, setzt man aber $CM = -x$, so wird $CL = P + x$, folglich $1 :$

P +

$P + x = -x : Q$ folglich auch $-Px - x^2 = Q$ oder $x^2 + Px + Q = o$.

Nimt man im dritten Fall $CM = x$, so wird $CL = x - P$, folglich $1 : x - P = x : Q$ folglich $x^2 - Px = Q$ oder $x^2 - Px - Q = o$.

Wenn endlich im vierten Fall $CM = x$ gesucht wird, so ist $CL = P + x$, folglich $1 : P + x = x : Q$ und $x^2 + Px = Q$ oder $x^2 + Px - Q = o$.

In allen diesen Fällen entstehen also die angegebene Gleichungen, wenn nur die Linien durch Zeichen und Buchstaben gehörig ausgedrückt werden.

§. 410.

1. Zusatz.

Wenn in dem ersten und zweiten Fall der Radius des Zirkels, nemlich KF der Linie KI, die von K auf AB perpendikulär gezogen worden, gleich wird, so fallen alsdenn die Punkte L und M in I, und jede von den Wurzeln verwandelt sich in $CI = \frac{1}{2} CH = \frac{1}{2} P$. Dieses geschiehet allezeit wenn $CK^2 - CI^2 = CK^2 - CQ^2 + GQ^2$. Folglich wenn $CI^2 = CQ^2 - GQ^2$ da nun $CI = \frac{1}{2} P$ und $CQ = \frac{CF - CG}{2} + CG$ und $GQ = \frac{CF - GC}{2}$, so wird $CI^2 = \frac{(CF + CG)^2}{2} - \frac{(CF - CG)^2}{2}$ oder $CI^2 = CG \times CF$. Da nun $CI = \frac{1}{2} P$ und $CF = U = 1$ und CG

Fig. 36

$CG = Q$, so ist $CI^2 = \frac{1}{4} P^2$ und $CG \times CF = 1 \times Q$. Also ist in diesen Fällen $\frac{1}{4} P^2 = Q$ und $P = \mp 2\sqrt{Q}$.

§. 411.

2. Zusatz.

Wenn aber die Linie KI größer ist, als KF, so wird der Zirkel die gerade Linie AB nicht einmahl berühren, geschweige denn durchschneiden, und alsdenn ist offenbar, daß die Wurzeln der Gleichung unmöglich werden. Dieses geschiehet aber, wenn CI^2 kleiner, als $CQ^2 - CG^2$, oder wenn $\frac{1}{4} P^2$ kleiner, als Q ist, welches vollkommen mit dem übereinstimt, was §. 365. angemerkt worden.

§. 412.

3. Zusatz.

In den beyden andern Fällen können die Wurzeln niemals unmöglich werden, weil die Punkte F und G auf verschiedenen Seiten der Linie AB liegen, und also der Zirkel, welcher durch dieselben beschrieben wird, die gerade Linie AB nothwendig in zweyen Punkten durchschneiden muß. Uebrigens ist in diesen beyden Construktionen auch der Fall mit begriffen, wenn $P = o$ wird, denn alsdenn fällt der Punkt I in C und die beyde Linien CL, CM sind einander gleich. Dadurch bekomt man also auch die geometrische Construktion der Gleichung $x^2 \mp Q = o$, welche nur ein besonderer Fall von dieser allgemeinen ist.

§. 413.

§. 413.

Anmerkung.

Uebrigens haben diese geometrische Construktions in sofern ihren Nutzen, daß sie, so zu sagen, die Natur der Gleichungen von diesem Grade vor Augen legen, und dadurch die Untersuchung derselben erleichtern. Und in dieser Absicht ist es nicht unrecht, wenn man sie überall anbringt, wo es mit einiger Bequemlichkeit geschehen kann. Es kommen aber öfters solche Fälle vor, wo sie so zusammengesetzt werden, daß es rathsamer ist, sich der aritmetischen Auflösung zu bedienen, welches man ohnedem allezeit thun muß, sobald man aus einer gewissen Auflösung den gehörigen Nutzen ziehen, daß ist, sie in der Ausübung anwenden will.

§. 414.

Aufgabe.

Man soll eine gegebene gerade Linie dergestalt theilen, daß das Quadrat aus dem einen Theil so groß ist, als das Recktangel aus der ganzen Linie und dem andern Theil.

§. 415.

Auflösung.

Die gegebene gerade Linie sey $CB = a$, und K der verlangte Punckt, und KC sey x, so wird $KB = a - x$. Nach den Bedingungen der Aufgabe muß also seyn

$$x\,x = a\,(a - x)$$

oder $x^2 = aa - ax$ Fig. 37.

folglich $x^2 + ax - aa = 0$.

§. 419.

§. 416.

Construktion.

Wenn man diese Gleichung nach der allgemeinen Methode construiren will, und sie gegen der allFig. 37 gemeinen Formel hält, so wird man gewahr, daß sie unter dem vierten Fall gehört, und es ist $P = a$ und $Q = aa$. Man mache also hier alles wie dort gezeigt worden, nehme aber $CH = a$ und $CF = CD = a$, theile CH in I in zwey gleiche Theile und beschreibe mit der Entfernung IF einen Zirkel, welche die gerade Linie AB in K und L durchschneidet, so ist K der verlangte Punkt. Denn $CL = CH + HL = a + x$ und ist $CL : CF = CG : CK$, oder $a + x : a = a : x$, folglich $x^2 + ax = aa$, wie es verlangt worden.

§. 417.

Anmerkung.

Der Punkt L in der Linie AB, welcher die andre Wurzel der Gleichung bestimt, löset zwar die Aufgabe nicht so auf, wie sie verlangt worden, er darf aber nicht aus der Acht gelassen werden. Denn da die Bedingungen der Aufgabe durch die algebraische Zeichen nicht so ausgedrückt werden können, daß die Addition von der Subtraction unterschieden wird, so ist offenbar, daß wenn diejenige Größe, welche in der Aufgabe x genennt, und als positiv angesehen wird, negativ ist, sich die Bedingung, welche durch $a - x$ ausgedrückt wird, in $a + x$ verwandelt. Und dieses ist eben

hier

hier der Fall. Denn wenn CL auch x genennt wird, so wird $CK = x - a$, und also $x : a = a : x - a$, oder $aa = x^2 - ax$, oder $x^2 - ax - aa = 0$. Welche Gleichung man gleich zu Anfange gefunden hätte, wenn man anstatt die Linie CB zu theilen, eine Linie zu derselben hätte zusetzen müssen.

§. 417.

Dieses siehet man auch aus der aritmetischen Auflösung dieser Aufgabe, denn es ist

$$x = -\tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{\tfrac{5}{4}aa}$$

oder $x = a \times -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

und $x = a \times -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Diese letzte Wurzel zeigt an, daß anstatt x von AB zu subtrahiren, man es addiren muß.

§. 418.

Ueberhaupt giebt die eine Wurzel in jeder quadratischen Gleichung nur die Auflösung der Aufgabe, so wie sie verlangt wird, und dieses ist allezeit die positive; die negative Wurzel giebt die Auflösung einer andern Aufgabe, die mit der vorgetragenen dergestalt verwandt ist, daß man die eine nicht auflösen kann, ohne zugleich die andre mit einzuschließen. Denn die algebraischen Zeichen sind so beschaffen, daß sie alles in der grösten Allgemeinheit ausdrücken, und da man gezwungen ist, durch das Zeichen — sowohl die gewöhnliche aritmetische Subtraction, als auch zu gleicher Zeit entgegen gesetzte

Bedingungen anzuzeigen, so ist leicht zu begreifen, warum man öfters in der vorgetragenen Aufgabe eine kleine Veränderung machen muß.

§. 419.

Aufgabe.

Man soll in der geraden Linie C D einen Punkt H finden, der so beschaffen ist, daß die Verhältniß des Quadrats der Entfernung des Punkts H von dem Punkte A, zu dem Quadrate der Entfernung eben dieses Punkts H von einen andern Punkt B in eben dieser geraden Linie, einer gegebenen Verhältniß $m : n$ gleich sey.

§. 420.

Auflösung.

Es ist offenbar, daß der Punkt H sowohl rechter als linker Hand A, zwischen A und B, oder außerhalb fallen kann. Man setze, er falle zwischen
Fig. 38 A und B und nenne A B, a, A H, x, so wird H B $= a - x$. Es soll also nach den Bedingungen der Aufgabe

$$x^2 : (a - x)^2 = m : n$$

seyn. Also ist

$$nx^2 = ma^2 - 2amx + mx^2$$

folglich $nx^2 - mx^2 + 2amx - ma^2 = 0$

oder $x^2 + \frac{2am}{n - m} x - \frac{ma^2}{n - m} = 0$

§. 421.

Construktion.

Wenn man diese Gleichung gegen der allgemeinen hält, so kann sie zum vierten Fall gehören,

wenn

wenn n größer, als m, oder zum ersten, wenn n kleiner, als m ist. Wenn sie zum vierten Fall gehört, so ziehe man durch A eine gerade Linie DE, welche die Linie AB durchschneidet, nehme darauf Fig. 38.
$AF = n - m$; $AG = m$; $AL = a$, und ziehe die Linien FG, LM parrallel. Man nehme ferner $AN = \frac{ma}{n-m}$ und theile NL in Q in zwey gleiche Theile, richte in Q und M perpendikulär Linien auf, welche sich in K durchschneiden, und beschreibe mit dem Radius KL einen Zirkel, welcher die gerade Linie AB in H, und H' durchschneidet, so sind AH, AH' die Wurzeln der Gleichung. Denn wenn $AH = x$, so wird

$$x; AL\ (= a) = AN\left(\frac{ma}{n-m}\right) : \frac{2am}{n-m} + x$$

§. 422.

Anmerkung.

Verlangt man eine aritmetische Auflösung dieser Aufgabe, so wird aus der letzten Gleichung

$$x^2 + \frac{2amx}{n-m} = \frac{maa}{n-m}$$

folglich $x = -\frac{am}{n-m} \mp \sqrt{\left(\frac{a^2m^2}{(n-m)^2} + \frac{maa}{(n-m)}\right)}$

oder $x = -\frac{am}{n-m} \mp \sqrt{\left(\frac{a^2m^2 + nmaa - m^2aa}{(n-m)^2}\right)}$

folglich $x = -\frac{am}{n-m} \mp \sqrt{\frac{nmaa}{(n-m)^2}}$

oder $x = -\frac{am \mp a\sqrt{mn}}{n-m}$

oder $x = a \times -\frac{m \mp \sqrt{mn}}{n-m}$

Es sey $a = 15$, $m = 4$, $n = 9$, so wird $x = 15 \times -\frac{4 \mp \sqrt{36}}{9-4} = 15 \times -\frac{4 \mp 6}{5}$, oder $x = +6$, oder $x = -30$.

Wenn aber $m = 3$, $n = 27$, $a = 24$, so wird $x = 24 \times -\frac{3 \mp \sqrt{81}}{27-3} = -3 \mp 9$.

§. 423.

Aufgabe.

Es wird die Lage zweyer geraden Linien AE AF gegeben, man soll von dem gegebenen Punkt C eine gerade Linie ziehen, welche mit den beyden gegebenen einen Triangel macht, dessen Inhalt gegeben ist.

§. 424.

Auflösung.

Weil die Lage dieser geraden Linien gegeben wird, so wird auch der Winkel FAE gegeben, unter dem sie sich durchschneiden. Da nun auch die Lage des Punkts C gegeben wird, so wird auch die Entfernung desselben, von einen jeden Punkte in den Linien AF, AE gegeben.

Fig. 39. Man nehme nun an, die Linie CF wäre so beschaffen, daß sie mit den Linien FA, EA den Trian-

Triangel FAE machte, dessen Inhalt gegeben ist, und dieser Inhalt sey d.

Man ziehe ferner die Linien GE, CB auf AF perpendikulär, und CD mit AE parrallel, so werden auch die Linien AD, CB gegeben. Dahero nenne man AD, a, und CB, b, die Linie AF sey x.

Die beyde Triangel FEA, FCD sind einander ähnlich, und also ist AF: GE = FD: BC, oder x: GE = $x + a$: b, folglich GE = $\frac{bx}{a+x}$

Nun ist der Inhalt des Triangels AFE = $\frac{AF \times GE}{2}$,

folglich ist $\frac{bx}{2(a+x)} \times x = d$,

folglich $bx^2 = 2ad + 2dx$

oder $bx^2 - 2dx - 2ad = 0$

oder $x^2 - \frac{2dx}{b} - \frac{2ad}{b}$

§. 425.

Aufgabe.

Man soll über die gegebene Grundlinie AB einen Triangel ABC beschreiben, dergestalt, daß die Spitze C des der Grundlinie gegen über liegenden Winkels in die gerade Linie EC falle, deren Lage gegeben wird, und die Grundlinie AB soll die mittlere aritmetische proportional Linie zwischen den beyden übrigen Seiten AC, BC seyn. Fig. 40.

§. 426.

Vorbereitung.

Weil die Lage der geraden Linie E C in Absicht auf der gegebenen Grundlinie A B gegeben wird, und man verlängert die Grundlinie, bis sie die Linie E C in E durchschneidet, so wird auch der Winkel E gegeben, unter dem sie sich durchschneiden. Nimt man nun an, daß A C B der verlangte Triangel sey, und man zieht von C auf A E die Linie C D perpendikulär, so wird die Verhältniß der Linie C D zu D E gegeben. Dahero setze man D E: D C = m: n, = rad: Sin. E.

Man theile ferner die gegebene Grundlinie A B in F in zwey gleiche Theile, und setze F E = b, A B = a. Es sey ferner x die Differenz der Seiten B C und A B, oder B C — A B = x, so wird B C = $a + x$. Weil nun die drey Linien B C, A B und A C in einer arithmetischen Progreßion seyn sollen, so muß B C — A B = A B — A C seyn. Folglich ist $x = a - AC$ und A C = $a - x$.

§. 427.

Auflösung.

Es ist nach $BD = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB}$, drückt man nun dieses durch die angenommenen Buchstaben gehörig aus, so wird

$$BD = \frac{aa + a^2 + 2ax + x^2 - a^2 + 2ax - x^2}{2a}$$

oder

oder $BD = \frac{a}{2} + 2x$. Da nun $FD = BD - BF$,

so wird $FD = 2x$, und also $DE = FD + FE = b + 2x$. Ferner ist $CD^2 = CB^2 - BD^2$, oder $CD^2 = a^2 + 2ax + x^2 - \frac{aa}{4} - 2ax - 4x$, oder $CD^2 = \frac{3}{4}aa - 3x^2$ und $CD = \mp V\left(\frac{3}{4}aa - 3x^2\right)$. Es ist aber $DE : CD = m : n$, folglich wird $m : n = b + 2x : \mp V\left(\frac{3}{4}aa - 3x^2\right)$ und wenn man die äußersten und mittelsten Glieder in einander multiplicirt und quadrirt

$$n^2(b^2 + 4bx + 4x^2) = \frac{3}{4}m^2a^2 - 3m^2x^2$$

bringt man nun alle Glieder auf eine Seite, so wird

$$3m^2x^2 + 4n^2x^2 + 4bn^2x + n^2b^2 - \frac{3}{4}m^2a^2 = 0$$

oder

$$x^2 + \frac{4bn^2}{3m^2 + 4n^2}x + \frac{n^2b^2 - \frac{3}{4}m^2a^2}{3m^2 + 4n^2} = 0$$

§. 428.

Construktion.

Wenn man diese Gleichung gegen die allgemeine hält, so wird man gewahr, daß sie entweder zum ersten Fall gehört, wenn $n^2b^2 - \frac{3}{4}m^2a^2$ positiv, oder zum vierten Fall, wenn dieses Glied

negativ ist. Gesetzt, sie gehörte zu dem ersten Fall, so wird

$$P = \frac{4bn^2}{3m^2 + 4n^2} \text{ und } Q = \frac{n^2b^2 - \frac{3m^2n^2}{4}}{3m^2 + 4n^2}$$

Man suche also zu 1, $3m$, und m die vierte proportional Linie, welche ich A nennen will, hernach zu 1 und $2n$ die dritte proportional Linie, welche ich B nennen will. Diese addire man, und suche wieder zu A + B, B und b die vierte proportional Linie, so wird $P = \frac{Bb}{A+B}$. Wenn dieses geschehen, so suche man zu 1 : n und b die vierte proportional Linie die man C nennt, und aufs neue zu 1 und C die dritte proportional Linie, welche D seyn soll.

Endlich suche man zu 1, A und $\frac{1}{2}a$ die vierte proportional Linie E, und aufs neue zu 1, E und $\frac{1}{2}a$ die vierte proportional Linie F, die Linie F subtrahire man von der Linie D, und setze D — F = G, so wird Q die vierte proportional Linie zu A + B, 1 und G.

Nachdem man also die Linien P und Q bestimt, so hat man nur diese Gleichung

$$x^2 + Px + Q = o$$

auf eben die Art zu construiren, wie schon gezeigt worden.

§. 429.

Anmerkung.

Wenn man die Wurzeln zu dieser Gleichung nach der aritmetischen Art bestimmen will, so muß man zu der Gleichung

$x^2 +$

$$x^2 + \frac{4bn^2x}{3m^2+4n^2} = \frac{\frac{3}{4}m^2a^2 - n^2b^2}{3m^2+4n^2}$$

auf beyden Seiten das Quadrat der Hälfte des Coefficienten von x oder das Quadrat von $\frac{2bn^2}{3m^2+4n^2}$ addiren, so wird

$$x^2 + \frac{4bn^2}{3m^2+4n^2} + \frac{4b^2n^4}{9m^4+24n^2m^2+16n^4} = \frac{4b^2n^4}{9m^4+24n^2m^2+16n^4} + \frac{\frac{3}{4}m^2a^2 - n^2b^2}{3m^2+4n^2}$$

und wenn man die Glieder rechter Hand auf einerley Nenner bringt

$$x^2 + \frac{4bn^2}{3m^2+4n^2} + \frac{b^2n^4}{(3m^2+4n^2)^2} = \frac{3m^2n^2a^2 - 3n^2m^2b^2 + \frac{9}{4}m^4a^2}{(3m^2+4n^2)^2}$$

folglich wenn man auf beyden Seiten die Wurzel nimt

$$x + \frac{bn^2}{3m^2+4n^2} = \mp\frac{\sqrt{\left(3m^2n^2a^2 - 3n^2m^2b^2 + \frac{9}{4}m^4a^2\right)}}{3m^2+4n^2}$$

und also

$$x = -bn^2 \mp m\,\frac{\sqrt{\left(3n^2a^2 - 3n^2b^2 + \frac{9}{4}m^2a^2\right)}}{3m^2+4n^2}$$

§. 430.

Aufgabe.

Es wird die Lage dreyer geraden Linien AD, AE, BF gegeben, man soll eine vierte Linie DF ziehen, dessen Theile DE, EF, die zwischen den drey erstern eingeschlossen sind, den gegebenen Linien d, f gleich sind. Fig. 41.

§. 431.

Auflösung.

Weil die Lage dieser geraden Linien gegeben wird, so werden auch die Punkte gegeben, in denen sie sich durchschneiden. Man nenne also $AB = a$, $BH = b$, $AH = c$.

Von dem Punkt E ziehe man die Linie EG auf BF perpendikulär, und EC mit AB parrallel, und nenne $HE = x$.

Die Triangel ABH, ECH sind einander ähnlich, und also AH: AB = HE: EC, oder $c : a = x$: EC, folglich ist $EC = \frac{ax}{c}$.

Ferner AH: HB = HE: CH, oder $c : b = x$: CH und $CH = \frac{bx}{c}$, folglich wenn man dazu die Linie HB addirt, so wird $CB = \frac{bx + bc}{c}$.

Es sind ferner die Triangel FEC, FDB einander ähnlich, und demnach ED: CB = EF: CF, oder $d : \frac{bx + bc}{c} = f$: CF, und folglich $CF = \frac{bfx + bcf}{cd}$.

Da

Da nun die Linie G E auf B F perpendikulär ist, so ist in den Triangel C E F $\frac{FC^2 + EC^2 - EF^2}{2FC} = CG$ und eben so, wegen den Triangel CEH, ist $CG = \frac{HE^2 - FC^2 - CH^2}{2CH}$, da nun diese beyde Werthe der Linie CG, einander gleich sind, und man drückt dieselben durch die gefundene und angenommene Buchstaben gehörig aus, so wird

$$\frac{\left(\frac{bfx+bcf}{cd}\right)^2 + \frac{a^2x^2}{c^2} - ff}{2\left(\frac{bfx+bcf}{cd}\right)} = \frac{x^2 - \frac{a^2x^2}{c^2} - \frac{b^2x^2}{c^2}}{\frac{2bx}{c}}$$

oder $\frac{bfx+bcf}{d} + \frac{a^2dx^2 - c^2f^2d}{bfx+cfb} = \left(\frac{c^2-a^2-b^2}{b}\right)x$

folglich $\frac{a^2dx^2 - c^2f^2d}{bfx+cfb} + \frac{bcf}{d} = \left(\frac{c^2-a^2-b^2}{b} - \frac{bf}{d}\right)x$

setzt man nun $\frac{c^2-a^2-b^2}{b} - \frac{bf}{d} = m$, so wird

$$\frac{a^2dx^2 - c^2f^2d}{bfx+cfb} + \frac{bcf}{d} = mx,$$

Man multiplicire alles mit $bfx + cfb$, so bekomt man

$a^2d^2x^2 - c^2f^2d^2 + b^2cf^2x + b^2c^2f^2 = mbfx^2 + mbcfx$

und wenn man alle Glieder in denen die unbekannte Größe ist, auf eine Seite bringt

$(a^2d^2 - mbf)x^2 + (b^2f^2c - mbcf)x = c^2f^2d^2 - b^2c^2f^2$

und also

$$x^2 + \frac{(b^2cf^2 - mbcfd)x}{a^2d^2 - mbfd} = \frac{c^2f^2d^2 - b^2c^2f^2}{a^2d^2 - mbfd}$$

Setzet man nun $\frac{a^2d^2 - mbfd}{cf} = p$ und $b^2f - mbd = q$ und $cfd^2 - b^2cf = r$, so wird $x^2 + \frac{qx}{p} = \frac{r}{p}$, oder $x^2 + \frac{qx}{p} - \frac{r}{p} = o$.

§. 432.

Construktion.

Diese Gleichung gehöret eben wie die in der vorigen Aufgabe entweder zum vierten oder zum zweiten Fall der allgemeinen Gleichung; vor allen Fig. 42 Dingen suche man erst den absoluten Werth der Größen $\frac{q}{p}$ und $\frac{r}{p}$ und setze $\frac{q}{p} = P$ und $\frac{r}{p} = Q$. Wenn nun die Linie zu dem zweiten Fall gehört, so nehme man auf der Linie *HB* die Linie HK = 1, und HL = Q. Ferner auf der Linie AH die Linie HN = P, theile HN in P in zwey gleiche Theile und LK in Q in zwey gleiche Theile, richte in P und Q perpendikulär Linien auf, welche sich in O durchschneiden, und beschreibe als denn mit der Entfernung OL einen Zirkel, welcher die Linie AH in E und *e* durchschneidet.

Wenn dieser Punkt E gefunden, so zieht man EC mit AB parrallel, und nimmt auf BC: FC = $d:f$, zieht die Linie FE und verlängert dieselbe bis sie AD in D durchschneidet, so ist die Aufgabe gehörig aufgelöset.

§. 433.

Aufgabe.

Der Turm DE stehet auf die Fläche, in der sich der Triangel ABC befindet, perpendikulär. Man weiß die Winkel, unter denen der Turm in den Punkten A, B, C erscheint; man weiß ferner die Entfernungen der Punkte A, B, C voneinander, und man will die Entfernung des Turms von einem jeden Punkte wissen. Fig. 43.

§. 434.

Auflösung.

Da die Winkel bekannt sind, unter denen man den Turm in A, B, C sieht, so sind auch die Tangenten derselben bekannt. Es sey also die Tangente des Winkels DAE = m; des Winkels DBE = n; des Winkels DCE = p. Es ferner die Linie AC = a.

Nun ist offenbar, daß man die Entfernung des Punkts D von den gegebenen Punkten wissen würde, sobald man wüste, wie weit derselbe von der gegebenen Linie AC entfernet ist.

Man ziehe also von D auf AC die Linie DF perpendikulär, und nenne AF = x, und FD = y, sobald man nun diese beyde Linien bestimmen kann, so weiß man auch die Entfernung des Punkts D von den gegebenen Punkten A, B, C.

Es ist aber AD: DE = 1: tg DAE = 1: m, und BD: DE = 1: tg DBE = 1:

$= 1 : n$, und $CD : DE = 1 : tg\ DCE = 1 : p$. Also ist $AD : BD = n : m$, und $AD : DC = p : m$. Es ist also die Verhältniß der Entfernungen gegeben.

Man ziehe von B auf AC die Linie BG perpendikulär, so wird dieselbe, da alle Seiten des Triangels ABC bekannt sind, gegeben. Man setze also $BG = b$, und $AG = c$.

Es ist aber $AD^2 = AF^2 + FD^2 = x^2 + y^2$ und da $FC = a - x$, so wird $CD^2 = a^2 - 2ax + x^2 + y^2$. Ferner wenn man BH auf die verlängerte DF perpendikulär zieht, so wird $BH = GF$ und $BG = HF = b$, folglich $HD = y + b$.

Nun ist $AD : CD = p : m = \sqrt{(x^2+y)} : \sqrt{(a^2 - 2ax + x^2 + y^2}$, man nehme die Quadrate von allen Gliedern der Proportion und multiplicire die äußersten und mittelsten, so wird

$$\frac{m^2x^2 + m^2y^2}{p^2} = a^2 - 2ax + x^2 + y^2$$

und $$\frac{m^2x^2 - p^2x^2 + m^2y^2 - p^2y^2}{p^2} = a^2 - 2ax.$$

Es ist ferner $BD^2 = HB^2 + HD^2 = (AF - AG)^2 + HD^2 = (x - c)^2 + (y + b)^2$, oder $BD^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 2by + b^2$. Da nun auch $AD : DB = n : m = \sqrt{(x^2 + y^2)} : \sqrt{(x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 2by + b^2)}$ und man quadrirt

alle

alle Glieder und multiplicirt hernach die äußersten und mittelsten, so wird

$\frac{m^2x^2+m^2y^2}{n^2} = x^2-2cx+c^2+y^2+2by^2+b^2$,

oder $\frac{m^2x^2-n^2x^2+m^2y^2-n^2y^2}{n^2} = c^2-2cx+2by+b^2$.

Man setze der Bequemlichkeit wegen $\frac{m^2-p^2}{p^2} = \alpha$

$\frac{m^2-n^2}{n^2} = \beta$; $c^2+b^2 = \gamma$, so wird

$\alpha x^2 + \alpha y^2 - a^2 + 2ax = 0$

$\beta x^2 + \beta y^2 - \gamma + 2cx - 2by = 0$

Von diesen letztern multiplicire man die erstere mit β und die zweite mit α, subtrahire die erste von der zweiten, so wird

$a^2\beta - \gamma\alpha + (2c\alpha - 2a\beta)x - 2b\alpha y = 0$

setzt man nun ferner zu mehrerer Kürze

$\frac{a^2\beta-\gamma\alpha}{2b\alpha} = \delta$ und $\frac{2c\alpha-2a\beta}{2b\alpha} = \varepsilon$

so wird $y = \delta + \varepsilon x$.

Das Quadrat von diesen gefundenen Werth setze man in der Gleichung $\alpha x^2 + \alpha y^2 = a^2 - 2ax$, so wird

$\alpha x^2 + \varepsilon^2\alpha x^2 + 2\delta\varepsilon\alpha x + \delta^2\alpha = a^2 - 2ax$

und $(\alpha+\varepsilon^2\alpha)x^2+(2\delta\varepsilon\alpha+2a)x+\delta^2\alpha-a^2 = 0$

und wenn man alles mit $\alpha + \varepsilon^2\alpha$ dividirt, so bekommt man

$x^2 + \frac{(2\delta\varepsilon\alpha+2a)}{\alpha+\varepsilon^2\alpha}x + \frac{\delta^2\alpha-a^2}{\alpha+\varepsilon^2\alpha} = 0$

§. 435.

Anmerkung.

Das geometrische Verfahren um den Werth von x zu bekommen, kann nach § 407. angestellt werden. Da diese Aufgabe aber öfters in der Praxi vorkommen kann, so ist es weit besser dieselbe arithmetisch aufzulösen. In dergleichen Fällen suche man vor allen Dingen den Werth von $\frac{m^2 - p^2}{p^2} = \alpha$; $\frac{m^2 - n^2}{n^2} = \beta$; $b^2 + c^2 = \gamma$; $\frac{a^2\beta - \alpha\gamma}{2b\alpha} = \delta$ und $\frac{2c\alpha - 2a\beta}{2b\alpha} = \varepsilon$, ferner setze man $\frac{\delta\varepsilon\alpha + a}{\alpha + \varepsilon^2\alpha} = P$, und $\frac{\delta^2\alpha - a^2}{\alpha + \varepsilon^2\alpha} = Q$, damit man die Gleichung

$$x^2 + 2Px + Q = o$$

bekomt, aus der man

$$x = -P \mp \sqrt{(P^2 - Q)}$$

findet. Hat man den Werth von x gefunden, so findet man auch den Werth von y aus der Gleichung $\delta + \varepsilon x$ und aus diesen beyden gefundenen Größen die Entfernung $AD = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ aus der man nachgehends die übrigen Linien BD, CD erhält.

§. 436.

Es verdienet hier die Methode angemerkt zu werden, deren man sich bedienet, um y^2 weg zu schaffen; es kam zwar auch zugleich x^2 weg, allein dieses ist ein besonderer Zufall, und ereignet sich selten.

ten. Man kann sich dieser Methode in verschiedenen andern Fällen bedienen.

Gesetzt man hätte die Gleichungen

$$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = o$$
$$a y^2 + b y + c = o$$

und α, β, γ, a, b, c, bedeuten solche Größen, in denen auch x und die Dignitäten dieser unbekannten Größe vorkommen können.

Will man nun die unbekannte Größe y völlig heraus haben, so multiplicire man die erste Gleichung mit a, und die zweite mit α, so wird

$$\alpha a y^2 + \beta a y + \gamma a = o$$
$$\alpha a y^2 + b \alpha y + c \alpha = o$$

subtrahire die zweite von der ersten, so wird

$$(\beta a - \alpha b) y + a\gamma - c\alpha = o$$

Ferner multiplicire man die erste Gleichung mit c, und die zweite mit γ, so wird

$$c\alpha y^2 + c\beta y + c\gamma = o$$
$$\gamma a y^2 + \gamma b y + c\gamma = o$$

subtrahire wieder die zweite von der ersten, und dividire hernach mit y

$$(c\alpha - \gamma a) y + c\beta - \gamma b = o$$

Setzt man nun $a\beta - \alpha b = A$; $a\gamma - c\alpha = B$; $c\alpha - \gamma a = A'$; $c\beta - \gamma b = B'$, so wird

$$A y + B = o$$
$$A' y + B' = o$$

Nun multiplicire man die erste wieder mit A', und die zweite mit A, und subtrahire, so wird

$$BA' - B'A = o.$$

Eine Gleichung in der keine andre unbekannte Größe als x und die Dignitäten derselben vorkommen.

Eben so verfährt man, wenn in beyden Gleichungen noch höhere Dignitäten von y, als y^3, y^4 ꝛc. vorkommen. Da diese Methode sehr nützlich ist, so wird sich ferner Gelegenheit finden, dieselbe vollständiger abzuhandeln.

§. 437.

Aufgabe.

Es wird der Umkreis eines Triangels ABC der Inhalt und ein Winkel gegeben, man soll die Seiten bestimmen.

§. 438.

Vorbereitung.

Es sey $AB + BC + AC = a$, und der Fig. 44. Inhalt $= bb$, oder dem Quadrate der Linie b gleich, der gegebene Winkel sey A, so werden der Sinus, Cosinus, Tangente ꝛc. dieses Winkels gegeben. Man ziehe die Linie CD perpendikulär auf AB, so ist die Verhältniß AC: CD der Verhältniß des Radius zum Sinus des Winkels A, und die Verhältniß AC: AD der Verhältniß des Radius zum Cosinus des Winkels A gleich. Es sey also r der Radius, f der Sinus, c der Cosinus des Winkels A. Ferner sey die Seite $AC = x$, $AB = y$, so wird $BC = a - x - y$. Es ist ferner der Inhalt des Triangels $bb = \frac{AB \times CD}{2}$.

§. 439.

Auflösung.

Weil $AC : CD = x : CD = r : f$, so wird $CD = \frac{fx}{r}$ folglich wenn man diesen gefun-

denen

denen Werth von CD in der Gleichung $bb = \frac{AB \times CD}{2}$ setzet, so wird $2bb = \frac{fxy}{r}$, und hieraus $\frac{2rbb}{fx} = y$.

Weil auch AC: AD $= x$: AD $= r$: c, so wird AD $= \frac{cx}{r}$, und also DB $=$ AB $-$ AD $= y - \frac{cx}{r}$.

Nun ist in dem rechtwinklichten Triangel CBD das Quadrat der Seite CB so gros, als die Summe der Quadrate der Seiten BD und CD, folglich wenn man dieses durch Zeichen gehörig ausdrückt, so wird

$CB^2 = \frac{f^2x^2}{r^2} + y^2 - \frac{2cxy}{r} + \frac{c^2x^2}{r^2}$ oder

$CB^2 = \frac{(f^2 + c^2)x^2}{r^2} + y^2 - \frac{2cxy}{r}$. Da nun $f^2 + c^2 = r^2$, so wird $\frac{f^2 + c^2}{r^2} = 1$, folglich $CB^2 = x^2 + y^2 - \frac{2cxy}{r}$, und CB $= \mp \sqrt{\left(x^2 + y^2 - \frac{2cxy}{r}\right)}$. Hieraus aber wird $a = x + y \mp \sqrt{\left(x^2 + y^2 - \frac{2cxy}{r}\right)}$.

Aus dieser Gleichung muß man nun eine von den unbekannten Größen durch bekannten und die andre unbekannte Größe bestimmen. Man

bringe dahero $x + y$ auf die andre Seite, so wird

$$a - x - y = \mp V\left(x^2 + y^2 - \frac{2cxy}{r}\right).$$

Das Wurzelzeichen muß nun weggebracht werden, welches geschiehet, wenn man auf beyden Seiten quadrirt, und alsdenn ist

$$a^2 - 2ax - 2ay + x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 - \frac{2cxy}{r}.$$

Läst man nun die Glieder weg, welche einander aufheben, und bringt die unbekannte Größen alle auf einer Seite, so bekomt man

$$-2ax - 2ay + 2xy + \frac{2cxy}{r} = -aa$$

oder $2ax + 2ay - 2xy\,\frac{(r+c)}{r} = aa.$

Setzt man nun hier vor y diesen Werth $\frac{2rbb}{fx}$

so wird

$$2ax + \frac{4arbb}{fx} - \frac{4rbb}{f}\left(\frac{r+c}{r}\right) = aa,$$

und wenn man alles mit fx multiplicirt

$$2afx^2 + 4arbb - 4rbbx - 4bbcx = aafx$$

dividirt man nun durch $2af$ und bringt alle unbekannte Größen auf die eine, und die bekannten auf die andre Seite, so wird

$$x^2 - \left(\frac{4rbb + 4bbc + aaf}{2af}\right)x = -\frac{2rbb}{f}$$

der Kürze wegen setze man $\frac{4rbb + 4bbc + aaf}{2af} = 2f$, so ist $x^2 - 2fx = -\frac{2rbb}{f}$

und

und wenn man die Wurzel nimt

$$x = f \mp V\left(ff - \frac{2rbb}{s}\right)$$

§. 440.

Anmerkung.

Der doppelte Werth der Größe x kann hier keinen Zweifel erregen, wenn man bedenkt, daß die beyden Seiten, welche um den Winkel A liegen, auf einerley Art von den gegebenen Größen abhangen, und daß man also dieselben zugleich finden mußte. Denn die letzte Gleichung in einer Aufgabe zeigt allezeit nur, wie die Größen, welche man suche, mit denen bekannten verbunden sind. Folglich muß auch die Gleichung anzeigen, wenn zwey Größen auf gleiche Art von den bekannten abhangen. Hieraus folgt also, daß, wenn

$$AC = f + V\left(ff - \frac{2rbb}{s}\right)$$

angenommen wird,

$$AB = f - V\left(ff - \frac{2rbb}{s}\right)$$

seyn muß, und umgekehrt. Alsdenn aber ist $AC + AB = 2f$, und also die drittte Seite $BC = a - 2f$.

§. 441.

Diese Aufgabe ist übrigens nur alsdenn möglich, wenn ff größer, als $\frac{2rbb}{s}$, ist aber ff kleiner, so wird die Größe, welche unter dem Wurzelzeichen steht, negativ, und also die Aufgabe unmöglich.

lich. Wenn endlich $ff = \frac{2rbb}{f}$, so ist $x = f$, und auch $y = f$, und in diesem Falle ist der Triangel ein gleichschenklichter.

§. 442.

Bey Gelegenheit dieser Aufgabe kann man sich auch die Methode anmerken, durch welche man das Wurzelzeichen aus der Gleichung heraus geschaft hat. Denn wenn eine oder mehrere unbekannte Größen dieses Zeichen vor sich haben, so muß es allezeit weggebracht werden. Bey den bekannten Größen kann es aber bleiben, weil es nichts an der völligen Auflösung hindert.

Um es aber vor die unbekannte Größen wegzubringen, muß man nach und nach entweder die ganze Gleichung quadriren oder cubiren ꝛc. nachdem das Zeichen entweder die Quadrat- oder Cubickwurzel andeutet. Sind mehrere Wurzelzeichen darinnen, so schaft man eins nach dem andern weg.

§. 443.

Gesetzt, man soll aus der Gleichung

$$a + \sqrt{x} = \sqrt{y}$$

das Wurzelzeichen wegschaffen, so quadrire man, so wird

$$a^2 + 2a\sqrt{x} + x = y.$$

Man bringe nun alle Glieder, welche kein Wurzelzeichen vor sich haben auf die eine Seite, so ist

$$2a\sqrt{x} = y - x - a^2$$

quadrirt man wieder, so bekomt man

$$4a^2x = (y - x - a^2)^2$$

eine

eine Gleichung in der kein Wurzelzeichen mehr und die also rational ist.

§. 444.

Es sollen aus der Geichung

$$a = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

auch alle Wurzelzeichen weggeschaft werden. Dieses muß nun nach und nach geschehen. Man schaffe es also erstlich vor der Größe x weg, und in dieser Absicht bringe man alle die übrige Glieder auf die eine Seite, als

$$a - \sqrt{y} - \sqrt{z} = \sqrt{x}$$

und quadrire, so wird

$$a^2 - 2a\sqrt{y} - 2a\sqrt{z} + y + 2\sqrt{yz} + z = x.$$

Nachdem dieses geschehen, so bringt man es vor der Größe y weg, und alle Glieder in denen kein $\sqrt{y}$ ist, auf die andre Seite, so ist

$$-2a\sqrt{y} - 2\sqrt{yz} = x - a^2 + 2a\sqrt{z} - y - z$$

und der Kürze wegen setzt man $x - a^2 - y - z = f$, so wird

$$-2a\sqrt{y} - 2\sqrt{yz} = f - 2a\sqrt{z}$$

man quadeirt wieder, so ist

$$4a^2y + 8ay\sqrt{z} + 4yz = f^2 - 4af\sqrt{z} + 4a^2z.$$

Man bringe wieder alle die Glieder in denen $\sqrt{z}$ vorkomt, auf die eine Seite

$$8ay\sqrt{z} + 4af\sqrt{z} = f^2 + 4a^2z - 4yz - 4a^2y$$

oder

$$(8ay + 4af)\sqrt{z} = f^2 + 4a^2z - 4yz - 4a^2a.$$

Wenn man nun noch einmahl quadrirt, so bekomt man eine Gleichung in der kein Wurzelzeichen mehr ist.

§. 445.

Eben so verfährt man, wenn die Cubick, Biquadrate oder Wurzeln aus den andern Dignitäten vorkommen. Sind aber die Wurzelzeichen nicht von einerley Ordnung, so muß man vorher alle auf einerley Ordnung bringen, und wenn dieses geschehen, so verfährt man auf eben die vorige Art.

§. 446.

Gesetzt man hätte die Gleichung

$$a + \sqrt[4]{x} = \sqrt[6]{y} + \sqrt[2]{z}$$

so wird $\sqrt[4]{x} = \sqrt[6]{x^3}$ und $\sqrt[3]{y} = \sqrt[6]{y^2}$ und $\sqrt[2]{z} = \sqrt[6]{z^3}$

folglich $a + \sqrt[6]{x^3} = \sqrt[6]{y^2} + \sqrt[6]{z^3}$

folglich $\sqrt[6]{x^3} = \sqrt[6]{y^2} + \sqrt[6]{z^3} - a$

alsdenn erhebt man beyde Theile der Gleichung auf die sechste Dignität und verfährt übrigens nach der vorhin gezeigten Methode. In dergleichen Fällen wird aber die Arbeit öfters so weitläuftig, daß man es kaum aushalten kann. Indessen zeigt die Uebung öfters Mittel und gewisse Kunstgriffe näher zum Zwecke zu kommen, und außerdem kommen dergleichen Fälle auch selten vor.

§. 447.

Aufgabe.

CBD ist ein rechter Winkel. A ein Punkt in der verlängerten Linie CB. Man soll zwischen den Schenkeln dieses rechten Winkels eine gerade Linie CD ziehen, welche einer gegebenen geraden Linie gleich seyn und dergestalt liegen soll, daß, wenn man von dem

Fig. 54.

denn gegebenen Punkt A nach dem äußersten Punkt D der Linie CD eine gerade Linie zieht, der Winkel ADC ebenfalls ein rechter Winkel sey.

§. 448.

Auflösung.

Die gerade Linie, welcher die Linie CD gleich seyn soll, sey a, und die Entfernung des Punkts A von B, oder AB sey $= b$. Um nun diese Aufgabe aufzulösen, komt es blos darauf an, den Punkt D zu bestimmen. Es sey also $BD = x$, so ist in dem recht winklichten Triangel ABD, $AD^2 = AB^2 + BD^2$, oder $AD^2 = x^2 + b^2$ und $AD = \sqrt{(x^2 + b^2)}$.

Es soll aber der Winkel ADC ein rechter Winkel seyn, folglich wird der Triangel ADC in zwey ähnliche Triangel getheilt, welche sich selbst und den ganzen ähnlich sind. Dahero ist $AB : BD = AD : DC$, oder $b : x = \sqrt{(xx + bb)} : a$, folglich

$$x\sqrt{(xx + bb)} = ab,$$

und $x^4 + b^2x^2 = a^2b^2$

oder $x^4 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$.

Wenn man diese Gleichung etwas genauer untersucht, so wird man leicht gewahr, daß sich dieselbe auf die Form der quadratischen Gleichungen bringen läst. Denn wenn man $x^2 = z$ setzet, so wird $x^4 = z^2$, folglich verwandelt sich die vorige Gleichung in diese:

$$z^2 + b^2z - a^2b^2 = 0,$$

und also würde $z = x^2 = -\frac{b^2}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b^4}{4} + a^2 b^2\right)}$

und $x = \mp \sqrt{\left(\frac{-b^2 \mp b\sqrt{(b^2+4a^2)}}{2}\right)}$

§. 449.
Anmerkung.

Diese Größe x hat also vier Werthe, welche sind:

$$x = +\sqrt{\left(\frac{-b^2 + b\sqrt{(b^2+4a^2)}}{2}\right)}$$

$$x = -\sqrt{\left(\frac{-b^2 + b\sqrt{(b^2+4a^2)}}{2}\right)}$$

$$x = +\sqrt{\left(\frac{-b^2 - b\sqrt{(b^2+4a^2)}}{2}\right)}$$

$$x = -\sqrt{\left(\frac{-b^2 - b\sqrt{(b^2+4a^2)}}{2}\right)}$$

Fig. 46. Die erste beyde Werthe von x sind allezeit würklich. Denn $\sqrt{(b^2+4a^2)}$ ist allezeit größer, als b, folglich ist $b\sqrt{(b^2+4a^2)}$ größer, als b^2, und dahero wird $-b^2 + b\sqrt{(b^2+4a^2)}$ allezeit eine positive Größe, aus welcher sich die Wurzel ziehen läst.

Uebrigens ist leicht einzusehen, warum der eine Werth von x positiv, der andre negativ ist. Denn der Punkt D kann sowohl unter als über der Linie CB fallen, weil in der Aufgabe nichts weiter verlangt wird, als daß die Linie CD zwischen den Schenkeln des rechten Winkels fallen soll.

Die beyde andre Wurzeln der Gleichung sind aber unmöglich, weil die Größe $\frac{-b^2 - b\sqrt{(b^2+4a^2)}}{2}$

nega-

negativ ist, aus der sich keine Wurzel ziehen läst. Allein, woher kommen hier zwey unmögliche Werthe von x? Diese Frage kann leicht durch folgende Betrachtungen beantwortet werden. Es wird in der Aufgabe verlangt, zwischen den Schenkeln des rechten Winkels eine gerade Linie zu ziehen, deren Länge gegeben ist. Da nun um den Punkt B vier rechte Winkel fallen, so kann, wenn der Punkt D über B genommen wird, die Linie CD und Dc der gegebenen Linie gleich seyn, davon die erste linker Hand B, und die andre rechter Hand B fällt. Diese Bedingung ist allezeit zu erfüllen. Allein der Winkel ADC soll ein rechter Winkel seyn. Da nun der Winkel ADc nimmermehr ein rechter Winkel seyn kann, so folgt daraus, daß die gegebene Linie, nur wie CD fallen kann. Denn bey der andern die wie Dc fällt, ist es offenbar, daß die zweite Bedingung der erstern widerspricht. Fig 46.

Wird der Punkt unterhalb BC, genommen, so findet eben dieses auch statt. Es sind also von den vier Fällen nach denen die Linie CD von D zwischen den Schenkeln des rechten Winkels fallen kann, nur zwey möglich, in denen dieselbe so fällt, daß die Linie AD mit CD einen rechten Winkel einschließen kann. Hieraus sieht man auch augenscheinlich, warum die Gleichung zwey unmögliche Wurzeln haben muß.

§. 450.

Wenn man diese Gleichung geometrisch beschreiben will, so kann dieses entweder geschehen, wenn man die Gleichung $z^2 + l^2 z - a^2 b^2 = o$

nach

nach dem vierten Fall (§. 408.) construirt, und hernach zwischen den positiven Werth von z und 1 die
Fig. 47. mittlere Proportional-Linien sucht; es kann aber noch bequemer auf diese Art geschehen. Man nehme $BE = 2a$ und ziehe die Linie AE. Alsdenn beschreibe man mit der Linie AE einen Bogen, welcher die verlängerte Linie AB in F durchschneidet. Hierauf theile man AB in G in zwey gleiche Theile, und beschreibe über die Linie GF als den Diamenter einen Zirkel, welcher die Linie BE in D und D' durchschneidet. So sind dieses die verlangte Punkte. Denn $AE^2 = AB^2 + BE^2$, oder $AE^2 = b^2 + 4a^2$, folglich $AE = \sqrt{(b^2 + 4a^2)}$ ferner $BF = AF - AB$, also da $AF = AE$, so wird $BF = -b + \sqrt{(b^2 + 4a^2)}$. Ferner ist $BG\ (\frac{1}{2}b) : BD = BD : BF$, oder $\frac{1}{2}b : BD = BD : -b + \sqrt{(b^2 + 4a^2)}$, welches die Richtigkeit dieser Construktion beweiset.

§. 451.

Eben so wie man in dieser Aufgabe die Gleichung vom vierten Grade auflöset, kann man alle diejenigen Gleichungen auflösen, in die höchste Dignität der unbekannten Größe x^{2m} ist, und außerdem keine andre Dignität darinnen vorkomt, als x^m. Diese Art von Gleichungen wird also in dieser allgemeinen Formel

$$x^{2m} - Px^m + Q = o$$

enthalten seyn, wo P und Q lauter bekannte Grössen bedeuten, die entweder positiv oder negativ seyn können. In allen diesen Gleichungen ist

$$x^m = \frac{P}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{PP}{4} - Q\right)}$$

Die-

Dieses ist leicht zu beweisen, denn man setze $x^m = z$, so wird $x^{2m} = z^2$, und die erste Gleichung verwandelt sich in

$$z^2 - Pz + Q = o$$

und also $z = \frac{P}{2} \mp V\left(\frac{PP}{4} - Q\right)$

Man darf nur jetzt vor z wieder x^m setzen, so bekomt man den angezeigten Werth von x^m. Diese Gleichung

$$x^m = \frac{P}{2} \mp V\left(\frac{PP}{4} - Q\right)$$

ist eine reine Gleichung, und man bekomt daraus

$$x = \sqrt[m]{\left(\frac{P}{2} \mp V\left(\frac{PP}{4} - Q\right)\right)}$$

Diese Art von Gleichungen kann also vollkommen aritmetisch aufgelöset werden, allein in den wenigsten Fällen geometrisch.

§. 452.

Aufgabe.

Es wird das Quadrat ABCD gegeben, dessen Seiten verlängert werden können; man soll aus der Spitze eines von den Winkeln desselben, eine gerade Linie DE ziehen, dessen Theil FE, welcher zwischen den Schenkeln eines von den Winkeln um B fällt, einer gegebenen geraden Linie gleich sey. Fig. 48.

§. 453.

Vorbereitung.

Wenn man die Aufgabe genau untersucht, so wird man gewahr werden, daß dieselbe verschiedene

dene Fälle in sich schließt. Denn da um den Punkt B vier Winkel liegen, so kann die Linie DE entFig. 49. weder so gezogen werden, daß der Theil FE zwischen den Schenkeln des Winkels CBE, oder zwischen den Schenkeln des Winkels ABG, oder zwischen den Schenkeln des Winkels ABC fällt. Innerhalb den Schenkeln des Winkels ABC kann die gegebene Linie auf zweyerley Art gezogen werden. Denn wenn N*n* diese Linie wäre, und man nimt *Bl* = BN und zieht durch *l* und D wieder eine gerade Linie, so wird L*l* = N*n*. Hieraus folgt also, daß diese Aufgabe vier Fälle haben kann, und man kann schon zum Voraus vermuthen, daß die unbekannte Größe in der Gleichung vier Werthe haben muß.

§. 454.

Auflösung.

Es sey 2*b* die gegebene gerade Linie, welcher die Linie EF gleich seyn soll. Die Seite des Quadrats AB = AD = DC = CB = *a*, und DE die Lage der verlangten geraden Linie. Man theile dieselbe in H in zwey gleiche Theile, so, daß HF = HE = *b*, und nenne DH = *x*.

Die Triangel DAE, FBE sind einander ähnlich, folglich ist DF: AB = FE: BE und BE: BF = AE: AD. Da nun DF = DH — HF = *x* — *b*, so wird *x* — *b*: *a* = 2*b*: BE, und also BE = $\frac{2ab}{x-b}$, folglich AE = $a + \frac{2ab}{x-b}$ = $\frac{ax + ab}{x-b}$.

Also

Also nach der zweiten Proportion

$\frac{2ab}{x-b} : BF = \frac{ax+ab}{x-b} : a$, und also $BF = \frac{2ab}{x+b}$.

In dem rechtwinklichten Triangel FBE ist aber $FE^2 = BF^2 + BE^2$, folglich

$$4b^2 = \frac{4a^2b^2}{x^2+2bx+b^2} + \frac{4a^2b^2}{x^2-2bx+b^2}$$

dividirt man nun alles mit $4b^2$, so wird hieraus

$$1 = \frac{a^2}{(x+b)^2} + \frac{a^2}{(x-b)^2}$$

und wenn man alles auf einen Nenner bringt,

$$1 = \frac{a^2(x-b)^2 + a^2(x+b)}{(x+b)^2(x-b)^2)}$$

oder $1 = \frac{a^2(x^2-2bx+b^2+x^2+2bx+b^2)}{(x+b)(x+b)(x-b)(x-b)}$

und wenn man alles durch den Nenner multiplicirt

$(x+b)(x-b)(x+b)(x-b) = a^2(2x^2+2b^2)$

oder da $(x+b)(x-b) = x^2 - b^2$

$x^4 - 2b^2x^2 + b^4 = 2a^2x^2 + 2a^2b^2$,

folglich wenn man alle Glieder auf die eine Seite bringt

$x^4 - (2a^2 + 2b^2)x^2 = 2a^2b^2 - b^4$.

Eine Gleichung welche sich nach §. 451. auflösen läßt, indem hier $m = 4$ und $P = 2a^2 + 2b^2$, folglich ist

$$x = \mp V\left(a^2 + b^2 \mp V(4a^2b^2 + a^4)\right)$$

oder $x = \mp V\left(a^2 + b^2 \mp a V(4b^2 + a^2)\right)$

§. 455.

§. 455.

Anmerkung.

Diese Gleichung hat also so viel Werthe, als man vermuthet hatte, und diese sind in allen folgende:

$$x = +\sqrt{\left(a^2 + b^2 + a\sqrt{(4b^2 + a^2)}\right)}$$

$$x = -\sqrt{\left(a^2 + b^2 + a\sqrt{(4b^2 + a^2)}\right)}$$

$$x = +\sqrt{\left(a^2 + b^2 - a\sqrt{(4b^2 + a^2)}\right)}$$

$$x = -\sqrt{\left(a^2 + b^2 - a\sqrt{(4b^2 + a^2)}\right)}$$

Es wird also die Linie $DE = DH + HE = x + b$, und sie wird auch auf viererley Art bestimt.

§. 456.

Es sind nun noch die Fälle zu untersuchen übrig, in denen diese Linie x unmöglich wird. Nun ist offenbar, daß die beyde erste Wurzeln allezeit möglich und wirklich sind, und daß die beyde letztere nur alsdenn unmöglich seyn können, wenn $a\sqrt{(4b^2 + a^2)}$ größer, als $a^2 + b^2$ ist. Wenn aber $a\sqrt{(4b^2 + a^2)}$ größer als $a^2 + b^2$ seyn soll, so wird, wenn man auf beyden Seiten quadrirt $4a^2b^2 + a^4$ größer als $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$, folglich wenn man auf beyden Seiten gleiche Grössen wegnimt,

$2a^2b^2$ größer als b^4

und $2a^2$ größer als b^2 seyn. Umgekehrt also läst sich auch leicht schließen, daß, wenn $2a^2$ größer als b^2 ist, die

zwey

zwey letzten Wurzeln der Gleichung unmöglich sind. In diesem Falle sind also die Werthe von

$$x = +\sqrt{\left(a^2 + b^2 + a\sqrt{(4b^2 + a^4)}\right)}$$

$$x = -\sqrt{\left(a^2 + b^2 - a\sqrt{(4b^2 + a^4)}\right)}$$

§. 457.

Wenn hingegen $2a^2 = b^2$, so wird $2a^2b^2 = b^4$, folglich wenn man auf beyden Seiten $2a^2b^2 + a^4$ addirt, $4a^2b^2 + a^4 = b^4 + 2a^2b^2 + a^4$, und daraus $a\sqrt{(4b^2 + a^2)} = b^2 + a^2$. In diesem Falle sind also die Werthe von x folgende:

$x = +\sqrt{(2a^2 + 2b^2)} = \sqrt{3b^2} = b\sqrt{3}$

$x = -\sqrt{(2a^2 + 2b^2)} = -\sqrt{3b^2} = -b\sqrt{3}$

$x = o$

$x = o.$

Und die Linien DK, DE liegen so wie (Fig. 50.) und die andern fallen beyde in der Linie NM, so daß der Winkel MNB die Hälfte eines rechten Winkels ist.

§. 458.

Aufgabe.

Es wird in einem rechtwinklichten Triangel die Summe der beyden Seiten gegeben, welche den rechten Winkel einschließen, AB + AC. Ferner die Summe der grösten Seite BC und der Linie AD, welche aus der Spitze des rechten Winkels auf die gegen über liegende Seite BC perpendikulär gezogen worden. Man soll den Triangel bestimmen. Fig. 20.

§. 459.

Auflösung.

Es sey $AB + AC = a$, und $AB = x$, so wird $AC = a - x$. Ferner sey $BC = y$, und $BC + AD = b$, so wird $AD = b - y$. Weil BC die gröste Seite ist, so wird $BC^2 = AB^2 + AC^2$, folglich

$$y^2 = x^2 + a^2 - 2ax + x^2,$$

oder $y^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$.

Die Linie DA theilet aber den ganzen Triangel in zwey ähnliche Triangel, welche auch dem ganzen Triangel ABC ähnlich sind. Und es ist $AB : AD = BC : AC$, folglich $AB \times AC = AD \times BC$ und nach den angenommenen Buchstaben

$$by - y^2 = ax - x^2,$$

addirt man diese Gleichung zu der vorigen, so wird

$$by = x^2 - ax + aa$$

und $y = \frac{x^2 - ax + aa}{b}$,

folglich $y^2 = \frac{x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 + a^2x^2 - 2a^3x + a^4}{b^2}$

Es ist also

$$\frac{x^4 - 2ax^3 + 3a^2x^2 - 2a^3x + a^4}{b^2} = 2x^2 - 2ax + a^2$$

folglich

$$x^4 - 2ax^3 + 3a^2x^2 - 2a^3x + a^4 = 2b^2x^2 - 2ab^2x + a^2b^2$$

oder

$$x^4 - 2ax^3 + 3a^2x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$$
$$- 2b^2x^2 + 2ab^2x - a^2b^2.$$

§. 460.

§. 460.

Bey dieser Gleichung sieht man nicht sogleich, wie man den Werth der unbekannten Größe bestimmen soll, es ist aber möglich, daß sie das Quadrat einer Gleichung ist, welcher diese Form hat $x^2 + \alpha x + \beta = o$.

Wenn man von dieser Gleichung das Quadrat macht, so ist solches

$$x^4 + 2\alpha x^3 + 2\beta x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 = o$$
$$+ \alpha^2 x^2.$$

Wenn nun die vorige Gleichung mit dieser einerley seyn soll, so muß nothwendig

$$2\alpha = -2a$$
$$2\beta + \alpha^2 = 3a^2 - 2b^2$$
$$2\alpha\beta = -2a^3 + 2ab^2$$
$$\beta^2 = a^4 - a^2b^2$$

seyn. Also muß $\alpha = a$ seyn. Setzt man diesen Werth in der zweiten Gleichung, so wird

$$2\beta + a^2 = 3a^2 - 2b^2$$

folglich $\beta = a^2 - b^2$.

Setzt man ferner diese beyde gefundene Werthe in der dritten, so wird

$$-2a^3 + 2ab^2 = -2a^3 + 2a^2b^2$$

eine Gleichung, welche offenbar richtig ist, und die vierte wird

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = a^4 - a^2b^2$$

Diese Gleichung kann aber nicht bestehen, als wenn man auf der rechten Seite $-a^2b^2 + b^4$ addirt. Hieraus siehet man also, daß die gefundene Gleichung, durch welche der Werth der unbekannten

Größe in der Aufgabe bestimt wird, auf der einen Seite zu einem vollkommnen Quadrate gemacht werden kann, wenn man auf beyden Seiten $-a^2b^2 + b^4$ addirt, alsdenn aber wird

$$x^4 - 2ax^3 + 3a^2x^2 - 2a^3x + a^4 = b^4 - a^2b^2 - 2b^2x^2 + 2ab^2x - 2a^2b^2 + b^4$$

Die Gleichung linker Hand ist aber das Quadrat der Größe $x^2 - ax + a^2 - b^2$.

Nimt man dahero die Wurzel, so wird

$$x^2 - ax + a^2 - b^2 = \mp\sqrt{b^4 - a^2b^2}$$

und also

$$x = \tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{(b^2 - \tfrac{3}{4}a^2 \mp b\sqrt{b^2 - a^2})}$$

Hieraus bekomt man leicht den Werth der andern unbekannten Größe. Denn da

$$y = \frac{x^2 - ax + a^2}{b}$$

so wird $y = b \mp \sqrt{(b^2 - a^2)}$

§. 461.

Anmerkung.

Um aber diejenigen Werthe von x zu bestimmen, welche diese Aufgabe auflösen, muß man vor allen Dingen anmerken, daß y niemals größer seyn kann, als b. Denn b ist so groß, als die Seite BC nebst der perpendikulär Linie AD, folglich da $y = BC$, so muß nothwendig y kleiner seyn, als b. Es muß also blos

$$y = b - \sqrt{(b^2 - a^2)}$$

genommen werden. Hieraus wird aber

$$by = b^2 - \sqrt{(b^2 - a^2)}$$

folglich

folglich da $x = \frac{1}{2}a \mp \sqrt{(by - \frac{3}{4}a^2)}$, so sind blos diese beyde Werthe von x, nemlich

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\left(b^2 - \tfrac{3}{4}a^2 - b\sqrt{(b^2 - a^2)}\right)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\left(b^2 - \tfrac{3}{4}a^2 - b\sqrt{(b^2 - a^2)}\right)}$$

diejenigen, welche genommen werden müssen, damit die Aufgabe unter den Bedingungen, wie sie vorgetragen worden, aufgelöset werden kann.

§. 462.

Man kann aber billig die Ursach zu wissen verlangen, warum die unbekannte Größe x vier Werthe hat. Dieses komt daher, weil in dieser Aufgabe zugleich diese mit eingeschlossen ist, wo die Differenz der Seiten AB und AC, oder $AB - AC = a$, und $BC - AD = b$ gegeben wird. Denn wenn hier wieder $x = AB$ und $y = BC$, so wird $x - a = AC$ und $y - b = CD$, und es ist wie vorhin $y^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$ allein $y^2 - by = x^2 - ax$.

Hieraus bekomt man wieder

$$by = x^2 - ax + a^2$$

und die ganze folgende Gleichung: und vor diesem Fall ist $y = b + \sqrt{(a^2 - b^2)}$ und

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\left(b^2 - \tfrac{3}{4}a^2 + b\sqrt{(b^2 - a^2)}\right)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\left(b^2 - \tfrac{3}{4}a^2 + b\sqrt{(b^2 - b^2)}\right)}$$

§. 463.

Die Construction dieser Aufgabe im ersten Falle, kann leicht auf diese Art geschehen. Man beschrei-

be über die Linie $AB = b$ einen halben Zirkel,
Fig. 51 und beschreibe darinnen die Linie $BD = a$, ziehe AD, so wird $AD = \sqrt{(b^2 - a^2)}$. Man nehme $AE = AD$ und beschreibe aus eben dem Mittelpunkt C mit dem Radius CE einen halben Zirkel. Wenn derselbe die Linie BD in F und G durchschneidet, so sind, BE die gröste, und BF, BG die beyden übrigen Seiten. Denn es ist $BE = BA - AE = BA - AD$, folglich $BE = b - \sqrt{(b^2 - a^2)} = y$. Ferner ist $BI = AE = BA - BE = b - y$. Eben so ist $BG = DF = BD - BF$. Nennt man nun BF, x, so wird $BG = a - x$. Nun ist nach (Euc. 3. 35.) $BI \times BE = BG \times BF$, folglich $by - y^2 = ax - x^2$, und also $x = \frac{1}{2}a \mp \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - y^2 + by)}$, oder

$$x = \tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{\left(b^2 - \tfrac{3}{4}a^2 - b\sqrt{(b^2 - a^2)}\right)}$$

§. 464.

Aufgabe.

Es wird in einem Triangel der Winkel A gegeben, nebst der Summe der beyden Seiten AC,
Fig. 24 BA, welche denselben einschließen, und die perpendikulär Linie AD, welche von der Spitze des Winkels A auf die gegen über liegende Seite gezogen worden. Man soll den Triangel bestimmen.

§. 465.

Auflösung.

Es sey $AB + AC = a$, $AD = b$, r der Radius, c der Cosinus, f der Sinus des Winkels

kels A. Wird nun $AB = x$ gesetzt, so wird $AC = a - x$. Man ziehe von B die Linie BE auf AC perpendikulär, so sind die beyde Triangel BCE, ADC einander ähnlich, und es ist (§. 303.)

$$AE = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC}$$

Nun ist $CA : AE = r : c$, folglich wird

$AE = \frac{cx}{r}$ und also wird hievon

$$\frac{cx}{r} = \frac{a^2 - 2ax + x^2 + x^2 - BC^2}{2(a - x)}$$

folglich $2cax - 2cx^2 = ra^2 - 2rax + 2rx^2 - BC^2$. Es ist ferner $BC : BE = r : f$, folglich $BE = \frac{fx}{r}$ und $AC : AD = BC : BE$, also $BC \times AD = BE \times AC$ und $BC = \frac{fx}{rb}(a - x)$.

Setzt man nun diesen Werth von BC in der vorigen Gleichung, so wird

$$2cax - 2cx^2 = ra^2 - 2rax + 2rx^2 - \frac{f^2a^2x^2}{rb^2} + \frac{2fax^3}{rb^2} - \frac{f^2x^4}{rb^2}$$

oder

$$2rb^2cax - 2crb^2x^2 = r^2a^2b^2 - 2r^2ab^2x + 2r^2b^2x^2 - f^2a^2x^2 + 2fax^3 - f^2x^4$$

und wenn man alle Glieder auf eine Seite bringt, und durch f^2 dividirt

$$x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 + \frac{2r^2ab^2x}{f^2} - \frac{a^2b^2r^2}{f^2} = 0$$
$$\frac{-2r^2b^2x^2}{f^2} + \frac{2racb^2x}{f^2}$$
$$\frac{-2crb^2x^2}{f^2}$$

§. 466.

Um zu erfahren, ob diese Gleichung ein vollkommnes Quadrat ist, oder wenigstens durch die Hinzusetzung einiger bekannten Größen zu einem vollkommnen Quadrat gemacht werden kann, setze man, daß dieselbe das Quadrat der Größe $x^2 + \alpha x + \beta$ sey, so wird die vorige Gleichung diese seyn $x^4 + 2\alpha x^3 + 2\beta x^2 + \alpha^2x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 = 0$. Es muß also seyn $2\alpha = -2a$ und $\alpha = -a$ und $2\beta + \alpha^2 = a^2 - \frac{2rb^2(r+c)}{f^2}$

folglich da $\alpha^2 = a^2$, so wird $\beta = -\frac{rb^2(r+c)}{f^2}$.

Ferner muß $2\alpha\beta = \frac{2rab^2(r+c)}{f^2}$ seyn. Setzt man vor β und α die gefundene Werthe, so findet man, daß diese Gleichung statt findet. Es muß aber auch noch $\beta^2 = -\frac{a^2b^2r^2}{f^2}$ seyn. Es ist aber $\beta^2 = \frac{r^4b^4 + 2r^3b^4c + r^2b^4c^2}{f^4}$, folglich kann dieses nicht bestehen. Wenn man aber in der vorigen Gleichung $-\frac{a^2b^2r^2}{f^4}$ auf die andre Seite

bringt,

bringt, und alsdenn auf beyden Seiten dieses gefundene Quadrat von β addirt, so wird die daraus entstehende Gleichung

$$x^4 - 2ax^3 + aax^2 + \frac{2ab^2r^2x}{f^2} + \frac{b^4r^4}{f^4} + \frac{b^4r^4}{f^4} - \frac{2b^2r^2x^2}{f^2} - \frac{2b^2rcx^2}{f^2} + \frac{2ab^2rcx}{f^2} + \frac{2b^4r^3c}{f^4} + \frac{2b^4r^3c}{f^4} + \frac{b^4r^2c^2}{f^4} + \frac{b^4r^2c^2}{f^4} + \frac{a^2b^2r^2}{f^2}$$

und auf der einen Seite ein vollkomnes Quadrat, aus der sich also die Wurzel nehmen läst.

Um aber diese Gleichung abzukürzen, muß man sich erinnern, daß $\frac{r^2 + rc}{f} = \text{Cot. } \frac{1}{2} A$, und $\frac{r^2 + rc}{f^2} = \frac{t}{f}$ wenn $\text{Cot. } \frac{1}{2} A = t$ gesetzt wird.

Dadurch aber wird die vorige Gleichung

$$x^4 - 2ax^3 + a^2 - \frac{2b^2t}{f} \Big\} x^2 + \frac{2ab^2tx}{f} + \frac{b^4t^2}{f^2} = \frac{b^4t^2 + a^2b^2r^2}{f^2}$$

Und wenn man daraus die Wurzel nimt

$$x^2 - ax - \frac{b^2t}{f} = \mp \frac{b}{f} \sqrt{(b^2t^2 + a^2r^2)}$$

und $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{b^2t \mp b\sqrt{(b^2t^2 + a^2r^2)}}{f}$

folglich $x = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{b^2t \mp b\sqrt{(b^2t^2 + a^2r^2)}}{f}\right)}$

§. 467.

Anmerkung.

Ohngeachtet die unbekannte Größe vier verschiedene Werthe hat, als

$$x = \frac{a}{2} + V\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{b^2t + bV(b^2t^2 + a^2r^2)}{f}\right)$$

$$x = \frac{a}{2} - V\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{b^2t + bV(b^2t^2 + a^2r^2)}{f}\right)$$

$$x = \frac{a}{2} + V\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{b^2t - bV(b^2t^2 + a^2r^2)}{f}\right)$$

$$x = \frac{a}{2} - V\left(\frac{1}{4}a^2 + \frac{b^2t - bV(b^2t^2 + a^2r^2)}{f}\right)$$

so sind doch nur die beyde letztern diejenigen, welche die Aufgabe unter dem vorgetragenen Bedingungen auflösen.

Die beyden erstern lösen eine Aufgabe auf, welche mit dieser ganz genau verwandt ist, nemlich wenn anstatt die Summe AB + AC = die Differenz AB — AC gegeben wird, und das übrige bleibt. Denn da diese aus eben den Grundsätzen aufgelöset werden muß, so ist leicht zu begreifen, daß man am Ende eben diese Gleichung finden wird. Da diese beyde Aufgaben also miteinander so genau verbunden sind, so siehet man auch leicht die Ursach ein, warum man eine Gleichung vom vierten Grade bekommen muß. Denn die unbekannte Größe hat in der That vier Werthe, nemlich sie bedeutet sowohl die Seite AB, als auch AC in beyden Fällen, wenn a die Summe oder die Differenz dieser Seiten anzeigt.

§. 468.

Uebrigens kann die Methode, welche bey dem beyden vorhergehenden Aufgaben in Ausübung gebracht worden, in verschiedenen Fällen mit grossen Nutzen angebracht werden. Wenn man bey einer Aufgabe auf eine solche Gleichung komt, die von dem 4. 6. 8ten ꝛc. Grade ist, so kann man es versuchen, ob sie das Produckt aus einer gewissen Gleichung in sich selber ist, und zu dem Ende eine Gleichung von einem niedrigern Grade nach Gefallen annehmen, und die Coefficienten derselben aus der gegebenen Gleichung bestimmen. Alsdenn wird man bald sehen, ob diese angenommene Gleichung mit der Wahrheit bestehen kann, oder nicht. Bisweilen geschiehet es auch, daß, wenn man zu beyden Theilen der Gleichung eine gewisse Größe hinzusetzt oder subtrahirt, sie mag aus lauter bekannten oder aus bekannten und unbekannten Größen zusammen gesetzt seyn, dadurch auf beyden Seiten ein vollkommnes Quadrat, oder Cubus, oder eine andre Dignität hervor gebracht wird. In allen dergleichen Fällen kann man die Wurzel ausziehen, und die ganze Gleichung auf einen niedrigern Grad herunter setzen.

§. 469.

Aufgabe.

Es wird in einem rechtwinklichten Triangel die gröste Seite B C und die Summe der Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, nebst der perpendikulär Linie, welche aus der Spitze des rechten Winkels auf die gegen über liegende Seite gezogen Fig. 20.

wor-

worden, AB + AC + AD. Man soll den Triangel bestimmen.

§. 470.

Auflösung.

Es sey AB + AC + AD = a, BC = b, AB = x, so wird AC = $\sqrt{(bb - xx)}$. Ferner da der Triangel ABD dem Triangel ABC ähnlich ist, so wird BC: AC = AB: AD, folglich BC × AD = AB × AC, und nach den angenommenen Zeichen

$$AD = \frac{x\sqrt{(bb - xx)}}{b}.$$

Nun ist aber auch $AC + AD = a - x$. Wenn man aber die vorige Proportion ansieht, so ist auch $BC + AB : AC + AD = AB : AD$, oder $b + x : a - x = x : \frac{x\sqrt{bb - x^2}}{b}$

und also $\frac{(b + x)\sqrt{(bb - x^2)}}{b} = a - x$,

folglich wenn man auf beyden Seiten quadrirt

$(b^2 + 2bx + x^2)(b^2 - x^2) = a^2b^2 - 2ab^2x + b^2x^2$

oder

$b^4 + 2b^3x + b^2x^2 - b^2x^2 - 2bx^3 - x^4 = a^2b^2 - 2ab^2x + b^2x^2$

Bringt man hier alle Glieder auf eine Seite, und ordnet sie nach der höchsten Dignität von x, so bekomt man diese Gleichung

$$x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2ab^2x + aabb = 0$$
$$- 2b^3x - b^4.$$

§. 471.

Anmerkung.

Wenn man die unbekannte Größe aus dieser Gleichung bestimmen will, so muß man zusehen, ob dieselbe ein Quadrat der Größe $x^2 + \alpha x + \beta = o$ ist, oder wenigstens durch die Hinzusetzung einer neuen Gleichung auf der einen Seite zum Quadrat gemacht werden kann. Man nehme also das Quadrat dieser Größe

$x^4 + 2\alpha x^3 + (2\beta + \alpha^2)x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 = o.$

Wenn nun diese Gleichung mit der vorigen einerley seyn soll, so muß

$2\alpha = 2b$, folglich $\alpha = b$ seyn,

ferner $2\beta + \alpha^2 = b^2$, folglich $\beta = o$

und $2\alpha\beta = -2ab^2 - 2b^3$ seyn.

Es ist aber $2\alpha\beta = o$, folglich wenn diese Gleichung statt finden soll, so muß $\beta = -ab - b^2$ angenommen werden, alsdenn aber wird $2\beta + \alpha^2 = -2ab - 2b^2 + b^2 = -2ab - b^2$ und $\beta^2 = a^2b^2 + 2ab^3 + b^4$. Damit also die obige Gleichung auf der einen Seite ein vollkomnes Quadrat würde, müste man diese Größe $-(2ab + 2b^2)x^2 + 2ab^3 + 2b^4$ auf beyden Seiten addiren, und alsdenn bekomt man folgende Gleichung

$$x^4 + 2bx^3 - b^2x^2 - 2ab^2x + aabb \left\{ \begin{array}{l} = 2abx^2 + 2ab^3 \\ - 2abx^2 - 2b^3x + 2ab^3 \\ + b^4 \end{array} \right. = 2b^2x^2 + 2b^4$$

davon der erste Theil das Quadrat der Größe

$x^2 + bx - ab - b^2$

ist. Da aber der zweite Theil kein vollkomnes

Qua-

Quadrat ist, und also die unbekannte Größe unter dem Wurzelzeichen bleibt, so bekomt man hieraus nicht den Werth der Größe x.

§. 472.

Es ist nun übrig, daß man untersucht, ob diese Gleichung durch die Addition eines completen Quadrats, welches durch eine bekannte Größe multiplicirt worden, auf beyden Seiten zu einer Gleichung gemacht werden kann, deren beyde Theile vollständige Quadrate sind.

Man setze also, daß, wenn man zu beyden Theilen das Quadrat $nx^2 + 2nmx + nm^2$ addirt, beyde Theile der Gleichung, vollständige Quadrate werden. Dadurch entsteht aber diese Gleichung aus der Gleichung §. 470.

$$x^4+2bx^3+b^2x^2-2ab^2x+a^2b^2=nx^2+2nmx+nm^2$$
$$+nx^2-2b^3x-b^4$$
$$+2nmx+nm^2$$

Da nun beyde Theile vollständige Quadrate seyn sollen, so setze man, daß der Theil linker Hand das Quadrat der Größe

$$x^2 + Px + Q$$

folglich

$$x^4+2Px^3+(P^2+2Q)x^2+2PQx+Q^2 \text{ sey.}$$

Es muß also $2P = 2b$, folglich $P = b$ seyn. Ferner muß P^2+2Q oder $b^2+2Q = b^2+n$ seyn, folglich $Q = \frac{n}{2}$.

Ferner muß $2PQ$ oder $bn = 2nm - 2ab^2 - 2b^3$ seyn, folglich $m = \frac{2ab^2 + 2b^3 + bn}{2n}$.

Fer-

Ferner muß $Q^2 = \frac{n^2}{4} = a^2b^2 - b^4 + nm^2$ seyn,

folglich muß $\frac{n^2 + 4b^4 - 4a^2b^2}{4n} = m^2$ seyn.

Es muß sich also die Größe $2ab^2 + 2b^3 + bn$ durch $2n$, und auch $\frac{n^2 + 4b^2 - 4a^2b^2}{2}$ durch $2n$ dividiren lassen.

Nun ist $2ab^2 + 2b^3 = b(2ab + 2b^2)$ und $\frac{4b^4 - 4a^2b^2}{2} = \frac{(2ab + 2b^2)(2b^2 - 2ab)}{2}$

Wenn man also $n = 2ab + 2b^2$ annimt, so lassen sich beyde Größen durch $2n$ dividiren, und es wird $m = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b$,

und aus der zweiten Gleichung

$$m^2 = \frac{n^2 + 4b^4 - 4a^2b^2}{4n} = \frac{4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 + 4b^4 - 4a^2b^2}{8ab + 8b^2}$$

oder $m^2 = \frac{8ab^3 + 8b^4}{8ab + 8b^2} = b^2$, und $m = b$.

Hieraus siehet man also, daß die vorige Gleichung sich durch die Addition der Gleichung

$(2ab+2b^2)(x^2+2bx+b^2) = (2ab+2b^2)(x^2+2bx+b^2)$

in eine andre verwandeln läst, davon der eine Theil das Quadrat der Größe $x^2 + Px + Q$ oder $x^2 + bx + ab + b^2$, und der andre, das Quadrat der Größe $(x + b)$ durch die Größe $2ab + 2b^2$ multiplicirt, ist. Addirt man nun auf beyden Seiten diese Größe, so bekomt man folgende Gleichung

$x^4 +$

$$x^4+2bx^3+3b^2x^2+2ab^2x+aabb=(2ab+2b^2)(x+b)^2$$
$$+2abx^2+2b^3x+2ab^3$$
$$+b^4$$

Hieraus ist die Wurzel

$$x^2+bx+(ab+b^2)=\mp(x+b)\sqrt{(2ab+2b^2)}$$

und

$$x^2+bx-x\sqrt{(2ab+2b^2)}=-ab-b^2\mp b\sqrt{(2ab+2b^2)}$$

oder

$$x^2+\left(b+\sqrt{(2ab+2b^2)}\right)x=-ab-b^2-b\sqrt{(2ab+2b^2)}$$

und

$$x^2+\left(b-\sqrt{(2ab+2b^2)}\right)x=-ab-b^2+b\sqrt{(2ab+2b^2)}$$

Nun bekomt man ferner aus der ersten Gleichung

$$x=-\tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{2}\sqrt{(2ab+2b^2)}\mp\sqrt{\left(\frac{-2ab-b^2-2b\sqrt{(ab+b^2)}}{4}\right)}$$

und aus der andern

$$x=-\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}\sqrt{(2ab+2b^2)}\mp\sqrt{\left(\frac{-2ab-b^2+2b\sqrt{(2ab+2b^2)}}{4}\right)}$$

Es sind also die vier Werthe von x folgende

$$x=-\tfrac{1}{2}b-\sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{-ab-b^2-b\sqrt{(ab+b^2)}}{2}\right)}$$

$$x=-\tfrac{1}{2}b-\sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)}-\sqrt{\left(\frac{-ab-b^2-b\sqrt{(ab+b^2)}}{2}\right)}$$

$$x=-\tfrac{1}{2}b+\sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{-ab-b^2+b\sqrt{(ab+b^2)}}{2}\right)}$$

$$x=-\tfrac{1}{2}b+\sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)}-\sqrt{\left(\frac{-ab-b^2+b\sqrt{(ab+b^2)}}{2}\right)}$$

§. 473.

Von diesen vier Wurzeln sind die ersten beyde unmöglich. Von den beyden letztern bedeutet aber die eine die Seite AB, und die andre die Seite AC. Die geometrische Construktion dieser letztern ist sehr leicht. Man nehme nemlich $AB = \frac{1}{2} b$, Fig. 52 $BC = \frac{1}{2} a$, $CF = b$, beschreibe über AF einen halben Zirkel, und richte in C die Linie CG perpendikulär auf, so ist dieselbe $V\left(\frac{ab + b^2}{2}\right)$

Man nehme ferner $CD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{4} b$; $AE = CG$ und EH die mittlere proportional Linie zwischen b und DE, so sind BH, BF die Seiten des Triangels. Denn da $AE = V\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)$ und $BD = BC - CD = \frac{1}{2} a - \frac{1}{4} b$, und $AD = AC - CD = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b - \frac{1}{4} b = \frac{1}{2} a + \frac{1}{4} b$ ferner $DE = AE - AD = -\frac{1}{2} a - \frac{1}{4} b + V\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)$ so ist $EH = V\left(b \times \left(-\frac{1}{2} a - \frac{1}{4} b + V\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)\right)\right)$

Da nun $AE = V\left(\frac{ab + b^2}{2}\right)$, so wird BE $= -\frac{1}{2} b + V\left(\frac{ab + b^2}{2}\right)$ und demnach BH $= BE \pm EH = -\frac{1}{2} b + V\left(\frac{ab + b^2}{2}\right) \mp V\left(b \times \left(-\frac{1}{2} a - \frac{1}{4} b + V\left(\frac{ab + b^2}{2}\right)\right)\right)$

Dieses beweiset also die Richtigkeit der Construktion.

§. 474.

Es kann aber auch in dem letzten Falle die Aufgabe unmöglich werden, wenn $b\sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)}$ kleiner, als $\frac{2ab+b^2}{4}$ ist. Denn alsdenn wird die Größe unter dem Wurzelzeichen eine negative Größe, aus der es nicht möglich ist, die Wurzel zu ziehen. Es ist der Mühe werth, dieses genauer zu untersuchen.

Wenn aber $b\sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)}$ kleiner ist, als $\frac{2ab+b^2}{4}$, so ist auch $\sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)}$ kleiner, als $\frac{2a+b}{4}$, folglich auch $\frac{ab+b^2}{2}$ kleiner, als $\frac{4a^2+4ab+b^2}{16}$, also auch $8ab+8b^2$ kleiner, als $4a^2+4ab+b^2$, folglich auch $7b^2$ kleiner, als $4a^2-4ab$, und $\frac{7b^2}{4a}$ kleiner, als $a-b$.

Wenn also die Größen b und a eine solche Verhältniß gegen einander haben, daß $\frac{7b^2}{4a}$ kleiner ist, als $a-b$, so wird die Aufgabe unmöglich seyn. In allen übrigen Fällen aber ist dieselbe möglich.

§. 475.

Die Ursach, warum hier zwey unmögliche Wurzeln vorkommen, liegt darin, daß in dieser Aufgabe

gabe auch die Aufgabe eingeschlossen ist, da AD — AC — AB = a gegeben wird. Denn wenn man nach dieser Voraussetzung verfährt, so komt man auf eben die Gleichungen. Um aber dieses noch deutlicher einzusehen, löse man die Aufgabe auf eine andre Art auf, so, daß man nicht die Seite AB, sondern die perpendikulär Linie AD sucht. In dieser Absicht nenne man AD, z, so wird AC + AB = $a - z$, und wenn man AC — AB = y setzet, so wird AC = $\frac{a - z + y}{2}$, und AB = $\frac{a - z - y}{2}$. Und da $AB^2 + AC^2 = BC^2$, so wird

$$\left.\begin{array}{l} a^2 - 2az - 2ay + z^2 + 2zy + y^2 \\ a^2 - 2az + 2ay + z^2 - 2zy + y^2 \end{array}\right\} = 4bb$$

oder $a^2 - 2az + z^2 + y^2 = 2b^2$.

Da nun BC: BA = AC: AD, so ist auch, wenn man diese Proportion gehörig ausdrückt

$$b : \frac{a - z - y}{2} = \frac{a - z + y}{2} : z$$

und wenn man die äußersten und mittelsten Glieder in einander multiplicirt, so wird

$$4bz = a^2 - 2az + z^2 - y^2.$$

Addirt man diese Gleichung zu der erstern, so wird

$$2b^2 + 4bz = 2a^2 - 4az + 2z^2$$

oder $z^2 - 2(a + b)z = b^2 - a^2 = (A)$

subtrahirt man aber die zweite von der erstern, so wird

$$2y^2 = 2b^2 - 4bz$$

und $y^2 = b^2 - 2bz = (B)$.

Aus der Gleichung (A) ist aber

$$z = a + b \mp \sqrt{(2ab + 2b^2)}$$

Wenn man diese Werthe von z genau untersucht, so findet man, daß der Werth

$$z = a + b - \sqrt{(2ab + 2b^2}$$

allein die Aufgabe so auflöset, wie sie vorgetragen worden. Denn die perpendikulär Linie AD muß nothwendig kleiner seyn, als a, folglich, um desto mehr, kleiner, als $a + b$.

§. 476.

Setzt man nun diesen Werth von z in der Gleichung (B), so wird

$$y^2 = b^2 - 2ab - 2b^2 + 2b\sqrt{(2ab + 2b^2)}$$

und also $y = \mp\sqrt{(-2ab - b^2 + 2b\sqrt{(2ab + b^2)})}$

und wenn man aus diesen beyden gefundenen Werthen die Seiten AB und AC finden will, so wird

$$AB = \frac{a - z - y}{2} = \frac{a - a - b + \sqrt{(2ab + 2b^2)}}{2}$$

$$\mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(-2ab - b + 2b\sqrt{(2ab + 2b^2)})} \text{ oder}$$

$$AB = \frac{-b + \sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)}}{2} \mp \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}ab - \tfrac{1}{4}b^2 + b\sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)}\right)}$$

Eben so findet man auch

$$AC = \frac{-b + \sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)}}{2} \mp \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}ab - \tfrac{1}{4}b^2 + b\sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)}\right)}$$

welche mit den gefundenen Werthen in der erstern Auflösung einerley sind.

§. 477.

Setzt man aber $z = a + b + \sqrt{(2ab + 2b^2)}$ so setzt man dadurch etwas, was ganz und gar unmöglich

möglich ist. Folglich muß auch alles dasjenige, was daraus geschlossen wird, unmöglich seyn. Und in diesem Falle findet man eben

$$AB = \frac{-b - \sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)} + \sqrt{\left(-\frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}b^2 - b\sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)}\right)}}{2}$$

$$AC = \frac{-b - \sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)} - \sqrt{\left(-\frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}b^2 - b\sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)}\right)}}{2}$$

§. 478.

Ist hingegen $AD - AC - AB = a$, und das übrige bleibt, man setzt aber $AB - AC = y$, so wird $AB = \frac{y + z - a}{2}$ und $AC = \frac{z - a - y}{2}$

und hieraus ebenfalls

$$2b^2 = a^2 - 2az + z^2 + y^2$$

$$4bz = a^2 - 2az + z^2 - y^2$$

und $b^2 + 2bz = a^2 - 2az + z^2$

folglich $z^2 - (2a + 2b)z = b^2 - a^2$

und $z = a + b \mp \sqrt{(2ab + 2b^2)}$

und $y = \mp \sqrt{(b^2 - 2bz)}$

hieraus wird

$$AB = \frac{b + \sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)} + \sqrt{\left(-\frac{ab}{2} - \frac{1}{4}b^2 + b\sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)}\right)}}{2}$$

$$AC = \frac{b + \sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)} - \sqrt{\left(-\frac{ab}{2} - \frac{1}{4}b^2 + b\sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)}\right)}}{2}$$

Setzt man aber $z = a + b + \sqrt{(2ab + b^2)}$, so wird

$$AB = \frac{1}{2}b - \sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)} + \sqrt{\left(-\frac{ab}{2} - \frac{b^2}{2} - b\sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)}\right)}$$

$$AC = \frac{1}{2}b - \sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)} - \sqrt{\left(-\frac{ab}{2} - \frac{b^2}{2} - b\sqrt{\left(\frac{ab+b^2}{2}\right)}\right)}$$

§. 479.

Diese beyde letzte Werthe sind aber deßwegen unmöglich, weil man etwas unmögliches voraus gesetzt hat. Denn man hat angenommen, daß AD — AB — AC einer positiven Größe a gleich seyn sollte. Dieses geht aber gar nicht an, weil AB nothwendig größer seyn muß, als AD und um desto mehr AB + AC. Setzt man also AD — AB — AC einer negativen Größe gleich, wie denn solches wirklich ist, so werden diese beyden letzten Werthe möglich, und

$$AB = \tfrac{1}{2}b - \sqrt{\left(\frac{b^2-ab}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{ab}{2} - \frac{b^2}{4} - b\sqrt{\frac{(b^2-ab)}{2}}\right)}$$

$$AC = \tfrac{1}{2}b - \sqrt{\left(\frac{b^2-ab}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{ab}{2} - \frac{b^2}{2} - b\sqrt{\frac{(b^2-ab)}{2}}\right)}$$

Und diese werden nur alsdenn unmöglich, wenn die Größen a und b solche Verhältniß gegen einander haben, welche nicht mit der Wahrheit bestehen kann.

§. 480.

Wenn man in allen vorigen Aufgaben die Fälle untersucht, in denen sich unmögliche Größen zeigen; so wird man allezeit finden, daß sie daher kommen, weil man entweder gewisse Bedingungen in der Aufgabe gebracht, welche mit einander nicht bestehen können, oder, daß es unvermeidlich gewesen, zugleich eine andre Aufgabe mit aufzulösen, die so beschaffen ist, daß die Gründe, aus denen sie aufgelöset werden muste, durch eben dieselbe Zeichen, und durch eben die Verbindung derselben untereinander ausgedrückt werden. So wurden bey der letzten Aufgabe die

Seiten

Seiten AB, und AC unmöglich, weil man die perpendikulär Linie AD, welche zu ihrer Bestimmung erfordert wurde, größer, als den ganzen Umkreis des Triangels angenommen hatte, welches ein offenbarer Widerspruch ist.

§. 481.

Die Aufgabe konnte ferner nicht aufgelöset werden, ohne daß darin eine andre Aufgabe mit eingeschlossen wurde, wo anstatt AB + AC + AD die Größe AD — AB — AC gegeben, und durch einerley Zeichen ausgedrückt wurde. Dieser Fall wurde also mit aufgelöset, allein auch die Seiten AB, AC wurden unmöglich, weil dabey eine negative Größe, als positiv betrachtet wurde, nachdem aber diese Voraussetzung geändert worden, so wurden (§. 479.) diese beyde Größen möglich.

§. 482.

Um diese unmögliche Größen anzuzeigen, hat die Algebra kein ander Mittel, als die Ausziehung der Wurzeln, denn sobald die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ ist, so ist schon oben gezeigt worden, daß sich daraus keine Wurzel ziehen läst. Und zwar muß die Ordnung von der die Wurzel ist, durch eine gerade Zahl angedeutet werden. Hieraus folgt aber nicht, daß es nicht auch andre Fälle giebt, in denen unmögliche Größen vorkommen. Es finden sich sehr viel Umstände, welche machen daß etwas unmöglich wird, wenn auch selbst die Algebra solches als möglich angiebt. Es liegt davon selbst ein Beyspiel in dieser Aufgabe.

Man findet darinnen die perpendikulär Linie AD $= a + b + \sqrt{(2ab + 2b^2)}$ als eine wirkliche Größe, und es ist dem allen ohngeachtet unmöglich, daß diese Größe, die perpendikulär Linie bedeuten kann.

§. 483.

Erklärung.

Wenn die Algebra eine unmögliche Größe angiebt, so findet sich gemeiniglich in dem Ausdruck eine Größe, welche wirklich, und eine andre unter dem Wurzelzeichen, welche auch wirklich, aber negativ ist. Diese letzte Größe, welche entsteht, wenn man von der unmöglichen Größe, den ganzen Theil, welcher eine wirkliche Größe bedeutet, wegnimt, heist eigentlich eine eingebildete Größe, imaginäre Größe, (Imaginarium.)

§. 484.

Anmerkung.

So ist z. E. in der Größe $a + \sqrt{-b}$ die Größe a eine wirkliche Größe allen $\sqrt{-b}$ eine imaginäre Größe, welche übrig bleibt, wenn man von der ganzen unmöglichen Größe den wirklichen Theil a wegnimt. Man unterscheidet darum die eingebildete Größen von den unmöglichen, weil öfters eine unmögliche Größe da seyn kann, welche nicht imaginär ist. Indessen ist eine imaginäre Größe allezeit eine unmögliche Größe.

§. 485.

Eine imaginäre Größe kann allezeit auf diese Form $\sqrt[n]{-b}$ gebracht werden (§. 365.) wo n eine gerade ganze Zahl bedeutet, und b alle die übrige Größen, welche

welche zusammengenommen, eine positive Größe ausmachen. Setzt man nun $\sqrt[n]{b} = \beta$, so ist $\sqrt[n]{-b} = \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{-1}, = \beta\sqrt[n]{-1}$, und man kann eine jede eingebildete Größe auf diese Form $\beta\sqrt[n]{-1}$ bringen.

§. 486.

Weil n nothwendig eine gerade Zahl seyn muß, wenn diese Größe $\beta\sqrt[n]{-1}$ eine imaginäre Größe seyn soll, so wird sich dieselbe allezeit durch eine Zahl aus der geometrischen Progreßion 2, 4, 8, 16 ꝛc. dividiren lassen, und es entsteht entweder durch die Division die Einheit oder eine ungerade Zahl. Wenn also t die Zahl aus dieser Progreßion bedeutet, durch welche sich n dividiren läßt, und i ist der Quotient, so wird $n = it$. Folglich wenn $\beta\sqrt[n]{-1}$ ist, und n ist $= it$, so ist $\beta\sqrt[n]{-1} = \beta\sqrt[it]{-1} = \beta\sqrt[t]{\sqrt[i]{-1}}$. Da nun $\sqrt[i]{-1} = -1$, so wird eine jede imaginäre Größe $\beta\sqrt[n]{-1}$ auf diese Form $\beta\sqrt[t]{-1}$ gebracht werden können, wo t eine von den Zahlen in der eben angeführten geometrischen Progreßion ist.

§. 487.

Es ist $\alpha^n : \beta^n = -\alpha^n : -\beta^n$. Diese Proportion ist offenbar richtig. Nimt man nun die Wurzel von der Ordnung n aus den Gliedern der-

selben, so wird auch $\alpha : \beta = \alpha \sqrt[n]{-1} : \beta \sqrt[n]{-1}$. Hieraus siehet man, daß auch imaginäre Größen gegen einander eine Verhältniß haben können, welche der Verhältniß zweyer wirklichen Größen gleich ist.

§. 488.

Hieraus folgt auch, daß $\frac{\alpha \sqrt[n]{-1}}{\beta \sqrt[n]{-1}} = \frac{\alpha}{\beta}$ eine wirkliche Größe ist. Dieses enthält gar nichts Widersprechendes, wenn man den Begrif der Division nur hier gehörig anwendet. Denn $\beta : \alpha$ ist allerdings $= \beta \sqrt[n]{-1} : \alpha \sqrt[n]{-1}$, oder $\beta \sqrt[n]{-1} : 1 = \alpha \sqrt[n]{-1} : \frac{\beta}{\alpha}$.

§. 489.

Bey den imaginären Größen muß man eine Behutsamkeit gebrauchen, welche sich auf folgendes gründet. Wenn man vor eine Größe ein Wurzelzeichen von einer gewissen Ordnung setzet, so verstehet man allezeit dadurch, daß man diejenige Größe finden soll, welche so beschaffen ist, daß, wenn dieselbe, so oft in sich selbst multiplicirt wird, als der Exponent über den Wurzelzeichen Einheiten weniger 1 hat, sie die Größe unter dem Wurzelzeichen vollkommen heraus bringt.

§. 490.

Gesetzt nun, man hätte diese Proportion: $a^n : -b^n = -a^n : b^n$, wo n eine gerade Zahl ist, so

so würde man nach den Regeln der Proportion diese neue hervor bringen:

$$a : \sqrt[n]{} - b^n = \sqrt[n]{} - a^n : b$$

oder $a : b\sqrt[n]{} - 1 = a\sqrt[n]{} - 1 : b$

Man würde also schließen, daß

$$a \times b = (b\sqrt[n]{} - 1) \times (a\sqrt[n]{} - 1)$$

oder $a \times b = ab(\sqrt[n]{} - 1) \times (\sqrt[n]{} - 1)$

seyn müste, und hieraus würde wieder folgen, daß

$\frac{a \times b}{a \times b} = (\sqrt[n]{} - 1) \times (\sqrt[n]{} - 1)$, oder daß

$1 = \sqrt[n]{} - 1 \times \sqrt[n]{} - 1$ seyn.

Man hat hier aber einen falschen Schluß angebracht, und $(- b)^n$ mit $- b^n$ verwechselt. Denn wenn $a : - b = - a : + b$, so ist allerdings $a^n : (- b)^n = (- a)^n : b^n$. Da nun aber $(- b)^n$ nimmermehr $= - b^n$ seyn kann, wenn n eine gerade Zahl ist, so folgt daraus, daß der Satz

$$a : \sqrt[n]{} - b^n = \sqrt[n]{} - a^n : b$$

einen Widerspruch in sich schliest, und daß dahero auch alle daraus gezogene Schlüße falsch sind, folglich geht es auch nicht an, daß $\sqrt[n]{} - a^n \times \sqrt[n]{} - b^n = ab$ seyn kann.

§. 491.

Ohngeachtet nun $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ist, wenn a und b positive Größen sind, so ist dennoch nicht

nicht $\sqrt[n]{-a} \times \sqrt[n]{-b}$ auch $\sqrt[n]{(-a \times -b)} = \sqrt[n]{ab}$, sondern es ist $\sqrt[n]{-a} \times \sqrt[n]{-b} = \sqrt[n]{(-ab)}$. Dieses erhellet auch daraus: Es ist nemlich eigentlich $\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{-1.a}$, und eben so $\sqrt[n]{-b} = \sqrt[n]{-1.b}$. Ferner ist $\sqrt[n]{-1} = \sqrt[\frac{n}{2}]{}. \sqrt{-1}$. Hieraus wird also $\sqrt{-1}.a = \sqrt[n]{a}.\sqrt[\frac{n}{2}]{}(\sqrt{-1})$ und $\sqrt[n]{-b} = \sqrt[n]{b}.\sqrt[\frac{n}{2}]{}.\sqrt{-1}$, folglich wird $\sqrt[n]{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}.\sqrt[\frac{n}{2}]{}\sqrt{-1} \times \sqrt[\frac{n}{2}]{}.\sqrt{-1} = \sqrt[n]{ab}.\sqrt[\frac{n}{2}]{}-1$.

Diese Anmerkung darf man nicht aus der Acht lassen, wenn man sich nicht in der Multiplication mit dergleichen Größen versehen will.

Also ist z. E. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} \times \sqrt{b}.\sqrt{ab} \times -1 = -\sqrt{ab}$, und also auch

$$\begin{array}{r} a - \sqrt{-c} \\ b + \sqrt{-d} \\ \hline ab - b\sqrt{-c} + cd \\ + a\sqrt{-d} \end{array}$$

und so auch in andern ähnlichen Fällen, welche aber überhaupt nicht sehr ofte vorkommen.

Siebenter Abschnitt.

Von den Gleichungen.

§. 492.

Aufgabe.

Man verlangt drey Größen, die so beschaffen seyn sollen, daß ihre Summe $= a$, die Summe der Producte aus zwey und zwey $= b$, und das Product aus allen dreyen in einander $= c$ ist.

§. 493.

Auflösung.

Die gegebene drey Größen a, b, c können sowohl positiv als negativ seyn, weil in der Aufgabe dieses nicht ausdrücklich bestimt wird. Indessen kann man sie positiv annehmen, weil die übrige Fälle leicht durch die Veränderung der Zeichen bestimt werden.

Die drey Größen, welche man sucht, sollen x, y und z seyn. Die Bedingungen der Aufgabe erfordern demnach, daß

1) $x + y + z = a$
2) $xy + xz + zy = b$
3) $xyz = c$

sey. Man multiplicire die erste Gleichung mit x, und subtrahire davon die zweite, so wird

$$x^2 - zy = ax - b.$$

Multiplicirt man diese mit x, und addirt dazu die dritte, so wird

$$x^3 = ax^2 - bx + c$$

und $x^3 - ax^2 + bx - c = o$

Eben so bekomt man

$$y^3 - ay^2 + by - c = o$$

und $z^3 - az^2 + bz - c = o$

§. 494.

Anmerkung.

Diese Gleichungen sind von einer ganz andern Art, als diejenigen, welche wir bishero betrachtet haben. Wie man sieht, so sind sie einander vollkommen ähnlich, und alle drey Größen sind auf einerley Art mit den gegebenen verbunden. Im Grunde hat man nur eine Gleichung

$$x^3 - ax^2 + bx - c = o$$

und diese ist richtig, wenn man vor x nach und nach den Werth schreibet, den x, y und z haben müssen, wenn die gegebene Bedingungen erfüllt werden sollen.

§. 495.

Man kann also sagen, daß die unbekannte Größe in dieser Gleichung drey Werthe habe, und da keine Gleichung vom dritten Grade gedacht werden kann, welche nicht unter diese Form mit begriffen seyn sollte, wenn man die Coefficienten a, b, c gehörig bestimt, so ist offenbar, daß in einer

jeden

jeden Gleichung vom dritten Grade die unbekannte Größe drey verschiedene Werthe haben kann.

§. 496.

Man nennt diese Werthe der unbekannten Grösse auch Wurzeln der Gleichung, um sich desto kürzer auszudrücken; und nunmehro ist der Ausdruck zu verstehen, wenn man sagt, daß eine cubische Gleichung, oder eine Gleichung vom drittem Grade drey Wurzeln habe. Man kann mit vieler Wahrscheinlichkeit vermuthen, daß in den Gleichungen von den andern höhern Graden, die unbekannte Größe auch verschiedene Werthe haben wird, und dahero kann man bey allen Gleichungen die verschiedene Werthe der unbekannten Größe die Wurzeln derselben nennen, welches auch längst üblich ist.

§. 497.

Man siehet indessen nicht, auf was Art man die Wurzeln der Gleichung in der Aufgabe näher bestimmen kann. Es zeigt sich auch nicht einmahl ein Mittel einen glücklichen Versuch zu wagen. Man sieht weiter nichts, als daß die Wurzeln der Gleichung so beschaffen seyn müssen, daß die ganze Gleichung verschwindet, wenn man dieselben nach und nach in der Stelle der unbekannten Größe setzet. Es wird also eine genauere Untersuchung der Gleichungen erfordert, und in dieser Absicht wollen wir folgenden Weg ergreifen.

§. 498.

§. 498.

Lehrsatz.

Es sey n die Anzahl der Größen x, y, z ꝛc. die so mit einander verbunden werden sollen, daß

1) Die Summe aller dieser Größen $= A'$
2) Die Summe aller der Producte, welche entstehen, wenn man zwey und zwey miteinander verbindet $= B'$
3) Die Summe der Producte aus drey und drey in einander $= C'$
4) Die Summe der Producte aus vier und vier in einander $= D'$

und so weiter F', G' ꝛc. die Summe der Producte aus fünf, sechs ꝛc. in einander, sey. Komt nun zu diesen Größen noch eine andre Größe t hinzu, so, daß nunmehro die Anzahl derselben $n + 1$ ist, und man läst hier wieder A die Summe aller dieser Größen, B die Summe der Producte aus zwey und zwey und so weiter C, D, E ꝛc. die Summe der Producte aus drey, vier, fünf ꝛc. in einander bedeuten, so ist

$$\begin{aligned} t + A' &= A \\ tA' + B' &= B \\ tB' + C' &= C \\ tC' + D' &= D \\ tD' + E' &= E \\ tE' + F' &= F \\ \text{ꝛc.} \qquad & \qquad \text{ꝛc.} \\ tX' &= X \end{aligned}$$

Wenn X' das Product aus allen den Größen, x, y, z ꝛc. deren Anzahl n ist, und X das Product

aus

aus allen den Größen x, y, z ꝛc. t deren Anzahl $n + 1$ ist, bedeutet.

§. 499.

Beweis.

Weil A die Summe aller Größen ist, und A′ nur die Summe der Größen ohne t, so ist offenbar, daß

$$t + A' = A$$

ist. Nun ist B die Summe aller der Producte, wenn zwey und zwey in einander multiplicirt werden. Da nun B′ schon die Summe der Producte aus zwey und zwey Größen ist, ehe die Größe t hinzu gekommen, und man will die Summe der Producte aus zwey und zwey Größen haben, wenn sie alle genommen werden, so muß nothwendig die Summe der erstern noch mit t multiplicirt werden und denn ist $tA' + B' = B$.

Eben so lassen sich die übrigen Sätze beweisen.

§. 500.

Anmerkung.

Gesetzt man hätte vier Größen, x, y, z, u, so ist

$$x + y + z + u = A'$$
$$xy + xz + xu + yz + yu + zu = B,$$
$$xyz + xyu + xzu + yzu = C'$$
$$xyzu = D'$$

komt nun noch die fünfte Größe t hinzu, so wird

$$t + A' = A$$
$$tA' + B' = B, \text{ oder}$$

$tx + ty + tz + tu + xy + xz + xu + yz + yu + zu = B'$

$tB' + C' = C$, oder

$txy + txz + txu + tyz + tyu + tzu + xyz + xzu$
$xyu + yzu = C$

$tC' + D' = D$, oder

$txyz + txyu + tyzu + txzu + xyzu = D$

und $tD' = E$, oder $txyzu = E$.

Dieses wird den Lehrsatz hinreichend erläutern.

§. 501.

1. Zusatz.

Wenn a, die Summe b, c, d ꝛc. die Summe der Produckte aus zwey, drey, vier ꝛc. Größen, t, x, y ꝛc. ohne der Größe z sind, so ist auch

$z + a = A$
$za + b = B$
$zb + c = C$
$zc + d = D$
ꝛc. ꝛc.

Und auf eine ähnliche Art ist dieses richtig, wenn man t, y, z ꝛc. ohne der Größe x nimt.

§. 502.

Lehrsatz.

Wenn alles bleibt, wie §. 498. so ist auch

$t^{n+1} - At^n + Bt^{n-1} - Ct^{n-2} + \text{ꝛc.} - X = o$

§. 503.

Beweis.

Man multiplicire von den Gleichungen (§. 498.) die erste mit t^n, die zweite mit t^{n-1}, die dritte mit t^{n-2} ꝛc. so wird

t^{n+1}

$$\begin{array}{llll} t^{n+1} & + A't^n & = & At^n \\ t^n A' & + B't^{n-1} & = & Bt^{n-1} \\ t^{n-1}B' & + C't^{n-2} & = & Ct^{n-2} \\ t^{n-2}C' & + D't^{n-3} & = & Dt^{n-3} \\ \text{ꝛc.} & & & \text{ꝛc.} \\ tX' & & = & X \end{array}$$

Hieraus wird offenbar

$t^{n+1} = At^n - Bt^{n-1} + Ct^{n-2} + \text{ꝛc.} - X$

folglich, wenn man alle Glieder auf eine Seite bringt, so ist das, was behauptet worden, offenbar.

§. 504.

Zusatz.

Da man anstatt t auch eine jede von den andern Größen x, y, z ꝛc. nehmen kann, (§. 498. und 501.) so ist ebenfalls

$x^{n+1} - Ax^n + Bx^{n-1} - Cx^{n-2}$ ꝛc. $- X = 0$

und es entstehen genau so viel dergleichen Gleichungen, als man Größen x, y, z ꝛc. hat.

§. 505.

2. Zusatz.

Wenn man also so viel unbekannte Größen finden soll, als die Zahl $n + 1$, die man $= m$ setzen kann, Einheiten hat, und diese Größen sollen so beschaffen seyn, daß ihre Summe $= A$, die Summe der Producte aus zwey und zwey $= B$, und so weiter C, D, E ꝛc. die Summe der Producte aus drey, vier, fünf ꝛc. in einander ist, so bekomt man durch diese Bedingungen m Gleichungen, welche die Form haben

$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{ꝛc.} - X = 0$

und man kann sicher behaupten, daß unter diesen Bedingungen, die unbekannte Größe x so viel verschiedene Werthe hat, als der Buchstabe m Einheiten hat, weil diese Gleichung beständig statt findet, wenn man vor x die übrige Größen y, z, u ꝛc. schreibet.

§. 506.

3. Zusatz.

Eben diese ist auch richtig, wenn die Summe aller der Größen, die Summe der Producte aus drey, fünf, sieben, neun ꝛc. negative Größen sind. Und alsdenn hat in der daraus entstehenden Gleichung

$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3}$ ꝛc. $- X = o$

die unbekannte Größe x so viel Werthe als die Zahl m Einheiten hat.

§. 507.

Lehrsatz.

Eine jede Gleichung

$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} - x = o$,

wo m eine ganze Zahl ist, hat so viel Wurzeln als diese Zahl m Einheiten hat.

§. 508.

Beweis.

Unter die Wurzeln dieser Gleichung versteht man alle diejenigen Größen, die so beschaffen sind, daß die ganze Gleichung verschwindet, wenn man sie in die Stelle von x setzet. (§. 496. 497.) Man nehme nunmehro so viel unbekannte Größen, als m Ein-

Einheiten hat, und setze, daß $-A$ die Summe derselben, $+B$ die Summe der Produckte aus zwey und zwey in einander, $-C$, $+D$, $-E$, $+F$ u. s. w. Die Summe der Produckte aus drey, vier, fünf, sechs ꝛc. in einander bedeuten, so bekomt genau die angeführte Gleichung, man mag von diesen Größen suchen, welche man will, und eine jede davon ist so beschaffen, daß, wenn sie in die Stelle von x gesetzet wird, sie macht daß die ganze Gleichung verschwindet. (§. 502. u. §. 504.) Da nun die Anzahl dieser Größen m ist, so hat auch die obige Gleichung so viel Wurzeln. (§. 497.)

§. 509.

Lehrsatz.

Wenn a eine von den Werthen der Größe x in der Gleichung

$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{ꝛc.} - X = o$

ist, so läst sich diese Gleichung durch $x - a$ dividiren.

§. 510.

Beweis.

Die Anzahl aller unbekannten Größen in dieser Gleichung ist m, (§. 508.) folglich, da die eine davon a ist, so ist die Anzahl der übrigen unbekannten Größen $m - 1$. Es sey also

α die Summe aller dieser noch unbekannten Größen,

β die Summe aller Produckte aus zwey und zwey, γ, δ, ε, ξ ꝛc. die Summe aller Produckte aus drey, vier, fünf, sechs ꝛc. in einander, und w das Produckt aus allen in einander, so wird (§. 502.)

$x^{m-1} - \alpha x^{m-2} + \beta x^{m-3} - \gamma x^{m-4}$ ꝛc. $- \omega = 0$.

Wenn nun zu diesen Größen noch die Größe a hinzu komt, so wird (§. 498.)

$$\begin{aligned} a + \alpha &= A \\ \alpha a + \beta &= B \\ \beta a + \gamma &= C \\ \gamma a + \delta &= D \\ \delta a + \varepsilon &= E \\ &\text{u. s. w.} \\ a\omega &= X \end{aligned}$$

und die neue Gleichung ist

$$\begin{matrix} x^m - \alpha \\ -a \end{matrix}\Big\} x^{m-1} \begin{matrix} +\beta \\ +a\alpha \end{matrix}\Big\} x^{m-2} \begin{matrix} -\gamma \\ -\beta a \end{matrix}\Big\} x^{m-3} \text{ ꝛc. } \ldots \omega a = 0$$

$$= x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} - X \text{ §. 502.}$$

folglich da sich die erste in diese

$(x - a)(x^{m-1} - \alpha x^{m-2} + \beta x^{m-3} - \gamma x^{m-4} \ldots \omega)$

auflösen läst, so ist auch

$(x - a)(x^{m-1} - \alpha x^{m-2} + \beta x^{m-3} -$ ꝛc. $\omega) =$

$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots . X.$

Hieraus sieht man augenscheinlich, daß sich die angegebene Gleichung durch $x - a$ dividiren läst.

§. 511.

Zusatz.

Wenn nun b, c, d ꝛc. die Werthe der unbekannten Größe x sind, so läst sich eben auf diese Art beweisen, daß sich die gegebene Gleichung sowohl durch $x - b$, als auch durch $x - c$, $x - d$, $x - e$ ꝛc. dividiren läst.

§. 512.

2. Zusatz.

Die Gleichung

$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots - x = o$

entstehet also, wenn man alle die einfache Gleichungen, durch welche sie dividiret werden kann, und deren Anzahl m ist, in einander multiplicirt, und wenn $x - a$, $x - b$, $x - c$ ꝛc. diese Divisores sind, so wird

$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) \times$ ꝛc. $= o$.

§. 513.

3. Zusatz.

Eine Gleichung von einem gewissen Grade läst sich dahero in so viel einfache Gleichungen auflösen, als die Zahl m, welche den Grad anzeigt, oder der Exponent der höchsten Dignität von x, Einheiten hat.

§. 514.

Anmerkung.

Es ist übrigens blos der Bequemlichkeit wegen geschehen, daß man die Summe aller unbekannten Größen, die Summe der Produckte aus zwey, drey, vier ꝛc. in einander beständig positiv angenommen hat. Alle diese Schlüße gelten aber ebenfalls, wenn man alle oder einige davon als negativ betrachtet.

§. 515.

Wenn man nun alle die einfache Gleichungen wüste, in denen sich eine jede Gleichung auflösen läst, so ist offenbar, daß, wenn man die Coefficien-

ten der unbekannten Größe durch Zahlen ausdrückt, und alsdenn vor die unbekannte Größe diejenige Zahl setzet, welche dieselbe aus einer von den einfachen Gleichungen bekomt, die Glieder alle einander aufheben müssen, und folglich die ganze Gleichung in nichts verwandelt wird. Z. E. setzt man in die Gleichung $x^3 + x^2 - 24x + 36 = 0$, vor x die Zahl 2, so wird die Gleichung in diese $8 + 4 - 48 + 36 = 0$ verwandelt. Eben dieses geschiehet auch, wenn man vor x die Zahl -6, oder $+3$ setzet.

§. 516.

Man kann dahero auch umgekehrt sicher schliessen, daß eine jede Zahl, welche macht, daß eine gegebene Gleichung verschwindet, die Wurzel derselben ist. Denn man versteht unter der Wurzel einer Gleichung nichts anders §. 497. folglich läst sich auch die gegebene Gleichung durch die einfache Gleichung dividiren, in die der Werth der unbekannten Größe dieser Zahl gleich ist. So z. E. läst sich die angeführte Gleichung durch $x - 2 = 0$ dividiren, weil $+2$ vor x gesetzt, die ganze Gleichung in nichts verwandelt.

§. 517.

Man könnte fragen, ob es nicht noch mehrere einfache Gleichungen gäbe, als die Zahl m ist, welche den Grad der Gleichung bestimt, durch welche sich eine gegebene Gleichung von diesem Grade dividiren läst? Denn bishero ist weiter

noch

noch nichts bewiesen, als daß sich die Gleichung

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \text{ ꝛc.} - X = o$$

in so viel einfache von der Form $x - a = o$ zerlegen läst, als Einheiten in m sind. Indessen ist noch nicht ausgemacht, daß nur allein diese, und keine andre einfache Gleichungen solches bewerkstelligen. Folgender Lehrsatz soll dieses ins Licht setzen.

§. 518.

Lehrsatz.

Es sey A das Producte aus gewissen einfachen oder solchen Größen, welche sich durch keine andre Größen weiter dividiren lassen; so kann die Größe A nicht entstehen, wenn man andre einfache Grösen in einander multiplicirt, welche von den vorigen unterschieden sind.

§. 519.

Beweis.

Gesetzt, a, b, c, d ꝛc. wären die einfache Factores der Größe A, so, daß $A = a, b, c, d$ ꝛc. ist. Gesetzt ferner, es wäre möglich, daß α, β, γ, δ ꝛc. auch andre lauter einfache Factores der Größe A wären, so daß $A = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ꝛc. ist. So sind hierbey nur zwey Fälle möglich:

1) Entweder sind diese Factores α, β, γ ꝛc. völlig von den vorigen verschieden, so, daß unter diesen letztern kein einziger anzutreffen ist, welcher auch unter den erstern anzatreffen wäre.

2) Oder es sind unter diesen letztern einige, welche auch unter den erstern zu finden sind.

Gesetzt, es wäre das Erste, so sey B $= b, c, d$ ꝛc. und C $= \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ꝛc. so wird $aB = \alpha C$, weil beyde $= A$ sind. Es ist also $B = \frac{\alpha C}{a}$. Weil nun B das Produckt aus lauter einfachen Factoren ist, so muß nothwendig αC sich durch a dividiren lassen, so, daß nichts übrig bleibt. Folglich müste unter αC ein Factor seyn, der dem Factor a gleich ist. Nun wird aber voraus gesetzt, daß dieses nicht ist. Folglich geht dieser erste Fall nicht an.

Gesetzt aber, es wären unter dem letztern einige, welche einerley mit eben so viel von den erstern sind. Man setze, D wäre das Produckt derselben, so, daß $a. b. c.$ ꝛc. $\times D = A$, und $\alpha. \beta. \gamma.$ ꝛc. $\times D = A$, so wird auch $a.b.c$ ꝛc. $\times D = \alpha. \beta. \gamma$ ꝛc. $\times D$, folglich $a. b. c.$ ꝛc. $= \alpha. \beta. \gamma.$ ꝛc. Es sey ferner $b c$ ꝛc. $= E$ und $\beta \gamma$ ꝛc. $= F$, so wird $aE = \alpha F$, folglich $E = \frac{\alpha F}{a}$.

Da nun E das Produckt aus lauter einfachen Factoren ist, so folgt daraus, daß sich αF durch a so dividiren lassen muß, daß nichts mehr übrig bleibt. Dieses kann nicht anders geschehen, als wenn in αF ein Factor ist, der mit den Factor a einerley ist. Nun aber ist in αF kein Factor, der mit einem von dem Factoren in der Größe aE einerley wäre. Da nun a mit einer von den Factoren der Größe aE ist, so siehet man, daß sich dieses widerspricht. Hieraus folgt also, daß es nicht mög-

lich

sich ist, andre einfache Factores als a, b, c, d ꝛc. zu finden, durch deren Multiplication in einander die Größe A hervorgebracht wird.

§. 520.

Zusatz.

Wenn also die Gleichung

$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} +$ ꝛc. $.... X = 0$

sich in die Gleichungen $x + a$, $x + b$, $x + c$ ꝛc. deren Anzahl m ist, auflösen läst, so ist es nicht möglich, dieselbe in andre einfache Gleichungen aufzulösen, welche von diesen verschieden sind.

§. 521.

Anmerkung.

Alle die Gleichungen, die bishero betrachtet worden, sind von der Art, daß das Glied, in welchem die höchste Dignität der unbekannten Grösse x vorkomt, keinen Coefficienten hat. Indessen lassen sich dergleichen Gleichungen leicht auf diese Form bringen, wenn man nur mit dem Coefficienten der höchsten Dignität von x die ganze Gleichung dividirt.

§. 522.

Es sey die Gleichung

$\alpha x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + ... X = 0$

so wird daraus, wenn man mit α dividirt

$x^m + \frac{A}{\alpha}x^{m-1} + \frac{B}{\alpha}x^{m-2} + ... \frac{X}{\alpha} = 0$

Und bey dieser Gleichung gelten alle die vorhin bewiesene Lehrsätze und übrige Schlüße.

§. 523.

§. 523.

Die einfache Gleichungen, aus deren Multiplication eine Gleichung von einen gewissen Grade entsteht, haben nun entweder die Form $x + a = o$, oder $x - a = o$. Im ersten Fulle ist $x = -a$ und im zweiten $x = +a$, und die Wurzel ist im ersten Fall eine negative, im zweiten eine positive Größe, a aber kann jede willkührliche Größe bedeuten.

§. 524.

Wenn man eine Gleichung von einem gewissen Grade nach der höchsten Potenz von x geordnet hat, und dieselbe ist vollständig, welches sie allemahl ist, wenn man nur annimt, daß einige Coefficienten der unbekannten Größe auch o seyn können, und die höchste Potenz von x hat keinen Coefficienten, folglich die ganze Gleichung diese Form $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{ꝛc.}\ X = o$ in der A, B, C ꝛc. X lauter bekannte Größen und übrigens entweder positiv, oder negativ sind, und auch in gewissen Fällen $= o$ seyn konnen, so folget aus dem vorhergehenden

1) Daß die Anzahl der Glieder der Gleichung allezeit $m + 1$ ist, folglich um eins größer, als die Anzahl der Wurzeln der Gleichung. Denn die Dignitäten fangen sich von m an, und steigen bis auf x herunter, und darauf folgt noch das Glied X, welches aus lauter bekannten Größen bestehet. Hieraus folgt auch umgekehrt, daß die Anzahl der Wurzeln der Gleichung der Anzahl der Glieder weniger 1 gleich ist.

2) Wenn

2) Wenn man die Zeichen zweyer unmittelbar auf einander folgender Glieder in der Gleichung eine Folge nennt, so sind so viel Folgen der Zeichen in der Gleichung, als die Zahl, welche die höchste Dignität der unbekannten Größe andeutet, Einheiten hat. Aber eben so viel Wurzeln sind auch in der Gleichung. Folglich sind in jeder Gleichung so viel Wurzeln, als Folgen der Zeichen.

§. 525.

Es sind z. E. in der Gleichung

$x^5 + ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = o.$

Sechs Glieder und die Anzahl der Wurzeln ist 5, folglich ist dadurch der erste Satz klar.

Ferner sind folgende Folgen der Zeichen

$+ +$ das erste und zweite Glied.
$+ +$ das zweite und dritte Glied.
$+ -$ das dritte und vierte Glied.
$- +$ das vierte und fünfte Glied.
$+ -$ das fünfte und sechste Glied.

also fünf Folgen, folglich gerade so viel, als Wurzeln in der Gleichung.

§. 526.

Da ferner die Gleichung aus der Multiplication verschiedener einfachen Gleichungen entsteht, so wechseln die Zeichen + und − mit einander ab, wenn diese einfache Gleichungen diese Form $x - a = o$ haben, oder wenn ein jeder Werth der unbekannten Größe in der Gleichung positiv ist. Haben aber diese einfache Gleichungen die Form $x + a = o$, oder wenn jeder Werth der unbekann-

kannten Größe negativ ist, so haben alle Glieder das Zeichen + vor sich.

§. 527.

1) Wenn a, b, c, d ꝛc. die Wurzeln der Gleichung (§. 496.) oder $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$ ꝛc. die einfache Gleichungen sind, aus denen dieselbe entsteht; so ist 1) A, der Coefficient des zweiten Gliedes, allezeit die algebraische Summe aller dieser Wurzeln, sie mögen beschaffen seyn, wie sie wollen.

2) Der Coefficient B des dritten Gliedes, die algebraische Summe aller Produckte aus zwey und zwey Wurzeln in einander.

3) Der Coefficient C des vierten Gliedes, die algebraische Summe aller der Produckte aus drey und drey Wurzeln in einander. Und so gehet es auf eine ähnliche Art fort.

4) Das letzte Glied aber ist das Produckt aus allen Wurzeln, welche in der Gleichung anzutreffen sind.

§. 528.

Weil in einer Gleichung, welche diese Form hat, $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3}$ ꝛc. $- z = o$ die Coefficienten A, B, C ꝛc. entstehen, wenn die Wurzeln nach und nach zu eins, zu zweyen, dreyen ꝛc. verbunden, oder in einander multiplicirt und hernach alle diese Produckte zusammen gerechnet werden, so wollen wir jetzt etwas genauer untersuchen, wie oft eine gewisse Anzahl Größen zu

eins.

eins, zweyen, dreyen ꝛc. verbunden werden kann; daß ist, wie oft diese Größen dergestalt zu zweyen, dreyen ꝛc. aneinander gesetzt, oder geschrieben werden können, daß keine einzige Folge, welche dadurch entsteht, der andern vollkommen gleich und ähnlich ist.

§. 529.

Gesetzt z. E. man hätte folgende Größen a, b, c, d, e, so können dieselben auf diese verschiedene Arten verbunden werden:

1) zu 1) a, b, c, d, e,
2) = 2) ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de,
3) = 3) abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde
4) = 4) $abcd$, $abce$, $abde$, $acde$, $bcde$,
5) = 5) $abcde$,

und so weiter, wenn mehrere Größen wären.

§. 530.

Gesetzt, die Anzahl der Größen a, b, c, d, e, f ꝛc. welche auf diese Art miteinander verbunden werden sollen, wäre n. Um nun zu erfahren, wie oft diese Größen zu zweyen, dreyen ꝛc miteinander verbunden werden können, muß man diese Betrachtungen anstellen.

1) Ist offenbar, daß die Anzahl der Größen, die zu eins verbunden seyn können, nur n ist.

2) Neben einer jeden Größe kann eine jede andre von den übrigen geschrieben werden, folglich wenn eine jede Größe mit einer von den übrigen verbunden wird, so entstehen dadurch $n - 1$ Verbindungen zu zwey und zwey, folglich da die

An-

Anzahl der einzelnen Größen n ist, so ist die Summe aller dieser Verbindungen $n.\ n - 1$. In dieser Summe ist aber eine jede Größe, mit der andere zweymal verbunden. Wenn man dahero diese Zahl $n.\ n - 1$ durch 2 dividirt, so bekomt man die Anzahl aller Verbindungen dieser Größen, zu zwey und zwey. Folglich wenn n Größen zu zwey und zwey verbunden werden, so ist die Anzahl aller verschiedenen Combinationen oder Verbindungen $= \frac{n.\ n - 1}{1.\ 2.}$.

3) Aus dieser Anzahl von Verbindungen kann eine jede mit allen den übrigen, außer den beyden, die selbst schon darinnen anzutreffen sind, verbunden werden. Da nun in einer jeden Verbindung schon zwey Größen sind, so sind noch $n-2$ Größen übrig, mit denen eine jede verbunden werden kann. Da nun $\frac{n.\ n - 1}{1.\ 2.}$ die Anzahl der Verbindungen der Größen zu zwey und zwey ist, so ist $\frac{n.\ n - 1.\ n - 2.}{1.\ 2.}$ Die Anzahl der Verbindungen, wenn eine jede Größe von den zu zwey und zwey verbundenen mit einer jeden andern verbunden wird, außer denen die schon selbst in der Verbindung sind. In dieser Anzahl komt aber jede Verbindung zu dreyen, dreymahl vor, denn wenn man drey Verbindungen ab, ac, bc zu zwey nimt, so wird die erste wieder mit c, die zweyte mit b, die dritte mit a verbunden, und dadurch entstehen drey gleiche

Ver-

Verbindungen *abc*, *abc*, *abc*. Aus diesem Grunde muß die Anzahl $\frac{n.\ n-1.\ n-2}{1.\ 2.}$ der Verbindungen, die entsteht, wenn eine jede Verbindung von denen zu zwey, mit allen den übrigen Größen wieder verbunden wird, außer denen, welche schon darinnen sind, durch 3 dividirt werden; alsdenn ist die Anzahl der verschiedenen Verbindungen zu dreyen, von den Größen, deren Anzahl *n* ist, oder der Combinationen zu dreyen $= \frac{n.\ n-1.\ n-2.}{1.\ 2.\ 3.}$

4) Jede Combination von diesen kann man wieder mit allen den übrigen Größen verbinden, außer denen, die darinnen selbst sind. Da nun eine jede Combination aus drey besteht, so ist $n-3$ die Anzahl aller der übrigen Größen, mit denen eine jede von diesen Verbindungen zu drey, aufs neue verbunden werden kann. Wenn man also eine jede von den Combinationen zu dreyen, mit allen den übrigen Größen verbindet, außer denen welche selbst darinnen sind, so ist die Anzahl dieser Verbindungen, $\frac{n.\ n-1.\ n-2.\ n-3.}{1.\ 2.\ 3}$

In dieser Anzahl komt aber jede Verbindung zu vieren, viermal vor. Denn wenn man diese Verbindungen zu drey nimt, *abc*, *abd*, *bcd*, *acd*, so kann die erste mit *d*, die zweite mit *c*, die dritte mit *a*, die vierte mit *b* verbunden werden, und alsdenn entstehen die vier Verbindungen, *abcd*, *abcd*, *abcd*, *abcd*, welche einander

vollkommen gleich sind. Wenn man also die vorhin gefundene Anzahl der Verbindungen zu vieren mit 4 dividirt, so ist die Anzahl aller verschiedenen Combinationen zu vieren, $= \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4.}$

5) Gesetzt, die Zahl p zeigt an, wieviel Größen miteinander verbunden sind, und N ist die Anzahl der Verbindungen, wenn die Größen zu $p$en miteinander verbunden werden. Wenn man nun jede Verbindung aus der Anzahl N wieder mit einer jeden von den noch übrigen Größen verbindet, außer denen, welche in der Verbindung selbst sind, und diese Verbindungen alle zusammen rechnet, so ist N. $(n - p)$ die Anzahl aller der Verbindungen, wenn eine jede Verbindung der Größen zu p, *mit einer jeden von den noch übrigen verbunden wird.* In dieser Anzahl komt aber jede Verbindung $p + 1$ mal vor. Denn man nehme eine gewisse Verbindung zu p, oder in der p Größen vorkommen

$abcdefghik$ ꝛc.

und verbinde dieselbe mit einer andern Größe r, so entsteht diese Verbindung:

$abcdefghik$ ꝛc. r.

Nun kommen noch p solche Verbindungen vor, in denen alle diese letztere Größen, ohne a, oder b, oder c, oder d ꝛc. befindlich sind. Folglich da dieselben aufs neue mit den fehlenden Größen verbunden werden können, so ist offenbar, daß daraus $p + 1$ gleiche Verbindungen entstehen. Da nun dieses bey allen richtig ist, so muß man die

Anzahl

Anzahl N. $(n-p)$ durch $p+1$ dividiren. Folglich ist die Anzahl der Verbindungen zu $p+1$, wenn N die Anzahl der Verbindungen zu p ist, $= \frac{N.(n-p)}{p+1}$.

§. 531.

In einer jeden Gleichung

$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{&c.} \ldots X = 0$

Ist also 1) n die Anzahl der Größen in den Coefficienten A, weil derselbe der Summe aller Wurzeln gleich ist. (§. 527.)

2) Die Anzahl der Producte in dem Coefficienten B, ist $\frac{n.n-1}{1.2.}$, weil derselbe der Summe aller Verbindungen der Wurzeln zu zwey und zweyen gleich ist. §. 527.

3) Die Anzahl der Producte in dem Coefficienten C, ist $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.}$, weil derselbe der Summe der Producte gleich ist, welche entstehen, wenn drey und drey Wurzeln in einander multiplicirt, oder miteinander verbunden werden. §. 527.

4) Die Anzahl der Producte in dem Coefficienten D, ist demnach $\frac{n.n-1.n-2\ n-3}{1.2.3.4.}$, weil dieser Coefficient der Summe aller Products gleich ist, wenn die Wurzeln zu viere miteinander verbunden, oder in einander multiplicirt werden.

Und nach diesem Gesetze gehet es immer weiter fort.

§. 532.

Wenn nun die Wurzeln in dieser Gleichung alle einander gleich sind, so kommen in A alle Wurzeln in B alle Quadrate, in C alle Cubi, in D die vierte Dignitäten ꝛc. der Wurzeln vor. Folglich ist alsdenn

$$A = \frac{n.\ b}{1}$$

$$B = \frac{n.\ n-1.\ b^2}{1.\ 2.}$$

$$C = \frac{n.\ n-1.\ n-2.\ b^3}{1.\ 2.\ 3.}$$

$$D = \frac{n.\ n-1.\ n-2.\ n-3.\ b^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$$

$$E = \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.b^5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$$

$$F = \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5.b^6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ 6.}$$

$$G = \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5.n-6.b^7}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.}$$

ꝛc. indem unter b die Wurzel verstanden wird.

§. 533.

In diesem Falle ist aber

$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ ꝛc. ..... $X = (x+a)^n$

(§. 512.) Hieraus folgt also die Methode, ein jedes Binomium $a + b$, auf eine jede Dignität zu erheben, deren Exponent n eine ganze positive Zahl ist. Wenn man nemlich vor A, B, C ꝛc. die eben gefundene Werthe und $x = a$ setzet, so wird

$(a +$

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} b a^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2} b^2 a^{n-2}$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} b^3 a^{n-3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} b^4 a^{n-4}$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5.6} b^5 a^{n-5} + \text{&c.}$$

und der Fortgang der Coefficienten ist sehr leicht einzusehen.

§. 534.

Es sey z. E. $n = 6$, so wird

$$(a+b)^6 = a^6 + 6ba^5 + \frac{6.5}{1.2} b^2 a^4 + \frac{6.5.4}{1.2.3} b^3 a^3$$
$$+ \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} b^4 a^2 + \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} b^5 a + \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6} b^6$$

oder

$$(a+b)^6 = a^6 + 6ba + 15b^2a^4 + 20b^3a^3$$
$$+ 15b^4a^2 + 6b^5a + b^6$$

und so in allen andern Fallen. Man siehet leicht ein, daß diese gegebene Formel allezeit abbricht, wenn n eine ganze positive Zahl ist, welches bishero voraus gesetzet worden.

§. 535.

Durch Hülfe dieses Satzes kann man eine jede Größe, sie bestehe aus so viel Theilen, als sie nur wolle, ja aus einer unendlichen Anzahl von Theilen, auf eine jede beliebige Dignität deren Exponent n, eine ganze positive Zahl ist, erheben. Gesetzt man solte diese Reihe

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{&c.}$$

auf die Dignität n erheben, so setze man

$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ꝛc.})^n = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{ꝛc.}$$

Diese beyde Reihen müssen richtig seyn, was auch die Größe x vor einen Werth bekomt. Es komt nunmehro blos darauf an, den Werth der Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ꝛc. zu bestimmen.

In dieser Absicht setze man, daß die Größe x größer wird, und um die Größe y zunimt. Wenn man nun überall in den beyden Reihen $x + y$ vor x setzet, so bekomt man

$$\left.\begin{array}{l} A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ꝛc.} \\ \quad + By + 2Cxy + 3Dx^2y + 4Ex^3y \\ \qquad + Cy^2 + 3Dxy^2 + 6Ex^2y^2 \\ \qquad\quad + Dy^3 + 4Exy^3 \\ \qquad\qquad + Ey^4 \end{array}\right\}^n =$$

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{ꝛc.} \\ \quad + \mathfrak{B}y + 2\mathfrak{C}xy + 3\mathfrak{D}x^2y + 4\mathfrak{E}x^3y \\ \qquad + \mathfrak{C}y^2 + 3\mathfrak{D}xy^2 + 6\mathfrak{E}x^2y^2 \\ \qquad\quad + \mathfrak{D}y^3 + 4\mathfrak{E}xy^3 \\ \qquad\qquad + \mathfrak{E}y^4 \end{array}$$

Zu mehrerer Bequemlichkeit setze man

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ꝛc.} = P$$
$$B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \text{ꝛc.} = Q$$
$$C + 3Dx + 6Ex^2 + 10Fx^3 + 15Gx^4 + \text{ꝛc.} = R$$

und so weiter

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \text{ꝛc.} = P'$$
$$\mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + \text{ꝛc.} = Q'$$
$$\mathfrak{C} + 3\mathfrak{D}x + 6\mathfrak{E}x^2 + 10\mathfrak{F}x^3 + \text{ꝛc.} = R'$$

und so weiter, so bekomt man

$$(P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + \text{ꝛc.})^n = P' + Q'y + R'y^2 + S'y^3 \text{ ꝛc.}$$

oder

$$P^n + n.P^{n-1}(Qy + Ry^2 + \text{ꝛc.}) + \frac{n.n-1}{1.2}P^{n-2} \times$$
$$(Qy + Ry^2 + \text{ꝛc.})^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}P^{n-3} \times$$
$$(Qy + Ry^2 + \text{ꝛc.})^3 = P' + Q'y + R'y^2 + \text{ꝛc.}$$

Man setze nunmehro $x = o$, und $y = o$, so wird in diesem Falle $A^n = P^n$ und $A^n = A$, folglich $P^n = P'$, und also ist das erste Glied A der angenommenen Reihe bestimt.

Weil nun $P^n = P'$, und man zieht in den beyden letzten Reihen diese Größen von einander ab, so wird

$$n.P^{n-1}(Qy + Ry^2 + \text{ꝛc.}) + \frac{n.n-1}{1.2}P^{n-2} \times$$
$$(Qy + Ry^2 + \text{ꝛc.})^2 + \text{ꝛc.} = Q'y + R'y^2 + \text{ꝛc.}$$

Man dividire überall mit y, so bekomt man

$$n.P^{n-1}(Q + Ry + \text{ꝛc.}) + \frac{n.n-1}{1.2}P^{n-2} \times$$
$$(Q + Ry + \text{ꝛc.})^2 + \text{ꝛc.} = Q' + R'y + S'y^2 + \text{ꝛc.}$$

Und diese Gleichungen sind richtig, was man auch der Größe y vor einem Werth giebt. Man setze wieder $y = o$, so wird $n.P^{n-1}Q = Q'$ oder wenn man vor P^n und Q Q' wieder die gehörigen Werthe setzet,

$$\frac{n.B + 2nCx + 3nDx^2 + 4nEx^3 + \text{ꝛc.}}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ꝛc.}} \times$$
$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{ꝛc.}) =$$
$$\mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 \text{ ꝛc.}$$

Multiplicirt man nun wirklich in einander, so entstehen folgende beyde Reihen

$$\begin{aligned}\mathfrak{AB}+2\mathfrak{AC}x+3\mathfrak{AD}x^3+4\mathfrak{AE}x^3+5\mathfrak{AF}x^4+\text{&c.} = \\ +\mathfrak{BB}x+2\mathfrak{BC}x^2+3\mathfrak{BD}x^3+4\mathfrak{BE}x^4 \\ +\mathfrak{CB}x^2+2\mathfrak{CC}x^3+3\mathfrak{CD}x^4 \\ +\mathfrak{DB}x^3+2\mathfrak{DC}x^4 \\ +\mathfrak{EB}x^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n\mathfrak{BA}+n\mathfrak{BB}x+n\mathfrak{BC}x^2+n\mathfrak{BD}x^3+n\mathfrak{BE}x^4+\text{&c.} \\ +2n\mathfrak{CA}x+2n\mathfrak{CB}x^2+2n\mathfrak{CC}x^3+2n\mathfrak{CD}x^4 \\ +3n\mathfrak{DA}x^2+3n\mathfrak{DB}x^3+3n\mathfrak{DC}x^4 \\ +4n\mathfrak{EA}x^3+4n\mathfrak{EB}x^4 \\ +5n\mathfrak{FA}x\end{aligned}$$

Und es ist das Gesetz leicht einzusehen, nach dem diese Reihen fortgehen. Wenn man nun alle Glieder in beyden Reihen auf die eine Seite brächte, so müsten beyde Reihen einander aufheben, und dieses allezeit, so groß, oder so klein auch die Größe x in verschiedenen Fällen seyn kann. Es müßen also die Coefficienten von einerley Dignität von x einander aufheben. Aus dieser Ursach wird aus der Vergleichung der Coefficienten von einerley Dignität von x

$$\mathfrak{AB} = n\mathfrak{BA} = n\mathfrak{B}A^n$$
$$2\mathfrak{AC} = (n-1)\,\mathfrak{BB}+2n\mathfrak{CA}$$
$$3\mathfrak{AD} = (n-2)\mathfrak{BC}+(2n-1)\mathfrak{CB}+3n\mathfrak{DA}$$
$$4\mathfrak{AE} = (n-3)\mathfrak{BD}+(2n-2)\mathfrak{CC}+(3n-1)\mathfrak{DB}+4n\mathfrak{EA}$$
$$5\mathfrak{AF} = (n-4)\mathfrak{BE}+(2n-3)\mathfrak{CD}+(3n-2)\mathfrak{DC}+(4n-1)\mathfrak{EB}+5n\mathfrak{FA}$$

und so weiter. Das Gesetz nach dem diese Coefficienten fortgehen, fällt aufs deutlichste in die Augen, und es ist

$$\mathfrak{A} =$$

$\mathfrak{A} = A^n$

$\mathfrak{B} = \frac{nBA}{A}$

$\mathfrak{C} = \frac{(n-1.)\,B\mathfrak{B} + 2nC\mathfrak{A}}{2A}$

$\mathfrak{D} = \frac{(n-2.)\,B\mathfrak{C} + (2n-1)\,C\mathfrak{B} + 3nD\mathfrak{A}}{3A}$

und so kann man leicht weiter gehen, weil das Gesetz, welches diese Coefficienten bey ihrem Fortgang beobachten, leicht zu übersehen ist.

§. 536.

Man setze nunmehro $x = \frac{z}{a}$ und $A = B = C = D = \text{&c.} = 1$. Will man nun diese unendliche Reihe $1 + \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} + \frac{z^3}{a^3} + \frac{z^4}{a^4} + \text{&c.}$ auf die Dignität n erheben, und man setzet

$$\left(1 + \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} + \frac{z^3}{a^3} + \text{&c.}\right)^n = \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}z}{a} + \frac{\mathfrak{C}z^2}{a} + \text{&c.}$$

so wird

$\mathfrak{A} = 1$

$\mathfrak{B} = \frac{n}{1}$

$\mathfrak{C} = \frac{n.\,n+1}{1.\,2.}$

$\mathfrak{D} = \frac{n.\,n+1.\,n+2}{1.\,2.\,3.}$

$\mathfrak{E} = \frac{n.\,n+1.\,n+2.\,n+3}{1.\,2.\,3.\,4.}$

$$F = \frac{n.\,n+1.\,n+2.\,n+3.\,n+4.}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.}$$

$$G = \frac{n.\,n+1.\,n+2.\,n+3.\,n+4.\,n+5.}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.}\ \text{&c.}$$

Es ist aber $1 + \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} + \frac{z^3}{a^3} + \text{&c.} = \frac{1}{1-\frac{z}{a}}$

folglich ist $\frac{F}{\left(1-\frac{z}{a}\right)^n} = \left(1-\frac{z}{a}\right)^{-n} = 1 + \frac{nz}{1a}$

$$+ \frac{n.\,n+1.\,z^2}{1.\,2.\,3.\,a^2} + \frac{n.\,n+1.\,n+2.\,z^3}{1.\,2.\,3.\,a^3} + \text{&c.}$$

Setzet man nun $z = -b$ und multiplicirt die ganze Reihe mit a^{-n}, so wird $a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n} =$

$$(a+b)^{-n} = a^{-n} - n.\,a^{-n-1}b + \frac{n.\,n+1}{1.\,2.}a^{-n-2}b^2$$

$$- \frac{n.\,n+1.\,n+2}{1.\,2.\,3.}a^{-n-3}b^3 + \frac{n.\,n+1.\,n+2.\,n+3}{1.\,2.\,3.\,4.}a^{-n-4}b^4$$

— &c. Wenn man diese Formel etwas genauer untersucht, so ist offenbar, daß sie entsteht, wenn man in der Formel vor $(a+b)^n$ die Zahl n negativ annimt.

§. 537.

Durch eben die vorhin gezeigte Methode kann man auch das Binomium $a+x$ auf eine Dignität erheben, deren Exponent eine gebrochne Zahl $\frac{m}{n}$ ist. Man setze nemlich

$(a+$

$(a+x)^{\frac{m}{n}} = A + Bx \pm Cx^2 + Dx^3 + \text{ꝛc.}$

so wird

$(a+x)^m = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ꝛc.})^n$

Nun ist $(a+x)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}x + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2}x^2$

$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3}x^3 + \text{ꝛc.}$ Folglich wenn man wieder wie vorhin $(A + Bx + Cx^2 + \text{ꝛc.})^n = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \text{ꝛc.}$ setzet, und die Glieder dieser beyden Reihen miteinander vergleicht, so wird

$\mathfrak{A} = a^m$

$\mathfrak{B} = \frac{m}{1} a^{m-1}$

$\mathfrak{C} = \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2}$

$\mathfrak{D} = \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3}$

$\mathfrak{E} = \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} a^{m-4}$ ꝛc.

Es ist aber auch

$A^n = \mathfrak{A} = a^m$, folglich $A = a^{\frac{m}{n}}$

und wenn man die übrigen Coefficienten nach dem (§. 535.) gegebenen Gesetz bestimt, so wird

$B = \frac{A\mathfrak{B}}{n\mathfrak{A}}$

$C = \frac{(1-n)B\mathfrak{B} + 2A\mathfrak{C}}{2n\mathfrak{A}}$

D =

$$D = \frac{(1-2n)CB + (2-n)BC + 3AD}{3nA}$$

$$E = \frac{(1-3n)DB + (2-2n)CC + (3-n)BD + 4AC}{4nA}$$

$$F = \frac{(1-4n)EB + (2-3n)DC + (3-2n)CD + (4-n)BC + 5AF}{5nA}$$

und so weiter. Setzt man nun vor A, B, C, D ꝛc. die gefundenene Werthe, so wird

$$A = a^{\frac{m}{n}}$$

$$B = \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}-1}$$

$$C = \frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n} - 1}{1.\ 2.} a^{\frac{m}{n}-2}$$

$$D = \frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n} - 1 \cdot \frac{m}{n} - 2}{1.\ 2.\ 3} a^{\frac{m}{n}-3}$$

$$E = \frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n} - 1 \cdot \frac{m}{n} - 2 \cdot \frac{m}{n} - 3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} a^{\frac{m}{n}-4}$$

$$F = \frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n} - 1 \cdot \frac{m}{n} - 2 \cdot \frac{m}{n} - 3 \cdot \frac{m}{n} - 4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} a^{\frac{m}{n}-5}$$

und

und so weiter. Setzt man ferner $\frac{m}{n} = t$, so wird

$$(a+x)^{\frac{m}{n}} = (a+x)^t = a^t + \frac{t}{1} a^{t-1} x + \frac{t.t-1}{1.2} a^{t-2} x^2 + \text{ꝛc.}$$

und wenn wieder $x = b$ gesetzt wird, so ist auch

$$(a+b)^t = a^t + \frac{t}{1} a^{t-1} b + \frac{t.t-1}{1.2} a^{t-2} b^2 + \frac{t.t-1.t-2}{1.2.3.} a^{t-3} b^3 + \frac{t.t-1.t-2.t-3}{1.2.3.4.} a^{t-4} b^4 + \text{ꝛc.}$$

Hieraus läst sich also schließen, daß auch die Formel, §. 533. welche dazu dienet, um ein jedes Binomium $a+b$ auf eine beliebige Dignität zu erheben, deren Exponent n eine ganze positive Zahl ist, auf alle Fälle angewendet werden kann, der Exponente mag eine positive, negative, ganze oder gebrochne Zahl seyn.

§. 538.

Wenn also A, B, C, D ꝛc. den ihnen (§. 531.) beygelegten Werth haben, so ist diese Formel $(a+b)^n = a^n + Aa^{n-1}b + Ba^{n-2}b^2 + Ca^{n-3}b^3 + Da^{n-4}b^4 + \text{ꝛc.}$ allgemein, der Exponent n mag beschaffen seyn, wie er will. Man setze hierinnen $b = -\frac{au}{a+u}$ so wird $a+b = a - \frac{au}{a+u} = \frac{aa}{a+u}$. So giebt eben diese Formel

mel auch die Dignität des Bruchs $\frac{aa}{a+u}$, deren Exponent n ist, und es wird

$$\frac{a^{2n}}{(a+u)^n} = a^{2n}(a+u)^{-n} = a^n - \frac{Ba^nu}{a+u} + \frac{Ca^nu^2}{(a+u)^2} - \frac{Da^nu^3}{(a+u)^3} + \frac{Ea^nu^4}{(a+u)^4} - \text{ꝛc.}$$

dividirt man nun durch a^{2n}, so bekomt man

$$(a+u)^{-n} = a^{-n} - \frac{Ba^{-n}u}{(a+u)^1} + \frac{Ca^{-n}u^2}{(a+u)^2} - \frac{Da^{-n}u^3}{(a+u)^3} + \frac{Ea^{-n}u^4}{(a+u)^4} - \text{ꝛc.}$$

Und diese Formel dienet ebenfalls wieder dazu, ein jedes Binomium $(a+u)$ auf eine beliebige Dignität zu erheben, deren Exponent eine ganze, gebrochne, positive oder negative Zahl ist.

§. 539.

Läst man n eine negative Zahl bedeuten, so wird $-n = -1.-n = +n$, folglich wird in diesem Falle

$$(a+u)^n = a^n - \frac{Ba^nu}{a+u} + \frac{Ca^nu^2}{(a+u)^2} - \frac{Da^nu^3}{(a+u)^3} + \frac{Ea^nu^4}{(a+u)^4} - \text{ꝛc.}$$

Ferner muß man (§. 532.) um die Coefficienten A, B, C ꝛc. zu bekommen, ebenfalls n negativ setzen, und alsdenn wird

$$A = -n$$

$$B = -\frac{n.-n-1}{1,\ 2.} = \frac{n.n+1}{1,\ 2.}$$

C=

$$C = \frac{-n.-n-1.-n-2}{1.\ 2.\ 3.} = \frac{-n.n+1.n+2}{1.\ 2.\ 3.}$$

$$D = \frac{-n.-n-1.-n-2.-n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} = \frac{n.n+1.n+2.n+3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$$

$$E = \frac{-n.-n-1.-n-2.-n-3.-n-4.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} = \frac{-n.n+1.n+2.n+3.n+4.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$$

und so weiter. Setzt man diese nun in der vorigen Formel, so wird

$$(a+u)^n = a^n + \frac{n a^n u}{(a+u)} + \frac{n.n+1\ a^n u^2}{1.\ 2.\ (a+u)^2} + \frac{n.n+1.n+2.\ a^n u}{1.\ 2.\ 3.\ (a+u)^3} + \frac{n.n+1.n+2.n+3.\ a^n u^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ (a+u)^4} + \frac{n.n+1.n+2.n+3.n+4.\ a^n u^5}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ 5.\ (a+u)^5}$$

Und diese Formel leistet eben das, was diese

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n\ a^{n-1} b}{1} + \frac{n.\ n-1.\ a^{n-2} b^2}{1.\ 2.} + \frac{n.\ n-1.\ n-2.\ a^{n-3} b^3}{1.\ 2.\ 3.} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.\ a^{n-4} b^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.\ a^{n-5} b^5 \text{ ꝛc.}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$$

verschaft.

§. 540.

§. 540.

Ob man nun zwar durch beyde Reihen einerley Entzweck erreicht, so findet doch bey ihrem Gebrauch eine Auswahl statt. Die erstere kann man gebrauchen, wenn man das Binomium $a+u$ auf eine gewisse Dignität erheben will, deren Exponent eine ganze negative Zahl ist; denn in diesem Falle bricht diese Reihe allezeit irgendwo ab, und bestehet aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, da sie hingegen ins unendliche fortgehen würde, wenn man sich der zweiten bedienen wollte.

Die zweite Formel ist hingegen weit bequemer, wenn man eine zweytheiligte Größe oder Binomium auf eine beliebige Dignität erheben will, deren Exponent eine positive ganze Zahl ist. Die erste Formel würde in diesem Falle ins unendliche fortgehen.

§. 541.

Die erste Formel dient auch besonders dazu, wenn man eine zweytheiligte Größe auf eine gebrochne Dignität erheben will, und kann alsdenn mit gutem Erfolge auf Zahlen angewendet werden, deren Wurzeln sich nicht in ganzen Zahlen ausdrüken lassen, sondern da man suchen muß, sich denenselben so sehr zu nähern, als es erfordert wird, wenn der Fehler, welchen man begehet, ohne Gefahr soll können weggelassen werden.

§. 542.

Um aus einer gegebenen Zahl die Wurzel von einer gewissen Ordnung durch Hülfe der gegebenen

For-

Formel zu bekommen, kann man auf folgende Art verfahren.

Man theile die gegebene Zahl N, aus der man die Wurzel von der Ordnung n ziehen soll, in zwey Theile, davon der erstere a so beschaffen ist, daß sich aus demselben die Wurzel von der Ordnung n ganz genau bekommen läst. Diese Zahl muß übrigens der gegebenen Zahl N sehr nahe kommen, und es liegt nichts daran, ob sie etwas größer ist, wenn dieses nur nicht merklich ist. Man ziehe die Zahl a von N ab, und nenne $N - a = u$. Hierauf setze man die gefundene Werthe der Zahlen in einer von den beyden Formeln (§. 539.) und entwickle die Glieder, bis man siehet, daß die übrigen so klein werden, daß man sie weglassen kann, ohne einen merklichen Fehler zu begehen. Die Glieder rechne man alsdenn zusammen, so bekomt man die Wurzel aus der Zahl N von der verlangten Ordnung.

§. 543.

Die Zahl n ist aber ein Bruch, und wenn aus einer gewissen Zahl die Quadratwurzel genommen werden soll, so ist $n = \frac{1}{2}$, vor die Cubikwurzel ist $n = \frac{1}{3}$, vor der Wurzel von der vierten Ordnung ist $n = \frac{1}{4}$, von der fünften Ordnung ist $n = \frac{1}{5}$ und so weiter. Wenn man also aus $a + u$ die Wurzel von verschiedenen Ordnungen haben will, so setze man vor n in der Formel (§. 539.) die gehörige Zahl, welche die Ordnung anzeigt, so ist

$$(a+)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(a+u)} = \sqrt{a} \times \left(1 + \frac{1.u}{2.(a+u)} + \frac{1.3.u^2}{2.4(a+u)^2} + \frac{1.3.5.u^3}{2.4.6.(a+u)^3} + \frac{1.3.5.7.u^4}{2.4.6.8.(a+u)^4} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$(a+u)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(a+u)} = \sqrt[3]{a} \times \left(1 + \frac{1.u}{3(a+u)} + \frac{1.4.u^2}{3.6(a+u)^2} + \frac{1.4.7.u^3}{3.6.9.(a+u)^3} + \frac{1.4.7.10.u^4}{3.6.9.12.(a+u)^4} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$(a+u)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{(a+u)} = \sqrt[4]{a} \times \left(1 + \frac{1.u}{4(a+u)} + \frac{1.5.u^2}{4.8(a+u)^2} + \frac{1.5.9.u^3}{4.8.12.(a+u)^3} + \frac{1.5.9.13.u^4}{4.8.12.16.(a+u)^4} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$(a+u)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{} = \sqrt[5]{(a+u)} = \sqrt[5]{a} \times \left(1 + \frac{1.u}{5(a+u)} + \frac{1.6.u^2}{5.10.(a+u)^2} + \frac{1.6.11.u^3}{5.10.15.(a+u)^3} + \frac{1.6.11.16.u^4}{5.10.15.20.(a+u)^4} + \text{ꝛc.}\right)$$

Diese Reihen können nach dem vor Augen liegenden Gesetz leicht weiter fortgeführet werden, und sind überaus bequem, um die Wurzeln sehr nahe und geschwinde zu bekommen.

§. 544.

Exempel.

Gesetzt man wollte die Quadratwurzel aus der Zahl 50 haben, so kann man diese Zahl 50 in zwey andre 49 und 1 theilen, davon die erste das

Qua-

Quadrat der Zahl 7 ist. Man setze also $a = 49$ und $u = 1$ in der Formel von die Quadratwurzel, so wird

$$\sqrt{50} = 7 \times \left(1 + \frac{1.1}{2.50} + \frac{1.3.1}{2.4.6.(50)^2} + \frac{1.3.5.1}{2.4.6.(50)^3} + \frac{1.3.5.7.1}{2.4.6.8.(50)} + \text{ꝛc.}\right)$$

nun ist

$$\frac{1}{2.50} = \frac{1}{100}$$

$$\frac{1.3.1}{2.4.(50)^2} = \frac{1.3}{2.(2.50)^2} = \frac{1.3}{2.(100)^2} = \frac{1.3}{100.200}$$

$$\frac{1.3.5.1}{2.4.6.(50)^3} = \frac{1.3.5}{2.50.4.50.6.50.} = \frac{1.3.5}{100.200.300}$$

$$\frac{1.3.5.7.}{2.4.6.8.(50)^4} = \frac{1.3.5.7.}{2.50.4.50.6.50.8.50.}$$

$$\frac{1.3.5.7.}{100.200.300.400.}$$

$$\frac{1.3.5.7.9.}{2.4.6.8.10.(50)^5} = \frac{1.3.5.7.9.}{2.50.4.50.6.50.8.50.10.50}$$

$$= \frac{1.3.5.7.9.}{100.200.300.400.500.}$$

Hieraus bekomt man also

$\sqrt{50} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

| | | |

Nun ist

$1 =$	$1,000000000$
$\frac{1}{3 \cdot 9} =$	$0,037037037$
$\frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 9^2} =$	$0,002743484$
$\frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 9^3} =$	$0,000237090$
$\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 9^4} =$	$0,000021952$
$\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 9^5} =$	$0,000002106$
$\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 9^6} =$	$0,000000416$
$\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 19}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 21 \cdot 9^7} =$	$0,000000041$
	$1,040042126$
dieſe Zahl mit 2 multiplicirt	2
giebt $\sqrt[3]{9}$	$2,080084252$

davon alle Zahlen bis auf die letzte 2 rechter Hand gewiß ſind.

§. 546.

Es geſchiehet bey dieſer Arbeit öfters, daß die Reihe nicht allzu geſchwinde ſolche Glieder angiebt, welche man weglaſſen kann. Um nun dieſen Vortheil zu erhalten, multiplicire man die gegebene Zahl mit einer andern Zahl c, welche man vorher auf die Dignität n erhoben, wenn man die Wurzel von der Ordnung n haben will: dieſe Zahl iſt alſo c^n. Wenn z. E. N die gegebene Zahl iſt, ſo iſt die neue $c^n N$. Hierauf ziehe man aus $c^n N$ die Wur-

zel von der Ordnung n, und dividire hernach dieselbe durch c, so hat man die Wurzel von der Ordnung n aus der Zahl N. Denn $\frac{\sqrt[n]{c^n N}}{c} = \frac{c\sqrt[n]{N}}{c} = \sqrt[n]{N}$, und je größer die Zahl c angenommen wird, je besser ist es.

§. 547.

Zum Beispiel, man soll die Cubickwurzel aus 13 schaffen. Man multiplicire diese Zahl mit 27, so bekomt man $13 \times 27 = 351$, und es ist $\sqrt[3]{351} = \sqrt[3]{13.27} = 3\sqrt[3]{13}$, folglich $\frac{\sqrt[3]{351}}{3} = \sqrt[3]{13}$. Nun ist aber $351 = 343 + 8 = 7^3 + 8$, folglich wenn man $a = 7^3$ und $8 = u$ setzet, so wird

$$\sqrt[3]{13} = \frac{7}{3}\left(1 + \frac{1.8}{3.351.} + \frac{1.4.(8)^2}{3.6.(351)^2} + \text{&c.}\right)$$

und die Glieder dieser Reihe nehmen sehr geschwinde ab, so, daß man nur wenige braucht, um die Wurzel ganz genau zu bekommen.

§. 548.

Wenn die gegebene Zahl N so beschaffen ist, daß man keine ganze Zahl finden kann, welche ihr sehr nahe komt, und aus der sich die Wurzel von der Ordnung n genau ziehen läst, so kann man vor a auch eine gebrochne Zahl nehmen, die der

Zahl

Zahl N sehr nahe komt, und aus der sich die Wurzel von der Ordnung n ziehen läst. Gesetzt z. E. man wollte die Quadratwurzel aus der Zahl 2 haben. Man nehme also $a = 1,96$, so wird $u = 0,04$, folglich da $\sqrt{1,96} = 1,4$ ist, so wird

$$\sqrt{2} = 1,4 \times \left(1 + \frac{1.(0,04)}{2.2} + \frac{1.3.(0,04)^2}{2.4.2^2} + \frac{1.3.5.(0,04)^3}{2.4.6.2^3} + \text{&c.}\right)$$

Wenn man nun die Glieder gehörig auseinander wickelt, so bekomt man $\sqrt{2} = 1,41421356237330$.

§. 449.

Diese Beyspiele werden hinreichend seyn, um den Nutzen zu zeigen, welcher in verschiedenen praktischen Fällen aus dem Gebrauch der Binomial-Formel erwächst, um sich den wahren Wurzeln gegebener Zahlen so stark zu nähern, als es nur verlangt werden kann. Die Uebung entdeckt noch verschiedene Vortheile, welche, wenn sie mit diesen verbunden werden, mit noch mehrerer Bequemlichkeit zum Zwecke führen. Nachdem wir diese kleine Untersuchung der Gleichungen angestellt haben, in denen lauter gleiche Wurzeln befindlich sind, so wollen wir nunmehro weiter gehen, und sehen, was uns die Betrachtungen über die Folge der Zeichen in einer Gleichung in Absicht auf die Wurzeln der Gleichungen werden entdecken lassen.

§. 550.

Es ist bereits oben (§. 526.) angemerkt worden, daß die Zeichen der Glieder beständig abwech-

seln, wenn alle Wurzeln wirklich und positiv sind, und daß diese Zeichen beständig einerley sind, oder daß alle Glieder das Zeichen + vor sich haben, wenn alle Wurzeln wirkliche negative Größen sind.

Wenn hingegen einige Wurzeln positiv, die andern aber negativ, alle aber wirkliche Größen sind, so kann die Frage entstehen, wie die Zeichen der Glieder in diesem Falle beschaffen seyn werden? Dieses wird am besten entschieden werden können, wenn man die Entstehung der Gleichungen durch die Multiplication etwas genauer untersucht.

§. 551.

In dieser Absicht nehme man nach gefallen eine gewisse Gleichung an, und multiplicire dieselbe erstlich durch eine einfache Gleichung, in der die Wurzel negativ ist, als

$4x^5 + 3x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 26x - 160 = 0$
$x + 5 = 0$

$4x^6 + 3x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 26x^2 - 160x$ (A)
$+20x^5 + 15x^4 - 35x^3 - 25x^2 + 130x - 800$ (B)

$4x^6 + 23x^5 \ldots\ldots\ldots + x^2 - 30x$
$+ 8x^4 - 40x^3 \ldots\ldots - 800$

Wenn wir nun untersuchen, wie die neue Gleichung hervorgebracht wird, so wird man gleich zweyerley gewahr.

Erstlich: Werden durch die Multiplication zwey Reihen A und B hervorgebracht, welche in Ansehung

hung der Zeichen, welche die Glieder vor sich haben, vollkommen einerley sind.

Zweitens: Ist die unterste Reihe B um eine Stelle weiter rechter Hand fortgerückt worden, und dahero ist das Zeichen eines jeden Gliedes in der untersten Reihe B einerley mit dem Zeichen des Gliedes in der obersten Reihe A, welches zunächst linker Hand in derselben stehet. So ist z. E. das Zeichen des Gliedes $130x$ in der untersten Reihe einerley mit dem Zeichen des Gliedes $26x^2$ in der obersten Reihe.

§. 552.

Man multiplicire hingegen eine Gleichung mit einer Einfachen, deren Wurzel positiv ist, als

$x^5 + 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 12x + 13 = 0$
$x - 2$

$x^6 + 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 13x$ (A)
$-2x^5 - 6x^4 - 10x^3 + 8x^2 + 12x - 26$ (B)

$x^6 + x^5 \ldots\ldots\ldots - 4x^2 + 25x$
$- x^4 - 14x^3 \ldots\ldots\ldots - 26$

So werden hier wieder zwey Reihen hervorgebracht, davon in einer jeden gleich viel Glieder sind. Die Zeichen der Glieder in der untersten Reihe (B) sind aber den Zeichen der Glieder in der obersten Reihe (A) dergestalt entgegen gesetzt, daß das Zeichen eines jeden Gliedes in der untersten Reihe (B) dem Zeichen des nächsten Gliedes linker Hand in der obersten Reihe (A) entgegen gesetzt ist. Z. E. das

Glied $10x^3$ in der untersten Reihe hat das Zeichen — vor sich, und das Glied $5x^4$ in der obersten Reihe das Zeichen + und beyde Zeichen sind einander gerade entgegen gesetzt.

§. 553.

Wenn man nun die Zeichen der Gleichung bestimmen will, welche durch diese Multiplication entsteht, so muß man die Coefficienten der Glieder in beyden Reihen untersuchen, in denen einerley Dignität von x vorkomt, und die hier übereinander geschrieben stehen, und dieselben nach den bekannten Regeln der algebraischen Addition zusammen rechnen. Dabey fängt man bey dem ersten Gliede der obersten Reihe (A) an, nachdem man wie in den vorigen Exempeln beyde Reihen nach der höchsten Dignität von x geordnet, und welche hier x^6 ist. Nun gehet man in der Bestimmung der Zeichen der neuen Gleichung immer weiter fort, und bleibt so lange bey den Zeichen der Glieder in der obersten Reihe (A) bis man an zwey Glieder komt, die entgegen gesetzte Zeichen haben, und von denen der Coefficient des Gliedes in der untersten Reihe (B) größer ist, als der Coefficient des darüber stehenden Gliedes in der obersten Reihe (A), alsdenn bekomt das Glied in der neuen Gleichung das Zeichen des Coefficienten in der zweiten Reihe (B). Z. E. in dem ersten Exempel blieb man so lange bey den Zeichen der obersten Reihe, bis man an die Glieder — $7x^4$ kann, und alsdenn bekomt

+ $15x^4$

das

das Glied $+ 8x^4$ in der neuen Gleichung das Zeichen $+$ des Gliedes $15x^4$ in der zweiten Reihe (B). Gehet man nun weiter fort, so ist offenbar, daß die Glieder in der neuen Gleichung, so lange die Zeichen der Glieder in der untersten Reihe (B) bekommen, bis man wieder an zwey Glieder komt, die so beschaffen sind, daß der Coefficient des Gliedes in der obersten Reihe (A) nicht allein an und vor sich größer ist, als das Coefficient des darunter stehenden Gliedes in der untersten Reihe (B), sondern auch entgegen gesetzte Zeichen haben. In diesem Falle bekomt das Glied der neuen Gleichuug wieder das Zeichen in der obersten Reihe (A). So z. E. kam man aus der untersten Reihe in dem ersten Exempel §. 551. bey den Gliedern $+ 26x^2$ wieder in die Zeichen der obersten $- 25x^2$ Reihe (A) und das Glied in der neuen Gleichung war $+ x^2$. Es ist offenbar, daß man auf eben die Art wieder so fort geht, und daß man zuweilen bald von dem Zeichen der obersten Reihe zu dem Zeichen der untersten Reihe, und umgekehrt übergehen muß. Endlich aber muß man doch bey dem Zeichen des letzten Gliedes in der untersten Reihe stehen bleiben, weil über demselben kein Glied in der obersten Reihe stehet, und folglich ist das Zeichen, welches das letzte Glied rechter Hand in der neuen Gleichung vor sich hat, einerley mit dem Zeichen des letzten Gliedes rechter Hand in der untersten Reihe B.

§. 554.

§. 554.

Um dieses desto deutlicher zu machen, sind die Glieder der neuen Gleichung, welche durch die Multiplication entstanden, dergestalt geschrieben worden, daß in der obersten Reihe alle die Glieder stehen, welche ihre Zeichen aus der obersten Reihe A, und und in der untersten diejenigen Glieder, deren Zeichen aus den Gliedern der untersten Reihe B bestimt werden. Da nun der Uebergang wechselsweise aus der Reihe A in die Reihe B geschehen kann, so folgt, daß man doch einmahl öfter auf die unterste Reihe B herab gehet, als aus der Reihe B in die Reihe A. Zeigt man also durch m an, wie oft man aus der untersten Reihe B in die oberste A gegangen, so wird $m + 1$ anzeigen, wie oft man aus der obersten Reihe in die Unterste gegangen.

§. 555.

Weil man aus keiner Reihe zu die andere eher übergehen kann, als wenn die Glieder, in denen einerley Dignität von x vorkomt, entgegen gesetzte Zeichen vor sich haben, so folgt daraus, daß die Zeichen der Glieder bey denen der Uebergang geschehen soll, folgendergestalt beschaffen seyn müssen, wenn eine Gleichung durch eine einfache multiplicirt wird, deren Wurzel negativ ist,

Fig. I.	Fig. II.
$+A \quad -C$	$+A \quad -C$
$+D \quad +B$	$-D \quad +B$
oder	oder
$-A \quad +C$	$-A \quad +C$
$-D \quad -B$	$+D \quad -B$

Ge-

Gesetzt nun, man solte von dem Zeichen des Gliedes A in der obersten Reihe zu dem Zeichen des Gliedes B in der untersten Reihe übergehen.

Weil voraus gesetzt wird, daß die Gleichung durch eine einfache Gleichung multiplicirt worden, deren Wurzel negativ ist, und also die beyden Glieder des Multiplicators positiv sind, oder das Zeichen + vor sich haben, so muß auch das Zeichen des Gliedes B einerley mit dem Zeichen des Gliedes A seyn; allein das Zeichen des Gliedes C muß dem Zeichen des Gliedes A entgegen gesetzt seyn, weil es dem Zeichen des Gliedes B entgegen gesetzt ist. Hingegen können die Zeichen der Glieder D und B entweder einerley oder verschieden seyn.

§. 556.

Wenn man also von dem Zeichen der obersten Reihe zu dem Zeichen in der untersten Reihe übergehet, so wird die Folge entgegengesetzter Zeichen, welche in der durch die Multiplication entstandenen Gleichung kommen würde, wenn man die Zeichen der obersten Reihe beybehielte, in eine Folge gleicher Zeichen verwandelt, und es wird aus + — die Folge + + und aus — + die Folge — —

§. 557.

Nachdem man z. E. in der Gleichung §. 551. an die Glieder $+ 3x^5 - 7x^4$ gekommen war,

$$- 20x^3 + 15x^4$$

so wären in der multiplicirten Gleichung die Zeichen der aufeinander folgenden Glieder $23x^5 \ldots$

$8x^4$

$8x^4$, wenn man die Zeichen der obersten Gleichung (A) hätte behalten können, + — gewesen; allein da man $7x^4$ von $15x^4$ subtrahiren muste, so wurden die 8 Zeichen der Glieder in der neuen Gleichung + + nemlich + $23x^5$ + $8x^4$.

§. 558.

Soll man aber aus der untersten Reihe von dem Zeichen des Gliedes D zu dem Zeichen des Gliedes C in der obersten Reihe gehen, so wird die Folge gleicher Zeichen in der untersten Reihe in die Folge entgegengesetzter Zeichen, verwandelt, und aus + + wird + — und aus — — wird — + wird Fig. 1. (§. 555.) Allein die Folge entgegengesetzter Zeichen in der untersten Reihe wird in einer Folge gleicher Zeichen verwandelt, und aus — + wird — — und aus + — wird + + wie Fig. 11. (§. 555.)

Nachdem man z. E. in der Gleichung §. 551. bey die Glieder — $5x^3$ + $26x^2$ gekommen
— $35x^3$ — $25x^2$
war, so konnte man in der durch die Multiplication entstandenen Gleichung nicht bey dem Zeichen des Gliedes $25x^2$ bleiben, sondern man muste zu dem Zeichen des Gliedes $26x^2$ in der obersten Reihe übergehen, und die Zeichen der Glieder in der neuen Gleichung waren — + anstatt daß sie würden — — gewesen seyn, wenn man nicht herauf gegangen wäre.

§. 559.

§. 559.

Wenn man aber eine gewisse Gleichung durch eine einfache multiplicirt, deren Wurzel positiv ist, so kann die Folge der Zeichen bey den Gliedern wo der Uebergang aus der einen Reihe in der andern geschehen muß, nur eine von folgenden seyn:

Fig. III.		Fig. IV.	
+ A	+ C	+ A	+ C
− D	− B	+ D	− B
oder		oder	
− A	− C	− A	− C
+ D	+ B	− D	+ B

Nach der Natur dieser Multiplication ist also das Zeichen des Gliedes B dem Zeichen des Gliedes A entgegen gesetzt, folglich da von A zu B oder D zu C über gegangen werden soll, so muß das Zeichen des Gliedes C dem Zeichen des Gliedes B entgegen gesetzt, folglich einerley mit dem Zeichen des Gliedes A seyn. Allein die Zeichen der Glieder D und B können entweder einerley oder verschieden seyn.

§. 560.

So oft man nun hier herabgehet, so wird die Folge gleicher Zeichen in die Folge entgegengesetzter Zeichen verwandelt, und aus + + wird + − und aus − − wird − + in allen beyden Figuren. (§. 559.) Geht man aber aufwärts, und von dem Zeichen des Gliedes D in der untersten Reihe, zu dem Zeichen des Gliedes C in der obersten Reihe über, so wird die Folge gleicher Zeichen auch in die Folge entgegengesetzter Zeichen verwandelt, und aus + + wird + − und aus − − wird

wird — + wie Fig. III. Hingegen wird die Folge entgegengesetzter Zeichen in die Folge gleicher Zeichen verwandelt, und aus + — wird + + und aus — + wird — — wie Fig. IV.

§. 561.

Wenn man nun alles dieses zusammen nimt, so folgt daraus

1) So oft von der obersten Reihe in die unterste gegangen wird, so oft wird auch die Folge der Zeichen in die entgegengesetzte Folge verwandelt, und aus + + wird + — und aus — — wird — +, hingegen aus + — wird + + und aus — + wird — —, es mag die gegebene Gleichung durch eine einfache Gleichung multiplicirt werden, deren Wurzel positiv oder negativ ist.

2) Eben dieses findet auch statt, wenn von der untersten Reihe zu die oberste herauf gegangen wird, und es verwandelt sich die Folge der Zeichen + + in + — und der Zeichen — — in —+, desgleichen die Folge der Zeichen +— in + + und der Zeichen — + in — —

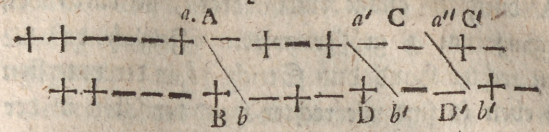
§. 562.

Wenn man dahero eine gewisse Gleichung durch eine andre einfache multiplicirt, deren Wurzel negativ ist, so entstehen daraus zwey Reihen, in denen die Folgen der Zeichen der Glieder vollkommen einerley sind. (§. 551.) Es sey also

+ + — — — + — + — + — — + —

die

die Folge der Zeichen in der Gleichung, welche multiplicirt wird, so entstehen durch die Multiplication diese beyde Reihen



Wenn nun in der obersten Reihe die Folgen + + und — — so oft vorkommen, als die Zahl n Einheiten hat, so sind auch eben soviel dergleichen Folgen in der untersten Reihe. Ziehet man durch diese beyden Reihen eine schrege Linie $a\,b$, zwischen zwey aufeinander folgende Glieder in der obersten und untersten Reihe, so ist die Folge der Zeichen auf beyden Seiten diese gerade Linie in beyden Reihen vollkommen einerley.

Gesetzt also, die Folge gleicher Zeichen bis an $a\,b$ wäre f in der obersten Reihe, so ist sie auch f in der untersten Reihe; und wenn sie g bis an $a'\,b'$ in der obersten Reihe ist, so ist sie auch g in der untersten Reihe; und wenn h die Folge gleicher Zeichen zwischen beyden Linien $a\,b$ und $a'\,b'$ in der obersten Reihe ist, so ist sie auch h zwischen diesen Linien in der untersten Reihe.

§. 563.

Gesetzt nun, man ist bey der Bestimmung der Zeichen der Glieder in der durch die Multiplication entstandenen Gleichung in der obersten Reihe geblieben, und bis an A gekommen, daselbst aber müste zu dem Zeichen B in der untersten Reihe über-

gegangen werden, so ist offenbar, daß, wenn die Folge gleicher Zeichen in der neuen Gleichung bis an A durch n ausgedrückt worden, sie durch den Uebergang um 1 größer wird. Folglich da die Folgen rechter Hand dem Strich ab in der untersten Reihe eben so sind wie rechter Hand demselben in der obersten Reihe, so wird durch diesen Uebergang, wenn gar nicht wieder in die oberste Reihe gegangen wird, die Anzahl der Folgen gleicher Zeichen in der neuen Gleichung nothwendig um 1 größer, als sie in derjenigen ist, welche multiplicirt worden.

Gesetzt aber, man komt an Glieder, wo man wieder aus der untersten Reihe in die oberste gehen, und z. E. von D nach C hinauf steigen muß, so sind dabey zwey Fälle möglich: Entweder haben die beyde Glieder linker Hand dem Strich ab in der untersten Reihe einerley Zeichen, oder verschiedene.

Im zweiten Falle, als bey D, C wird durch das Aufsteigen die Anzahl der Folgen der gleichen Zeichen, die bis an ab in der untersten Reihe geht, wieder um 1 vermehret.

Im ersten Falle, als bey D′, C′ wird dieselbe um 1 vermindert.

Uebrigens bleibt die Folge rechter Hand dem Strich wieder eben so wie in der multiplicirten Gleichung, so lange man nicht wieder herunter geht.

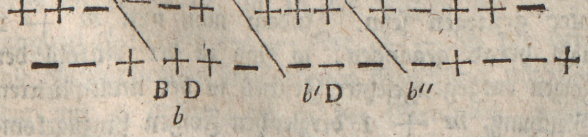
§. 564.

Hieraus folgt also, daß, wenn man wie in dem ersten Falle allezeit herauf geht, die Folge gleicher

cher Zeichen, welche durch das Absteigen hinzu gekommen, wieder durch das Aufsteigen aufgehoben wird. Wenn man nun *m*mahl auf diese Art herauf gestiegen, so muß man $m + 1$ mahl herunter gegangen seyn. (§. 554.) Da nun durch jeden Uebergang aus der obersten Reihe in die unterste eine Folge gleicher Zeichen zu der Anzahl derselben hinzu komt, welche in der multiplicirten Gleichung ist, so kommen zu dieser Anzahl $m + 1$ Folgen gleicher Zeichen hinzu. Nun wird aber *m*mahl hinauf gestiegen, und es wird vorausgesetzt, daß durch jeden Uebergang aus der untersten Reihe in die oberste, eine Folge gleicher Zeichen wieder aufgehoben, oder in die Folge entgegengesetzter Zeichen verwandelt wird. Hieraus folgt also, daß $n + 1$ die Anzahl der Folgen gleicher Zeichen in der durch die Multiplication entstandenen Gleichung seyn muß, wenn *n* die Anzahl derselben in derjenigen Gleichung ist, welche multiplicirt worden.

§. 565.

Wenn man aber eine gewisse Gleichung durch eine andre einfache multiplicirt, deren Wurzel positiv ist, so entstehen zwey Reihen, die einander in Ansehung der Zeichen der Glieder gerade entgegen gesetzt sind, als



Indessen ist in beyden Reihen die Anzahl der Fol-

gen gleicher Zeichen und auch der ungleichen Zeichen gleich groß, und wenn man wie vorhin zwischen die Glieder, die Linien *ab* schreg durchzieht so ist die Anzahl der Folgen der ungleichen Zeichen auf beyden Seiten dieser Linien und zwischen denselben in beyden Reihen gleich groß.

So oft man nun absteigt, so wird die Folge gleicher Zeichen in eine Folge entgegengesetzter Zeichen verwandelt, und es komt also jedesmahl zu der Anzahl der Folgen ungleicher Zeichen eine neue Folge hinzu, als bey A, B.

Geht man aber aus der untersten Reihe in die oberste, so sind wieder dabey zwey Fälle. Die beyden Glieder, welche in der untersten Reihe linker Hand dem Strich *ab* stehen, haben entweder gleiche oder entgegengesetzte Zeichen vor sich.

Im ersten Falle wird, wie bey D′, C′, die Folge ungleicher Zeichen durch das aufsteigen in eine Folge gleicher Zeichen verwandelt.

Im zweiten Falle aber als bey D, C, wird wieder eine Folge gleicher Zeichen in eine Folge entgegengesetzter Zeichen verwandelt.

§. 566.

Gesetzt nun, man ist *m*mahl, wie im ersten Falle, herauf gestiegen, so muß man $m + 1$mahl herunter gestiegen seyn. Indem man nun $m + 1$ mahl herab gegangen, so sind zu der Anzahl der Folgen entgegengesetzter Zeichen in der multiplicirten Gleichung, $m + 1$ dergleichen Folgen hinzugekommen,

men, indem man aber *m* mahl herauf gegangen, so sind wieder dadurch von dieser Anzahl, *m* Folgen ungleicher Zeichen aufgehoben worden.

Ist also *n* die Anzahl ungleicher Zeichen in der multiplicirten Gleichung, so ist $n + 1$ nothwendig die Anzahl der Folgen entgegengesetzter Zeichen in der neuen Gleichung, welche durch die Multiplication entstanden.

§. 467.

Wäre man hingegen in beyden Fällen auf die andre Art hinauf gegangen, so konnte die Anzahl der Folgen gleicher Zeichen im ersten Fall, und der ungleichen Zeichen im zweiten Fall, in der durch die Multiplication entstandenen Gleichung größer seyn, als $n + 1$, es ist aber unmöglich, daß sie kleiner seyn kann.

§. 468.

Wenn also eine Gleichung durch eine einfache multiplicirt wird, deren Wurzel negativ ist, und also dadurch eine neue Gleichung entstehr, so wird in dieser, die Anzahl der Folgen gleicher Zeichen $+ +$ oder $- -$ zum wenigsten um 1 größer seyn, als die Anzahl dieser Folgen in der Gleichung ist, welche multiplicirt worden. Wird hingegen eine Gleichung durch eine andre einfache multiplicirt, deren Wurzel positiv ist, so ist die Anzahl der Folgen ungleicher Zeichen $- +$ oder $+ -$ in der durch die Multiplication entstandenen Gleichung nothwendig um 1 größer, als in der Gleichung, welche multiplicirt worden. Hieraus folgt also, daß die

Anzahl der negativen Wurzeln in einer Gleichung niemals größer ist, als die Anzahl der Folgen gleicher Zeichen, und die Anzahl der Folgen entgegengesetzter Zeichen niemals größer ist, als die Anzahl der positiven Wurzeln.

§. 569.

Alles das, was hier gesagt worden, muß nur blos von den wirklichen Wurzeln der Gleichungen verstanden, keinesweges aber auch auf die unmöglichen, welche in einer Gleichung seyn können, ausgedehnet werden. Aus dem vorigen kann man nun schon einige Kennzeichen hernehmen, woraus man schließen kann, daß unmögliche Wurzeln in einer Gleichung sind. Denn wenn die Zeichen der Glieder alle einerley sind, so müssen alle Wurzeln derselben negativ seyn. Folglich wenn man weiß, es sind nicht alle negativ, sondern nur eine gewisse Anzahl, so sind die andern alle unmögliche Wurzeln; weil wenigstens eine einzige Folge entgegengesetzter Zeichen in der Gleichung vorkommen müste, wenn positive Wurzeln darinnen wären.

Eben so sind in der Gleichung lauter positive Wurzeln, wenn die Zeichen der Glieder beständig abwechseln, und in der ganzen Gleichung keine einzige Folge gleicher Zeichen vorkomt. Denn wenn eine negative Wurzel darin wäre, so müste wenigstens eine Folge gleicher Zeichen darinnen vorkommen. Weiß man also zuverläßig, daß nur eine bestimte Anzahl positiver Wurzeln in der Gleichung ist, so sind die andern alle unmögliche Wurzeln.

§. 570.

§. 570.

Lehrsatz.

Wenn eine Gleichung lauter wirkliche Wurzeln hat, so ist die Anzahl der Folgen entgegengesetzter Zeichen der Anzahl der positiven; und die Anzahl der Folgen gleicher Zeichen, der Anzahl der negativen Wurzeln in derselben gleich.

§. 571.

Beweis.

Es sey N die Anzahl der negativen Wurzeln der Gleichung und n die Anzahl der Folgen der Zeichen $+ +$ oder $- -$ in eben dieser Gleichung: M sey die Anzahl der positiven Wurzeln der Gleichung und m die Anzahl der Folgen $+ -$ oder $- +$, so ist $n + m = N + M$ (§. 524.) Es kann aber n nicht größer seyn, als N (§. 568.) und auch m nicht größer seyn, als M. (§. 568.) Nimt man aber n größer, als N an, so würde m kleiner seyn, als M. Da dieses aber nicht angeht, so kann n weder kleiner noch größer als N seyn, folglich muß $n = N$ und $m = N$ seyn.

§. 572.

1. Zusatz.

Wenn man also aus sichern Gründen weiß, daß die Anzahl der wirklichen negativen Wurzeln in einer Gleichung nicht so groß ist, als n, und daß auch die Anzahl der wirklichen positiven Wurzeln nicht so groß ist, als die Zahl m; so ist dieses ein

Beweiß, daß einige Wurzeln in der Gleichung unmöglich sind.

§. 573.

2. Zusatz.

Wenn die Gleichung nicht vollständig ist, so, daß ein Glied fehlet, so kann man in die Stelle dieses Gliedes $+ o$ oder $- o$ schreiben, denn durch keines von beyden wird die Gleichung verändert. Komt nun dadurch eine verschiedene Folge der Zeichen, so muß man daraus schließen, daß in der Gleichung unmögliche Wurzeln sind.

§. 574.

3. Zusatz.

Fehlen mehrere Glieder in der Gleichung, so kann man in die Stelle eines jeden $+ o$ oder $- o$ setzen. Zeigt nun die Verbindung der Zeichen bald diese bald eine andre Anzahl positiver und negativer Wurzeln, so muß daraus geschlossen werden, daß einige Wurzeln in der Gleichung unmögliche Wurzeln sind.

§. 575.

Anmerkung.

Es sey diese Gleichung

$$x^3 + px - q = o$$

in der das zweite Glied fehlet. Man setze also in die Stelle desselben einmal $+ o$, so wird

$$x^3 + ox^2 + px - q = o$$

die Zeichen folgen also so aufeinander

$$+ + + -$$

und

und es sind darinnen zwey Folgen gleicher Zeichen + + und eine Folge + — ungleicher Zeichen. Folglich müsten in dieser Gleichung zwey negative Wurzeln, und eine positive seyn.

Setzt man aber — o in die Stelle wo das Glied fehlt, so wird

$$x^3 - ox^2 + px - q = o$$

folglich da in dieser Gleichung drey Folgen verschiedener Zeichen sind, so müsten drey positive Wurzeln in derselben seyn. Nun solten aber zwey negative und eine positive darinnen seyn. Da dieses nicht zugleich seyn kann, so ist offenbar, daß darinnen unmögliche Wurzeln sind.

Eben so ist auch die Gleichung

$$x^3 + px + q = o$$

beschaffen.

§. 576.

In der Gleichung $x^3 \ldots\ldots + a = o$ fehlen zwey Glieder, setzt man nun in die fehlende Stellen + o oder — o, so entstehen vier Folgen der Zeichen:

+ + + +
+ − − +
+ + − +
+ − + −

Die ersten Zeichen zeigen an, daß drey negative Wurzeln darinnen seyn müssen, die übrigen aber geben andre Wurzeln an. Da nun in keiner Gleichung zugleich lauter positive und zugleich lauter negative seyn können, so folgt daraus, daß in dieser

Gleichung unmögliche Wurzeln seyn müßen. Eben so kann man sich überzeugen, daß in der Gleichung $x^3 - a = o$ unmögliche Wurzeln seyn müssen.

§. 577.

In der Gleichung $x^n - a^n = o$ sind ebenfalls unmögliche Wurzeln. Denn wenn man in die Stellen der fehlenden Glieder einmahl $+ o$ schreibt, so zeigt die Folge der Zeichen, daß $n - 1$ negative Wurzeln und eine positive darin sind. Schreibt man aber in die Stelle des fehlenden zweiten Gliedes $- o$ und in die Stellen der übrigen $+ o$, so zeigt alsdenn die Folge der Zeichen, daß $n - 3$ negative und 3 positive Wurzeln darinnen sind. Also müsten zugleicher Zeit $n - 1$ negative und auch $n - 3$ negative Wurzeln darinnen seyn. Dieses ist aber widersprechend, folglich sind in dieser Gleichung unmögliche Wurzeln.

§. 578.

Gesetzt, man hätte diese Gleichung $x^4 + px^3 + qx + r = o$, und eine andre $y^4 + ty - f = o$ und man wüste, daß entweder $x = -y$ oder $x = \frac{ay}{b}$, oder $x = \frac{c}{y}$, oder $x = y + a$, oder $x = y - a$ ist. Wo die Größen a, b, c ꝛc. wirkliche Größen sind, so ist offenbar, daß x allezeit unmöglich wird, so oft y unmöglich ist. Kann man also außer der gegebenen Gleichung eine solche Gleichung finden, in der x auf eine von den vorigen Arten von y abhängt, so ist offenbar, daß man nur den Werth von y wissen darf,

um

um den Werth von x zu bekommen. Man wird sich also um eine Methode bekümmern müssen, durch welche dieses bewerkstelliget werden kann.

§. 579.

Aufgabe.

Man soll eine gegebene Gleichung in welcher x die unbekannte Größe ist, in eine andre verwandeln, in der y die unbekannte Größe ist, dergestalt, daß wenn man y weiß, man auch den Werth von x bekommen kann.

§. 580.

Auflösung.

Man nehme nach Gefallen eine gewisse Gleichung an, in welcher x und y und andere bekannte Größen vorkommen. Weil man nun schon eine Gleichung hat, so kann man durch Hülfe der beyden die unbekannte Größe x wegschaffen, und man bekomt alsdenn eine neue Gleichung in der die andre unbekannte Größe y ist. Weiß man nun den Werth von y, so bekomt man durch die angenommene Gleichung den Werth von x.

§. 481.

Anmerkung.

Man muß indessen die neue Gleichung so einfach annehmen, als möglich, damit man nicht in größere Schwürigkeiten verfällt, als man vermeiden will. Dahero thut man wohl, wenn man

die

die neue Gleichung so annimt, daß man den Werth von y blos durch die Addition, Subtraction oder Multiplication und Division bekommen kann.

§. 582.

Exempel.

Es sey z. E. die gegebene Gleichung

$$x^3 - px^2 - qx + r = o$$

Man setze $x = \frac{my}{n}$, so wird die neue Gleichung

$$\frac{m^3y^3}{n^3} - \frac{pm^2y^2}{n^2} - \frac{qm \cdot y}{n} + r = o$$

und wenn man die Brüche wegschaft, oder durch n^3 multiplicirt, so wird

$$\frac{m^3}{}$$

$$y^3 - \frac{pny^2}{m} - \frac{qn^2y}{m^2} + \frac{rn^3}{m^3} = o$$

Könnte man nun den Werth von y bestimmen, so würde man auch x bestimmen können.

§. 583.

Durch diese Verwandlung, nemlich daß man in einer gegebenen Gleichung $\frac{my}{n}$ vor x setzet, kann man machen, daß der Coefficient eines gewissen Gliedes in der neuen Gleichung einer gegebenen Größe gleich wird. Z. E. wollte man haben, daß der Coefficient des zweiten Gliedes $= a$ seyn sollte, so müste $\frac{pm^2}{n^2} = a$ seyn. Folglich müste man $m = n\sqrt{\frac{a}{p}}$ annehmen.

Wäre

Wäre z. E. $p = 25$ und die vorige Gleichung

$$x^3 - 25x^2 - qx + r = 0$$

und in der neuen Gleichung sollte der Coefficient des zweiten Gliedes 16 seyn, so müste man $m = n\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4n}{5}$ annehmen, alsdenn wird $x = \frac{4y}{5}$, und die neue Gleichung

$$y^3 - 16y - \frac{16qy}{25} + \frac{64r}{125} = 0.$$

§. 484.

Wenn einige oder alle von den Coefficienten p, q, r ꝛc. Brüche sind, so kann man einige oder alle Coefficienten in der neuen Gleichung in solche Grösſen verwandeln, welche keine Brüche sind. Es sey z. E. folgende Gleichung

$$x^3 + \frac{ax^2}{b} + \frac{cx}{d} + \frac{e}{f} = 0$$

setzt man $x = \frac{my}{n}$, so bekomt man die Gleichung

$$y^3 + \frac{anby^2}{mb} + \frac{cn^2y}{m^2d} + \frac{en^3}{m^3f} = 0$$

Will man gar keine Brüche haben, so setze man $m = 1$ und $n = bdf$, so werden die Coefficienten

$$\frac{an}{b} = adf$$

$$\frac{cn^2}{d} = cb^2df^2$$

$$\frac{en^3}{f} = eb^3d^3f^2$$

seyn, welche keine Brüche sind.

§. 585.

Wenn einige von dem Coefficienten der gegebenen Gleichung irrational sind, so können dadurch öfters verschiedene und zuweilen alle rational gemacht werden, als in der Gleichung

$$x^3 - (a\sqrt{b})y^2 + cx + d = 0$$

welche nach der vorigen Art in diese verwandelt wird

$$y^3 - \frac{(a\sqrt{b})ny^2}{m} + \frac{cn^2}{m^2}y + \frac{dn^3}{m^3} = 0$$

man setze $m = \sqrt{b}$, so wird die Gleichung

$$y^3 - any^2 + \frac{cn^2}{d^2}y - \frac{dn^3}{b\sqrt{b}} = 0$$

und in dieser sind die Coefficienten von y rational.

§. 586.

2. Exempel.

Setzt man in einer gewissen Gleichung

$$x^4 - px^3 - qx^2 + rx - s = 0$$

die unbekannte Größe $x = \frac{a}{y}$, so entsteht die Gleichung

$$\frac{a^4}{y^4} - \frac{pa^3}{y^3} + \frac{qa^2}{y^2} + \frac{ra}{y} - t = 0$$

und wenn man durch y^4 multiplicirt

$$a^4 - pa^3y + qa^2y^2 + ray^3 - ty^4 = 0$$

oder wenn man durch t dividirt, und die Gleichung so schreibt, daß y^4 positiv wird

$$y^4 - \frac{ray^3}{t} - \frac{qa^2y^2}{t} + \frac{pa^3}{t} - \frac{a^4}{t} = 0$$

und wenn man $a = t$ nimt

$$y^4 - ry^3 - qty^2 + pt^2 - t^3 = 0$$

Wenn

Wenn man nun die Wurzeln dieser Gleichung weiß, so giebt die kleinste die gröste in der vorigen Gleichung, und umgekehrt.

§. 587.

3. Exempel.

Man setze in der Gleichung

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

die unbekannte Größe $x = y + f$, so wird

$$\begin{array}{rcccccc} x^3 & = & y^3 & + & 3fy^2 & + & 3f^2y + f^3 \\ -px^3 & = & & - & py^2 & - & 2pfy - pf^2 \\ +qx & = & & & & + & qy + qf \\ -r & = & & & & & -r \end{array}$$

Und in der hieraus entstandenen Gleichung

$$\begin{array}{rcl} y^3 + {}^3fy^4 + {}^3f^2y + f^3 & = & 0 \\ -py^2 - 2pfy - pf^2 & & \\ +qy + qf & & \\ -r & & \end{array}$$

ist eine jede Wurzel um f grösser als in der vorigen Gleichung, oder wenn man die Wurzeln dieser letzten Gleichung weiß, so muß man zu einer jeden Wurzel derselben die Größe f algebraisch hinzu setzen, um die Wurzeln der ersten Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r$ zu bekommen.

§. 588.

Durch diese Verwandlung kann man aus der neuen Gleichung ein Glied wegbringen, und in gewissen Fällen lassen sich mehrere wegschaffen. Will man z. E. das zweite Glied wegbringen, so setze man $3f - p = 0$, so wird $f = \frac{1}{3}p$. Folglich wenn man in der Gleichung $x^3 - px^2 + qx - r = 0$

$= o$ vor x die Größe $y - \frac{1}{3} p$ setzet, so bekomt man eine neue Gleichung, in der das zweite Glied nicht anzutreffen ist.

Setzt man $3f^2 - 2pf + q = o$, und bestimt aus dieser quadratischen Gleichung den Werth von f, welche hier $f = \frac{1}{3} p \mp \frac{1}{3} V(p^2 - 3q)$ ist, und setzt alsdenn in der ersten Gleichung $x = y + \frac{p \mp V(p^2 - 3q)}{3}$, so bekomt man eine neue Gleichung in der das dritte Glied fehlet.

Eben so kann man auch in der neuen Gleichung das vierte Glied wegschaffen, wenn man den Werth von f aus der Gleichung $f^3 - pf^2 + qf - r = o$ bestimmen kann.

§. 589.

Wenn in einer gegebenen Gleichung einige Glieder fehlen, so kann man sie auch auf eben diese Art wieder hinein bringen: Nemlich man kann eine neue Gleichung finden, in der kein einziges Glied fehlet. Z. E. man setze $x = y + f$ in der Gleichung $x^3 - a = o$, so wird die neue Gleichung $y^3 + 3fy^2 + 3f^2y + f^3 - a = o$ seyn, in welcher alle Glieder anzutreffen sind.

§. 590.

Auf diese Art kann man auch alle Gleichungen sie mögen von einem Grade seyn, von welchen sie wollen, in andre verwandeln, in denen das zweite Glied fehlet. So können die allgemeine Gleichungen vom vierten, fünften ꝛc.

$x^4 +$

$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = o$
$x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = o$
ꝛc. in einer von dieser Form
$y^4 + Py^2 + Qy + R = o$
$y^5 + Py^3 + Qy^2 + Ry + s = o$
ꝛc. verwandelt werden, wenn man $x = y \mp f$ setzet, nachdem es die Umstände erfordern, und alsdenn den Werth der Coefficienten P, Q, R in jeder neuen Gleichung bestimt.

§. 591.

Wenn in diesen neuen Gleichungen das zweite Glied weggeschaft wird, so kann man alsdenn aus der Folge der Zeichen in demselben, welche entstehen, wenn man in die Stelle des zweiten Gliedes $+ o$ und hernach $- o$ schreibt, öfters beurtheilen, ob darinnen unmögliche Wurzeln sind oder nicht. Und wenn welche darinnen sind, so sind auch in der gegebenen Gleichung unmögliche Wurzeln. Wenn man z. E. wissen wollte, ob in dieser Gleichung

$x^4 - 8x^3 + 32x^2 - x + 10 = o$

unmöglichr Wurzeln sind, so setze man $x = y + 2$, so entsteht dadurch diese neue Gleichung

$y^4 + 8y^2 + 93y + 88 = o.$

Setzt man in die Stelle des fehlenden Gliedes $+ o$ so folgen die Zeichen so aufeinander, $+ + + + +$ und also müsten in der Gleichung 4 negative Wurzeln seyn. Setzt man aber $- o$ in die Stelle des zweiten Gliedes, so folgen die Zeichen so aufeinander, $+ - + + +$ und es müsten nach dieser Folge nur zwey negative und zwey positive darinnen seyn. Da dieses nun widersprechend ist, so

sind in dieser Gleichung einige Wurzeln unmöglich, folglich sind auch in der gegebenen ersten Gleichung einige Wurzeln unmöglich. (§. 574.)

§. 592.

Man muß diese Verwandlungen der Gleichungen niemals unterlassen, so oft man bey der Auflösung der Aufgaben auf eine Gleichung von einem gewissen Grade komt; weil man zuweilen dadurch bestimmen kann, ob darinnen Fälle vorkommen, welche unmöglich mit den Bedingungen derselben bestehen können. Diese Verwandlungen verschaffen außerdem aber auch noch viele andre Vortheile, welche sich immer mehr und mehr entwickeln werden, wenn wir die Gleichungen näher werden kennen lernen. Es komt dabey aber alles darauf an, die Wurzeln derselben zu bestimmen, daß ist, die Verbindung anzuzeigen, welche zwischen der unbekannten Größe und den bekannten Größen in der Gleichung statt findet. Man hat dazu zwar Data genug und genau soviel, als erfordert werden; denn man hat soviel bekannte Coefficienten, als Wurzeln in der Gleichung sind. Dem allen ohngeachtet läst sich nichts finden, weil man beständig gleichsam in einem Kreis herumgeht, und am Ende auf eben die Gleichung wieder verfällt, welche man auflösen wolte. Wenn man z. E. die Wurzeln der Gleichung vom dritten Grade

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

finden wollte, so würde man, weil die Gleichung drey haben muß, dieselben y, u, z nennen.

Man

Man weiß nun, daß die Summe aller Wurzeln p ist, also hätte man die Gleichung

$$y + u + z = p.$$

Man weiß ferner, daß das Produckt aus zwey und zwey q ist, (§. 527.) folglich hätte man auch

$$yu + yz + uz = q.$$

Man weiß ferner, daß das Produckt aus allen dreyen $= r$ ist, (§. 527.) Daraus bekäme man die Gleichung $yuz = r$.

Da man nun zu drey unbekannten Größen drey Gleichungen hat, so solte man die Hofnung haben, jede besonders zu bestimmen, allein diese verschwindet, wenn man weiter geht; denn man findet nur folgende Gleichung

$$y^3 - py^2 + qy - r = o$$

und damit ist man eben soweit, als vorher. Eben so geht es bey den Gleichungen von den andern Graden.

§. 593.

Man sieht also, daß man noch andre Gründe nöthig hat, wenn man zu seinem Zwecke gelangen will. Es sind dieselben aber noch zur Zeit völlig unbekannt, und diese Materie ist noch bis jetzt den großen Analysten verborgen geblieben. Indessen wollen wir die Grenzen ausfindig zu machen suchen, zwischen denen die Wurzeln einer jeden Gleichung eingeschlossen sind, und diese werden uns in den mehresten Fällen im Stande setzen, die Wurzeln einer Gleichung entweder vollkommen, oder doch andre zu entdecken, welche denselben so nahe kommen, als es nur möglich ist.

§. 594.

Lehrsatz.

Wenn man in einer Gleichung, deren Glieder alle auf eine Seite gebracht worden, auf der andern Seite y vor o setzet; so bekomt man allezeit y, wenn man vor x eine bekannte Größe setzet. Wenn man nun der Größe x zwey Werthe giebt, welche wirkliche Größen bedeuten, übrigens positiv oder negativ sind, und y wird positiv, wenn man in der Gleichung vor x einen von den beyden Werthen setzet, negativ aber, wenn man vor x den andern Werth annimt, so hat die Gleichung zum wenigsten eine wirkliche Wurzel, und ihr Werth ist, zwischen den beyden angenommenen Werthen vor x, eingeschlossen.

§. 595.

Beweis.

Man nehme die algemeine Gleichung

$x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \gamma x^{m-3} \ldots\ldots \eta = y$

in welcher y vor o gesetzt worden, die Coefficienten α, β, γ ꝛc. aber sowohl positive als negative Grössen bedeuten können. Setzt man nun vor x einen gewissen Werth, so ist offenbar, daß die Größe y bestimt wird. Denn es kommen alsdenn auf der einen Seite lauter bekannte Größen.

Gesetzt, y wird $= +$ A, wenn man a vor x in der Gleichung setzet, und $= -$ B, wenn man $x = b$ annimt.

Da

Da nun die beyde Größen a und b nicht gleich sind, so kann man sich vorstellen, daß x von a bis b nach und nach zu- oder abnimt. Dadurch wird der Werth A, den y bekomt, wenn man $x = a$ setzet, beständig verändert, und nimt entweder ab oder zu, bis er endlich negativ, oder $= -$ B wird. Da nun aber der Werth von y, vor jeden Werth, den man dem x giebt, bestimt ist, so kann y von $+$ A nicht eher zu $-$ B übergehen, als bis dieselbe irgendwo $= o$ geworden, folglich muß zwischen a und b eine Größe seyn, die so beschaffen ist, daß, wenn sie vor x gesetzet wird, die ganze Gleichung

$$x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} \ldots . \eta = o$$

wird, weil y verschwindet. Dieses ist aber die wirkliche Wurzel der Gleichung.

§. 596.

Zusatz.

Wenn der Exponent m des ersten Gliedes in der Gleichung eine ungerade Zahl ist, so hat die Gleichung zum wenigsten eine wirkliche Wurzel. Denn wenn man x größer annimt, als die Größe $\eta \times$ Summe aller Coefficienten, nebst dem letzten Gliede η in der Gleichung, nemlich:

$$x > \eta(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon \ldots . \eta)$$

so wird

$$x^m > \eta(\alpha x^{m-1} + \beta x^{m-1} + \gamma x^{m-1} \ldots . \eta x^{m-1})$$

folglich ist um desto mehr

$$x^m > (\alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \gamma x^{m-4} \ldots . \eta)$$

Weil nun m eine ungerade Zahl ist, so wird das Glied x^m positiv, wenn x positiv, und größer, als die Größe $n \times$ durch die Summe aller Coefficienten angenommen wird; negativ aber, wenn x negativ, und ebenfalls größer, als die Größe $n \times$ durch die Summe aller Coefficienten, gesetzt wird. Gesetzt nun, alle Glieder der gegebenen Gleichung wären positiv, so wird doch im zweiten Falle die ganze Gleichung

$$x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} \ldots\ldots n = y$$

auf der einen Seite negativ, folglich auch y: wenn man aber x affirmativ nimt, so bleibt sie an und vor sich affirmativ. In diesem Falle hat also y zuverläßig einen positiven und einen negativen Werth.

Wären hingegen außer x^m auch alle übrige Glieder in dem ersten Theil der Gleichung negativ, so wird doch dieser Theil positiv, wenn man x positiv, und größer, als $n \times$ die Summe aller Coefficienten annimt, folglich ist auch y affirmativ, und da y ganz gewiß negativ ist, wenn x eben wieder so groß, aber negativ angenommen wird, so hat auch in diesem Falle y zwey verschiedene Werthe, einen positiven, wenn x positiv, und einen negativen, wenn x negativ ist.

Hieraus folgt also, daß die Gleichung nothwendig wenigstens eine wirkliche Wurzel haben muß.

§. 597.

2. Zusatz.

Wenn aber m eine gerade Zahl ist, und das Glied n ist negativ, so wird y eine negative Größe, wenn $x = o$ angenommen wird, und wenn man x grö-

x größer annimt, als $\eta \times$ die Summe aller Coefficienten, nebst η, so wird x^m größer, als alle übrige Größen, und also y positiv. Es ist also zwischen x größer, als $\alpha + \beta$ ꝛc. und $x = o$ eine Größe möglich, welche macht, daß die ganze Gleichung verschwindet, wenn sie vor x gesetzt wird. Es wird aber auch y positiv, wenn man x eben wieder so groß, aber negativ annimt, folglich ist auch zwischen o und $x > \eta \times -(\alpha + \beta + \gamma$ ꝛc. $- \eta)$ eine Größe, welche macht, daß y verschwindet, wenn sie in die Stelle vor x gesetzet wird. Wenn also m eine gerade Zahl, und η negativ ist, so hat die Gleichung

$$x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} \ldots\ldots \eta = o$$

wenigstens zwey Wirkliche Wurzeln.

§. 598.

3. Zusatz.

Wenn m wieder eine gerade Zahl, das Glied η aber positiv ist, so können in der Gleichung auch unmögliche Wurzeln seyn, weil y allezeit positiv bleiben kann, man mag x annehmen, wie man will. Z. E. in der Gleichung

$$x^8 + ax^6 + bx^4 + cx^2 + d = o$$

sind gewiß keine wirkliche Wurzeln, weil y niemals negativ seyn kann, man mag der Größe x einen Werth geben, was man vor einen will.

§. 599.

4. Zusatz.

Es sey $y = +A$ wenn $x = +a$

$y = -B$, $x = +b$

$y = +C$ wenn $x = +c$
$y = -D$. $x = +d$

so ist zwischen a und b, zwischen b und c, c und d eine Größe, welche die Gleichung in nichts verwandelt, wenn sie in der Stelle vor x gesetzt wird, folglich hat die Gleichung

$$x^m + \alpha x^{m-1} \ldots . \eta = o$$

drey wirkliche Wurzeln. Hieraus sieht man, daß diese Gleichung $m - n$ wirkliche Wurzeln hat, wenn die Größe y die man vor o setzt, $m - n$ mahl dergestalt abwechselt.

§. 600.

Erklärung.

Die Größen a und b die so beschaffen sind, daß eine gegebene Gleichung einmal positiv, und das andre mal negativ wird, wenn man sie nach und nach vor die unbekannte Größe x setzet, heißen die **Grenzen der Wurzeln** der Gleichung oder der Gleichung selbst. (Limites æquationis vel Radicum)

§. 601.

Anmerkung.

Es giebt verschiedene Methoden die Grenzen der Wurzeln zu finden, wenn alle Wurzeln derselben wirkliche oder reelle Größen sind. Die gewöhnliche beruhet auf folgende Gründe. Man hat gesehen (§. 526.) daß die Wurzeln einer Gleichung alle negativ sind, wenn alle Glieder das Zeichen + vor sich haben, und daß die Wurzeln eben dieser Gleichung alle positiv sind, wenn die Zeichen der Glieder beständig abwechseln, und das zweite Glied

nega-

negativ ist. (§. 526.) Setzt man nun in der Gleichung die unbekannte Größe $x = y + p$, so bekomt man eine neue Gleichung, in der eben so viel Wurzeln sind, als in der gegebenen. Sind nun alle Wurzeln dieser neuen Gleichung negativ, und man setzt eine Wurzel in der gegebenen Gleichung wäre positiv, so, daß $x = +a$, so wird $+a = -y + p$, also ist $a + y = p$, folglich p größer, als a, und da überhaupt $p = x + y$ in diesem Falle, so lange x positiv ist, so folgt daraus, daß p größer ist, als jede positive Wurzel in der ersten gegebenen Gleichung. Wenn man also in einer gegebenen Gleichung $x = y + p$ setzet, und in der neuen Gleichung p so bestimt, daß alle Glieder positiv werden, so ist diese dergestalt bestimte Größe p größer, als eine jede positive Wurzel in der gegebenen Gleichung.

§. 602.

Bestimt man hingegen in dieser neuen Gleichung p dergestalt, daß das zweite Glied negativ, das dritte positiv, das vierte wieder negativ, kurz, daß die Zeichen der Glieder beständig abwechseln, so ist eine jede Wurzel in der neuen Gleichung positiv. Nimt man nun die negativen Wurzeln der vorigen Gleichung, so ist $-x = y + p$, folglich $p = -x - y$, und demnach ist in diesem Falle p größer, als eine jede negative Wurzel der gegebenen Gleichung, weil y allezeit positiv, und x allezeit negativ ist.

§. 603.

Auf diese Art würde man die Grenzen sowohl der positiven, als negativen Wurzeln einer gegebenen Gleichung finden. Es sey z. E. folgende Gleichung gegeben

$$x^3 - x^2 - 97x + 385 = 0$$

setzt man $x = y + p$, so verwandelt sich dieselbe in diese

$$\begin{array}{rrrrr} x^3 = & y^3 & + 3py^2 & + 3p^2y & + p^3 \\ - x^2 = & & - y^2 & - 2py & - p^2 \\ - 97x = & & & - 97y & - 97p \\ + 385 & & & & + 385 \end{array}$$

Setzt man hier $p = 10$, so wird die neue Gleichung

$$y^3 + 29y^2 + 183y + 315 = 0$$

Hier sind alle Glieder positiv, folglich ist 10 größer, als eine jede positive Wurzel der ersten Gleichung.

Nimt man hingegen $p = -12$, so verwandelt sich die Gleichung in diese

$$y^3 - 37y + 359y - 323 = 0.$$

Aus der beständigen Abwechselung der Zeichen erhellet also, daß -12 größer ist, als jede negative Wurzel der zuerst gegebenen Gleichung.

§. 605.

Diese Methode beruhet in der Ausübung auf einen glücklichen Versuch, und man muß die Glieder der neuen Gleichung wohl untersuchen, bis man diejenige Größe findet, welche man vor p setzen muß, damit man seinen Entzweck erreicht. Die

zuerst

zuerst gefundene Grenzen muß man aber näher zu bringen suchen, indem man nach und nach vor p kleinere Zahlen setzet, so lange bis die Glieder der neuen Gleichung nicht mehr alle positiv werden, oder nicht mehr alle abwechseln. Also ist in dem ersten Falle 8 eine nähere Grenze, als 10. Im zweiten Fall findet man auch eine nähere 11, welche aber die Wurzel der ersten Gleichung selbst ist, weil das letzte Glied der neuen Gleichung verschwindet, und also $y = o$ wird

§. 605.

Wenn die Wurzeln einer gegebenen Gleichung alle rational sind, so müssen dieselben nothwendig zwischen die gefundene Grenzen enthalten seyn. Wenn man also alle gegebene Größen in einer Gleichung durch Zahlen ausdrückt, und man hat die Grenzen der Gleichung bestimt, so darf man nur in der gegebenen Gleichung alle ganze Zahlen, die zwischen diese bestimte Grenzen fallen, vor die unbekannte Größe setzen, so bekomt man darunter alle diejenigen Zahlen, welche wirkliche Wurzeln der Gleichung sind.

§. 606.

Wenn aber in einer Gleichung das erste Glied keinen Coefficienten hat, und die Coefficienten aller übrigen Glieder nebst dem letzten Gliede sind rationelle und ganze Größen, so ist keine einzige Wurzel der Gleichung ein rationeller Bruch, oder eine Größe, welche in Form eines rationellen Bruchs aus-

ausgedrückt ist. Man multiplicire eine gewisse Gleichung $mx^3 + px^2 + qx + r = o$, die so beschaffen ist, daß die Coefficienten keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, durch die einfache Gleichung $x + \frac{a}{b}$, wo der Bruch $\frac{a}{b}$ auf die kleinste Benennung gebracht worden: so wird daraus

$$mx^4 + px^3 + qx^2 + rx + \frac{amx^3}{b} + \frac{pax^2}{b} + \frac{qax}{b} + \frac{ra}{b} = a$$

Sollen nun $p + \frac{am}{b}$, $q + \frac{pa}{b}$, $r + \frac{qa}{b}$, $\frac{ra}{b}$ ganze Größen seyn, so müssen $\frac{am}{b}$, $\frac{ap}{b}$, $\frac{aq}{b}$, $\frac{an}{b}$ ganze Größen seyn. Da nun a und b die kleinste Glieder sind, durch welche sich der Bruch ausdrücken läßt, so folgt daraus, daß m, p, q, r sich durch b müssen dividiren lassen. Es ist aber vorausgesetzt worden, daß dieses nicht angeht. So oft also eine Gleichung durch eine andre einfache multiplicirt wird, deren Wurzel ein Bruch ist, so müssen auch in der neuen Gleichung einige Coefficienten Brüche seyn, und wenn dieselben ganze Größen seyn sollen, so muß das erste Glied der Gleichung durch das Product aus allen Nennern multiplicirt werden. Folglich wenn das erste Glied keinen Coefficienten hat, und die übrigen Coefficienten nebst dem letzten Gliede sind keine Brüche, so ist auch keine einige von den Wurzeln der Gleichung ein rationeller Bruch.

§. 607.

§. 607.

Ich sage ein rationeller Bruch. Denn es können einige Wurzeln einer Gleichung irrationelle Brüche seyn, und die Coefficienten doch ganze Größen. Um dieses zu beweisen, darf man nur diese beyde einfache Gleichungen

$$x - \left(\frac{a + \sqrt{(a^2 - 4b)}}{2}\right) = 0$$

$$x - \left(\frac{a - \sqrt{(b^2 - 4b)}}{2}\right) = 0$$

in einander multipliciren, so wird daraus diese Gleichung $x^2 - ax + b = 0$, in welcher alle Coefficienten rational und ganze Größen oder Zahlen sind.

§. 608.

Wenn imaginäre Wurzeln in der Gleichung sind, so kann man auf die vorige Art öfters wirkliche Grenzen finden, zwischen denen die Wurzeln eingeschlossen seyn sollten, da doch die Wurzeln nicht wirklich sind. Folglich kann man nicht schließen, daß eine Gleichung wirkliche Wurzeln hat, wenn man gleich zwey Grenzen bestimt hat, zwischen denen die wirkliche Wurzeln liegen sollten.

§. 609.

Man nehme z. E. folgende Gleichung

$$x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 10x + 50 = 0$$

setzt man $x = y + p$, so wird

$$x^4 =$$

$$
\begin{array}{rrrrrr}
x^4 = & y^4 & + 4py^3 & + 6p^2y^2 & + 4p^3y & + p^4 \\
+ 2x^3 & & + 2y^3 & + 6py^2 & + 6p^2y & + 2p^3 \\
- 9x^2 & & & - 9y^2 & - 18py & - 9p^2 \\
- 10x & & & & - 10y & - 10p \\
+ 50 & & & & & + 50
\end{array}
$$

Setzt man $p = 2$, so wird daraus die Gleichung

$$y^4 + 10y^3 + 27y^2 + 10y + 26 = 0$$

in der alle Glieder positiv sind, folglich müste 2 die Grenze der positiven Wurzeln seyn. Setzt man aber auch $p = -4$, so bekomt man

$$y^4 - 14y^3 + 63y^2 - 98y + 74 = 0$$

und da in dieser die Zeichen $- +$ abwechseln, so sollte nach der Regel die Grenze aller negativen Wurzeln -4 seyn. Die Gleichung hat aber keine wirkliche Wurzeln, sondern sie ist das Produckt aus den einfachen Gleichungen

$$x - 2 + \sqrt{-1} = 0$$
$$x - 2 - \sqrt{-1} = 0$$
$$x + 3 + \sqrt{-1} = 0$$
$$x + 3 - \sqrt{-1} = 0$$

deren Wurzeln alle imaginäre Größen sind.

§. 610.

Aus diesem Beispiele siehet man also, daß diese Methode, die Grenzen der Wurzeln zu finden, nicht ohne einige Einschränkung gebraucht werden kann. Inzwischen kann man sich derselben allezeit mit gutem Erfolge bedienen, sobald man über-

überzeugt ist, daß lauter wirkliche Wurzeln in einer Gleichung enthalten sind. Da aber auch öfters unmögliche Wurzeln in einer Gleichung seyn können, so wäre es kein geringer Vortheil, wenn man solche Kennzeichen angeben könte, durch die man in einer gegebenen Gleichung, sogleich die Anzahl der unmöglichen Wurzeln zu bestimmen, im Stande wäre. Es fehlet zwar nicht an Methoden, durch die man in verschiedenen Fällen, und bey besondern Arten von Gleichungen, die unmögliche Wurzeln entdecken kann. Indessen sind sie noch nicht vollständig und in vielen Fällen ganz unzulänglich. Mehrentheils komt man durch glückliche Versuche zurechte, wenn dieselbe durch eine gute Beurtheilung geleitet werden. Uebrigens enthält der §. 596. ꝛc. vorgetragene Lehrsatz die beste Methode die Wurzeln, welche in einer Gleichung sind, entweder genau oder doch so zu bestimmen, daß der Fehler, den man begeht, in keine Betrachtung kommen kann. Dahero verdienet dieselbe eine genauere Erläuterung, die ich dahero auch in folgender Aufgabe vornehmen will.

§. 611.

Aufgabe.

Die wirkliche Wurzeln einer gegebenen Gleichung zu finden, oder andre zu finden, welche denselben

selben so nahe kommen, daß dabey kein merklicher Fehler vorgeht.

§. 612.

Auflösung.

Man schreibe y in die Stelle von o, und gebe der andern unbekannten Größe x nach und nach verschiedene Werthe. Wird nun y positiv, wenn $x = \mp a$, und negativ, wenn $x = \mp b$, so ist zwischen $\mp a$ und $\mp b$ eine Wurzel der Gleichung enthalten. So gehe man weiter fort, und gebe der Größe x noch andre Werthe, bis man an eine Größe komt, die so beschaffen ist, daß, wenn man x größer, als dieselbe annimt, y entweder beständig positiv, oder beständig negativ bleibt, so wird man alle wirkliche Wurzeln der Gleichung entdecken. Der Beweis ist aus (§. 596 - 599) deutlich.

§. 613.

Anmerkung.

Die Coefficienten in einer gegebenen Gleichung sind nun entweder ganze Zahlen, oder Brüche, oder irrationelle Zahlen. Wenn es Brüche sind, so kann man die gegebene Gleichung leicht in eine andre verwandeln, in der die Coefficienten lauter ganze Zahlen sind. Sind die Coefficienten irrational, so muß man die Irrationalität zu heben suchen, wenn es angeht,

geht, oder die irrationellen Coefficienten in Brüche verwandeln, welche denselben so nahe kommen, als möglich, und hernach kann man, wenn man will, die ganze Gleichung wieder in eine andre verwandeln, in der die Coefficienten lauter ganze Zahlen sind. Wie dieses geschiehet, ist (§. 583.) gezeigt worden. Doch kann man auch ohne alle diese Vorbereitungen zurechte kommen.

§. 614.

Weil man aber in diesem Falle nach und nach verschiedene Zahlen von x setzen muß, um den Werth von y zu finden, so kann man sich die Arbeit auf folgende Art erleichtern: Wenn man aus einer gegebenen Gleichung

$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} \ldots M = y$

den Werth von y wissen will, wenn $x = a$, so addire man auf beyden Seiten den Coefficient A, so wird $x + A = a + A = a'$. Nun multiplicire man auf der einen Seite mit x, auf der andern mit a, so wird $x^2 + Ax = aa'$. Man addire zu dieser Gleichung den Coefficient B, so wird

$x^2 + Ax + B = aa' + B = a''$

multiplicire wieder die eine durch x, die andre durch a, so bekomt man

$x^3 + Ax^2 + Bx = aa''$.

Nun addire man den Coefficient C, so ist

$x^3 + Ax^2 + Bx + C = aa'' + C = a'''$

multiplicire wieder durch x und a, so wird

$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx = aa'''$

Man addire wieder D, und gehe so weiter, bis auf

der einen Seite die gegebene Gleichung heraus komt, so bekomt man auf der andern Seite den Werth von y, wenn $x = a$.

Es ist nun übrig, diese Aufgabe durch einige Beyspiele zu erläutern.

§. 615.

I. Exempel.

Gesetzt, man sollte die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 28x^2 - 61x + 4048 = o$$

finden. Setzt man y vor o, so wird dieselbe

$$x^3 - 28x^2 - 61x + 4048 = y.$$

Hieraus siehet man nun gleich, daß y positiv wird, wenn $x = o$, denn alsdenn wird $y + 4048$. Man wird ferner gewahr, daß man x schon ziemlich groß annehmen muß, wenn y negativ werden soll. Man setze also $x = 10$, so wird

$x - 28 = 10 - 28 = -18$
folglich $x^2 - 28x = \cdot\ \cdot = -180$
also $x^2 - 28x - 61 = \cdot\ \cdot = -241$
folglich $x^3 - 28x^2 - 61x = \cdot\ \cdot = -2410$
und $x^3 - 28x^2 - 61x + 4048 = 4048 - 2410 = y$
folglich $y = +1638$, und also noch positiv. Da nun dieser Werth von y noch sehr groß ist, so nehme man $x = 20$ an, so wird

$x - 28 = 20 - 8 = -8$
also $x^2 - 28x = \cdot\ \cdot = -160$
$x^2 - 28x - 61 = \cdot\ \cdot = -221$
folglich $x^3 - 28x^2 - 61x = \cdot\ \cdot = -4420$
und $x^3 - 28x^2 - 61x + 4048 = 4048 - 4420 = y$
folglich $y = -372$.

Da

Da also y positiv vor $x = 10$, und negativ vor $x = 20$, so liegt zwischen 10 und 20 eine Wurzel der Gleichung. Man setze also $x = 15$, so wird

$$x - 28 = -13$$
$$x^2 - 28x = -195$$
$$x^2 - 28x - 61 = -256$$
$$x^3 - 28x^2 - 61x = -3840$$

also $x^3 - 28x^2 - 61x + 4048 = 4048 - 3840 = y$ und $y = +208$. Da nun y positiv ist, aber doch schon ziemlich klein, so kann man daraus schliessen, daß x nicht viel größer, als 15 seyn kann, und in der That, wenn man $x = 16$ nimt, so wird dadurch $y = 0$, folglich ist 16 eine Wurzel von der Gleichung.

Um die übrige Wurzeln zu entdecken, setze man $x = 30$, so wird

$$x - 28 = +2$$
$$x^2 - 28x = +60$$
$$x^2 - 28x - 61 = -1$$

folglich $x^3 - 28x^2 - 61x = -30$
und $x^3 - 28x^2 - 61x + 4048 = 4048 - 30 = y$
da also y positiv, wenn $x = 20$, und negativ, wenn $x = 30$, so fällt auch zwischen 20 und 30 eine Wurzel der Gleichung. Man setze also $x = 25$, so wird

$$x - 28 = -3$$
$$x^2 - 28x = -75$$
$$x^2 - 28x - 61 = -136$$
$$x^3 - 28x^2 - 61x = -3400$$
$$x^3 - 28x^2 - 61x + 4048 = 4048 - 3400$$

folglich $y = +648$. Also fällt eine Wurzel

zwischen 20 und 25. Man setze also $x = +23$. so wird $y = 0$, folglich ist auch 23 eine Wurzel der Gleichung. Nun ist aber offenbar, daß y positiv bleibt, wenn man x größer, als 25 annimt. Folglich ist keine einzige Wurzel größer, als 23. Man kann sich die Mühe ersparen, um die dritte Wurzel zu suchen, denn man multiplicire die beyden Gleichungen $x - 23 = 0$, und $x - 16 = 0$, so bekomt man $x^2 - 39x + 368 = 0$. Durch diese Gleichung dividire man die erstere, so ist der Quotient $x + 11 = 0$, und also schliest man hieraus, daß -11 die dritte Wurzel der gegebenen Gleichung ist.

§. 616.

2. Exempel.

Man soll die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + x^2 - 166x + 660 = 0$$

finden. Man setze $x = 0$, so wird $y = 1660$. Nun sieht man den Augenblick, daß y positiv wird, wenn man $x = 10$ setzet, denn alsdenn wird $y = +100$, und wenn man x größer annimt, als 10, so wird y beständig positiv. Es folgt also hieraus, daß die positive Wurzeln zwischen 0 und 10 liegen müssen. Setzt man nun nach und nach

$x = 1$ so wird $y = +1002$
$x = 3$ . . $y = +72$
$x = 6$ . . $y = -84$
$x = 9$ . . $y = -24$
$x = 10$ . . $y = +100$

Aus der Folge dieser Zahlen siehet man nun, daß

eine

eine positive Wurzel zwischen 3 und 6 und die andre zwischen 9 und 10 liegt. Wir wollen diese letztere zuerst suchen. Zu dem Ende setze man $x = +9,5$, so wird man nach der gegebenen Methode finden

$$x + 1 = 10,5$$
$$x^2 + x = +99,75$$
$$x^2 + x - 166 = +66,25$$
$$x^3 + x^2 - 166x = -629,375$$
$$x^3 + x^2 - 166x + 660 = +30,625 = y$$

also ist dieser angenommene Werth von x zu groß. Man nehme also $x = 9,25$, so wird

$$x + 1 = 10,25$$
$$x^2 + x = +94,8125$$
$$x^2 + x - 166 = -71,1875$$
$$x^3 + x^2 - 166x = -648,484375$$
$$x^3 + x^2 - 166x + 660 = +11,515625 = y$$

Dieser Werth von y zeigt nun wieder an, daß auch dieser Werth von x zu groß angenommen werden. Es ist also die Wurzel zwischen 9 und 9,25 enthalten. Man nehme also $x = 9,23$, so wird $x + 1 = +10,23$

$$x^2 + x = +94,4229$$
$$x^2 + x - 166 = -71,5771$$
$$x^3 + x^2 - 166x = -660,656633$$

folglich $x^3 + x^2 - 166x + 660 = +0,656633 = y$. Hieraus folgt also, daß da $y = +11,5166$ ꝛc. wenn $x = 9,25$, und $y = -0,6566$, wenn $x = 9,23$ die Wurzel der Gleichung zwischen 9,23 und 9,25 enthalten seyn muß. Eben so

kann man die andre Wurzel finden, welche zwischen + 3 und + 6 eingeschlossen ist.

§. 617.

3. Exempel.

Man soll die Wurzeln der Gleichung
$x^4 - 20x^3 - 252x^2 + 6598x - 21313 = 0$
finden. Weil das letzte Glied in dieser Gleichung negativ ist, so siehet man daraus, daß die Gleichung wenigstens zwey wirkliche Wurzeln hat. Setzt man nun nach und nach

$x = 0$ so wird $y = -21313$
$x = 1$ " " $y = -14986$
$x = 3$ " " $y = -4246$
$x = 4$ " " $y = +23$
$x = 5$ " " $y = +3440$

Nimt man x größer an, als 5, so werden alle übrige Werthe, von y oder der Gleichung, positiv, folglich ist die positive Wurzel zwischen 3 und 4. Und da y sehr klein ist, wenn $x = 4$, so kann man hieraus sehr wahrscheinlich schließen, daß die Wurzel der Zahl 4 sehr nahe kommen muß. Man setze also $x = 3,75$, so wird

$x - 20 = -16,25$
$x^2 - 20x = -60,9375$
$x^2 - 20x - 252 = -372,9375$
$x^3 - 20x^2 - 252x = -1173,515625$
$x^3 - 20x^2 - 252x + 6598 = +5424,484375$
$x^4 - 20x^3 - 252x^2 + 6598x = +20321,8164025$
$x^4 - 20x^3 - 252x^2 + 6598x - 21313 = -991,1835975$

Da nun wieder y negativ, so ist dieser Werth zu klein.

klein. Setzt man also $x = 3,9$, so wird $y = -368,76508$. Also ist auch noch dieser Werth kleiner, als die verlangte Wurzel, indessen fehlt man nur ohngefehr um etliche $\frac{1}{100}$.

Setzt man hingegen $x = -5$, so wird

$x - 20 = -25$
$x^2 - 20x = +125$
$x^2 - 20x - 252 = -127$
$x^3 - 20x^2 - 252x = +635$
$x^3 - 20x^2 - 252x + 6598 = +7233$
$x^4 - 20x^3 - 252x^2 + 6598x = -36165$
$x^4 - 20x^3 - 282x^2 + 6298x - 21313 = -57478$

Nimt man aber $x = -10$, so wird $y = -82793$
$x = -20$ " " $= +11287$

Hieraus erhellet also, daß zwischen $x = -10$ und $x = -20$ auch eine negative Wurzel ist, und in der That, wenn man $x = -17$ setzet, so findet man $y = +3374$, setzt man aber $x = 16$, so wird $y = -43837$, folglich fällt die Wurzel zwischen 16 und 17, welcher man sich also immer mehr und mehr nähern kann.

§. 618.

Wenn man sich dem wahren Wurzeln immer mehr und mehr nähern und auf die vorhin gezeigte Art verfahren will, so wird die Rechnung ziemlich weitläuftig und verdrießlich. Man muß dahero diese Unbequemlichkeit zu heben suchen. Wenn man aber bemerkt, daß, wenn man die beyden nächsten Grenzen einer Wurzel in ganzen Zahlen gefunden hat,

und dieselben sind nur um 1 von einander unterschieden, die nähere Wurzel die nächste Grenze, nebst einen Bruch seyn muß, so komt es blos auf diese Aufgabe an.

§. 619.

Aufgabe.

Wenn man weiß, daß eine gewisse Zahl von der wahren Wurzel nur um einen kleinen Bruch unterschieden ist, sich der Wurzel so sehr zu nähern, als es nur angehen will.

§. 620.

Auflösung.

Es sey

$$x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \gamma x^{m-3} \ldots\ldots \eta = 0$$

eine gewisse Gleichung, von der man weiß, daß die eine Wurzel $a + z$ ist, so, daß a eine ganze Zahl, z aber ein kleiner Bruch ist. Wenn man nun vor x diesen Werth setzet, so muß die daraus entstehende Gleichung diese Form haben, wenn sie in umgekehrter Ordnung geschrieben wird,

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{&c.} \; Tz^m$$

Wenn nun A kleiner, als alle die folgenden Coefficienten, und A, B, C &c. nicht garzu merklich kleiner sind, als die folgenden, oder welches noch besser ist, wenn die Coefficienten von C an immer abnehmen, und z ist ein kleiner Bruch, z. E. etliche $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{100}$ &c. so werden z^2, z^3, z^4 &c. immer kleiner und kleiner, so, daß man, weil es

hier

hier nur auf eine Näherung ankomt, die Glieder in denen z^2, z^3, z^4 ꝛc. vorkommen, nach Befinden weglassen kann. Man kann also setzen

$$o = A + Bz$$
$$o = A + Bz + Cz^2$$
$$o = A + Bz + Cz^2 + Dz^3$$
$$o = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4$$

und so weiter, nachdem es die Beschaffenheit der Gleichung erfordert. Läst man nun schon die zweite Potenz von z weg, so bekomt man aus der ersten Gleichung $z = -\frac{A}{B}$. Dieser Werth von z, wenn er zu Anfange gesucht wird, kann nun noch ziemlich von der wahren Wurzel abweichen, doch ist diese $a + z$ schon der Wurzel näher, als vorhero. Aus den andern Gleichungen bekomt man

$$z = \frac{-A}{B + Cz}$$
$$z = \frac{-A}{B + Cz + Dz^2}$$
$$z = \frac{-A}{B + Cz + Dz^2 + Ez^3}$$

und so weiter. Wenn man nun in dieser Gleichung überall vor z in dem Nenner den gefundenen Werth $-\frac{A}{B}$ setzet, so ist offenbar, daß man dadurch einen Bruch findet, welcher mit der ganzen Zahl a zusammengenommen, eine Zahl ausmacht, welche der wahren Wurzel immer mehr und mehr näher komt.

Ist man aber damit noch nicht zufrieden, so setze man $z = b + u$ wo b der schon gefundene Werth von z ist, in der Gleichung

$$A + Bz \ldots\ldots T z^m = o,$$

so wird man daraus eine Gleichung bekommen, welche diese Form hat,

$$A' + B'u + C'u^2 + D'u^3 \ldots\ldots T'u^m = o$$

und aus dieser ziehet man wieder

$$u = \frac{-A'}{B'}$$

$$u = \frac{-A'}{B' + C'u}$$

$$u = \frac{-A'}{B' + C'u + D'u^2}$$

und so kann man weiter gehen, und die nächste Wurzel der Gleichung ist alsdenn $x = a + b + u + \mathfrak{x}$. Der Beweis dieser Auflösung fällt von selbst in die Augen.

§. 621.

1. Exempel.

Wir haben oben gefunden, daß die eine Wurzel der Gleichung

$$x^3 + x^2 - 166x + 660 = o$$

etwas über 9 ist. Man setze also $x = 9 + z$, so wird

$$x^3 = +729 + 243z + 27z^2 + z^3$$
$$x^2 = +81 + 18z + z^2$$
$$-166x = -1494 - 166z$$
$$+660 = +660$$

$$o = +24 + 95z + 28z^2 + z^3$$

setzt

setzt man nun $1052 - 24 = 0$, so wird $z = \frac{24}{1052}$, oder in Decimal-Brüchen $z = 0,252$.

Hieraus wird

$$z = \frac{+24}{95 + 28 \cdot 0,252 + 0,252} = \frac{24}{101,308}$$

oder $z = 0,234$. Ist man mit diesen Werth von z noch nicht zufrieden, so setze man

$z = 0,234 + u$, so wird

$z^3 = 0,0138329 + 0,164268u + 0,702u^2 + u^3$
$+28z^2 = 1,5331680 + 13,104000u + 28,000u^2$
$+95z = 22,2300000 + 95,000000u$
$-24 = -24,0000000$

$0 = -0,2129991 + 108,268268u + 28,702u^2 + u^3$

folglich $u = \frac{0,2199991}{108,268268} = 0,001957$,

folglich $z = 0,234 + 0,001957$,

oder $z = 0,235957$.

Hieraus wird also $x = 9 + z = 9,23597$, dieser Werth komt der Wurzel so nahe, als möglich.

§. 622.

2. Exempel.

Es sey die Gleichung

$$x^3 - 15x^2 + 63x - 50 = 0$$

In dieser ist eine Wurzel zwischen 1 und 2, welches man erfährt, wenn man nach der in dem (§. 614. 617.) gegebenen Methode verfährt. Man setze also $x = 1 + z$, so wird

$x^3 =$

$$
\begin{array}{rcl}
x^3 & = & 1 + 3z + 3z^2 + z^3 \\
-15x^2 & = & -15 - 30z - 15z^2 \\
+63x & = & 63 + 63z \\
-50 & = & -50 \\
\hline
0 & = & -1 + 36z - 12z^2 + z^3
\end{array}
$$

Man setze also $0 = -1 + 36z$, so wird $z = \frac{1}{36} = 0,027$. Setzt man nun diesen Werth vor z in der Gleichung $z = \frac{1}{36 - 12z + z^2}$ so wird

$$z = \frac{1}{36 - 12 \times 0,027 + (0,027)^2} = 0,02803$$

Um nun noch einen genauern Werth von z zu bekommen, setze man $z = 0,02803 + u$, so wird

$$
\begin{array}{rcl}
z^3 & = & 0,0000220226 + 0,002357u + 0,08409u^2 + u^3 \\
-12z^2 & = & -0,009428160 - 0,672720u - 12,00000u^2 \\
+36z & = & 1,009080000 + 36,000000u \\
-1 & = & -1 \\
\hline
0 & = & -0,000326\,1374 + 35,329637u - 11,9195u^2 + u^3
\end{array}
$$

Nimt man nun hiervon die beyden ersten Glieder, so wird $u = \frac{0,0003261374}{35,329637}$, und also $u = 0,0000923127$. Hieraus wird $z = 0,02803923127$, und $x = 1 + z = 1,02803923127$, eine Wurzel, welche der wahren so nahe komt, als möglich. Man kann sie auch noch weiter korrigiren, indem man $u = 0,0000092$ ꝛc. $+ t$ setzet, und wieder eben so verfährt.

§. 623.

Auf eine ähnliche Art verfährt man auch in andern Fällen. Man kann auch auf eben diese Art die

die Wurzel von einem gewissen Grade aus einer gegebenen Zahl finden. Gesetzt z. E. N wäre eine gegebene Zahl, und man solte daraus die Wurzel von der Ordnung n finden, so suche man erstlich diejenige ganze Zahl, welche eben die Zahl N beynahe hervor bringt, wenn sie zu der Dignität n erhoben wird. Es sey diese Zahl b, und um den Theil zu finden, welcher zu b hinzu gesetzt werden muß, damit die Wurzel noch genauer werde, setze man denselben $= z$, so daß $(b + z)^n = N$ wird, und erhebe $b + z$ auf die Dignität n, und setze alsdenn nur die beyden ersten Glieder $= N$, und bestimme z, wie vorhin, und korrigire es nach eben der Methode.

§. 624.

Soll man die Quadratwurzel aus der Zahl N ausziehen, so ist $(b + z)^2 = b^2 + 2bz + z^2 = N$, nimt man nun $b^2 + 2bz = N$, und läst das Glied z^2 weil es ziemlich klein ist, so wird $2bz = N - b^2$, und also $z = \frac{N - b^2}{2b}$.

Z. E. man wollte die Quadratwurzel aus der Zahl 15 finden, so ist 3 die nächste ganze Zahl. Man setze also $(3 + z)^2$ oder $9 + 6z + z^2 = 15$, so wird $6z = 15 - 9 = 6$, und $z = 1$, nun ist aber $6z + z^2 = 6$, folglich $z = \frac{6}{6 + z} = \frac{6}{6 + 1} = 0,82$. Man setze wieder $(3,82 + u)^2 = 15$, oder $14,5944 + 7,64u + u^2 = 15$, so wird

wird $u = \frac{15 - 14,5944}{7,64} = \frac{0,4056}{7,64}$, oder $u =$ 0,05309, folglich 3,82 + u = 3,87309, welche Zahl der wahren Wurzel ziemlich nahe komt.

§. 625.

Es sey b die ganze Zahl, welche der Cubickwurzel, oder der vierten, fünften, sechsten, siebenten ꝛc. Wurzel aus der Zahl N am nächsten komt, so, daß $(b+1)$ größer seyn würde, als die wahre Wurzel aus der Zahl N. Setzt man nun $b + z$ der wahren Wurzel sehr nahe, so wird der erste Werth, von z, vor die Cubickwurzel, oder

$$z = \frac{N - b^3}{3b^2}$$

2) Vor die vierte Wurzel

$$z = \frac{N - b^4}{4b^3}$$

3) Vor die fünfte Wurzel

$$z = \frac{N - b^5}{5b^4}$$

4) Vor die sechste Wurzel

$$z = \frac{N - b^6}{6b^5}$$

5) Vor die siebente Wurzel

$$z = \frac{N - b^7}{7b^6}$$

Und hieraus läst sich schließen, daß überhaupt vor die $n$te Wurzel aus N

$$z = \frac{N - b^n}{nb^{n-1}}$$

seyn

seyn muß. Es ist aber eigentlich

$$b^3 + 3b^2z + 3bz^2 + z^3 = N$$

nimt man dahero die ersten drey Glieder, so wird

$$z = \frac{N - b^3}{3b^2 + 3bz}$$

Setzt man nun in dem Nenner vor z den schon durch die erste Näherung gefundenen Werth von $z = \frac{N - b}{3b^2}$, so wird noch näher

$$z = \frac{N - b^3}{3b^2 + \frac{3bN - 3b^4}{3b^2}}$$

oder $z = \frac{(N - b^3)b}{3b^3 + N - b^3}$

Auf diese Art findet man vor die vierte Wurzel

$$z = \frac{4(N - b^4)b}{16b^4 + 6(N - b^4)}$$

Vor die fünfte Wurzel

$$z = \frac{5(N - b^5)b}{25b^5 + 10(N - b^5}$$

Vor die sechste Wurzel

$$z = \frac{66(N - b^6)}{36b^6 + 15(N - b^6}$$

Vor die siebente Wurzel

$$z = \frac{76(N - b^7)}{49b^7 + 21(N - b^7)}$$

und aus diesen regelmäßigen Fortgang läst sich ohne viele Mühe schließen, daß vor die *n*te Wurzel aus N die Zahl

$z =$

$$z = \frac{nb(N - b^n)}{n^2 b^n + \frac{n.n-1}{1.2}(N - b^n)}$$

seyn wird.

§. 626.

Diese Formeln sind vortreflich in der Ausübung zu gebrauchen. Z. E. man soll die Cubickwurzel aus 10 ziehen. Die Zahl 2 ist nun die ganze Zahl, deren Cubus der Zahl 10 am nächsten komt. Also hat man hier $b = 2$ und $10 = N$. Der Theil z der noch zu 2 hinzu gesetzt werden muß, wird nun durch diese Formel gefunden,

$z = \frac{(N - b^3)b}{3b^3 + N - b^3}$ oder $z = \frac{(10-8)\times 2}{24+10-8} = \frac{4}{26} = \frac{2}{13}$ oder $z = 0,1539$. Will man diese Zahl noch näher haben, so setze man vor b diese Zahl 2,1539, oder 2,154, und vor z, u, so wird $u = \frac{(0,006061736)2,154}{29,987776528} = 0,0004354$.

Folglich wird die noch nähere Cubickwurzel aus 10 diese, $2 + z + u = 2,1544354$ seyn, und diese kann man auf eben die Art noch genauer machen, wenn es nöthig ist.

§. 627.

Eben so findet man die vierte Wurzel aus 86. Die ganze Zahl, welche dieser vierten Wurzel am nächsten komt, ist 3, denn 4 ist schon größer. Man setze also in der Formel

$z =$

$z = \frac{4(N - b^4)b}{16b^4 + 6(N - b^4)}$ 86 vor N, und 3 vor b, so wird $z = \frac{4.3.5}{16.81 + 6.5}$ oder $z = \frac{5.2}{8.27 + 5}$ $= \frac{10}{221} = 0,045$ ohngefehr. Um sie aber genauer zu haben, setze man 3,045 vor b, so wird

$$u = \frac{0,02955239 \times 4 \times 3,045}{16 \times 85,97044760 + 6 \times 0,029 \text{ ꝛc.}}$$

oder $u = \frac{0,4066688}{687,850232} = 0,000300438.$

Folglich ist die noch nähere Wurzel 3,045300438 welche man noch weniger fehlerhaft machen kann.

§. 628.

Diese Beyspiele werden hinlänglich zeigen, wie man sich der wahren Wurzel so stark nähern kann, als man nur immer will. Man ist auch bemühet gewesen, andre Regeln zu erfinden, welche die Wurzeln der Gleichung auf eine ganz allgemeine Art bestimmen. So sinnreich indessen die Methoden sind, so sind sie dennoch mangelhaft. Um aber doch einen Begrif davon zu geben, will ich eine anführen. Vorher wollen wir aber diese Gleichung auflösen.

§. 629.

Es sey $x^3 - 1 = 0$, so ist $x = 1$, folglich läst sich diese Gleichung durch $x = 1$ dividiren, und der Quotient ist $x^2 + x + 1 = 0$. Eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln

$$x = -\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = -\frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$$

§. 630.

Hieraus folgt auch, daß die Cubickwurzeln aus der Zahl 1, nicht nur 1, sondern auch $-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ und $-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$ sind. Allein diese beyden sind unmöglich. Indessen werden wir sehen, daß sie doch in Betrachtung gezogen werden müssen, weil sie einen Einfluß auf die Verbindung der algebraischen Zeichen haben.

§. 631.

Gesetzt also, man hätte die Zahl A, so ist die Cubickwurzel davon nicht blos $\sqrt[3]{A}$, sondern auch $\sqrt[3]{A} \times -\frac{1+\sqrt{-3}}{1}$, und $\sqrt[3]{A} \times -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$. Denn, wenn x die Cubickwurzel aus A ist, so wird $x^3 = A$, folglich $x^3 - A = 0$, und wenn man diese Gleichung durch $x - \sqrt[3]{A}$ dividirt, so bekomt man die quadratische Gleichung $x^2 + x\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{A^2}$, davon die Wurzeln so sind, wie schon gezeigt worden.

Nachdem dieses bemerkt worden, wird es nicht schwer fallen, folgende Aufgabe aufzulösen.

§. 632.

§. 632.

Aufgabe.

Die Wurzeln einer gegebenen cubischen Gleichung zu finden.

§. 633.

Auflösung.

Die Gleichung mag beschaffen seyn, wie sie will, so schaffe man daraus das zweite Glied weg, indem man sie in eine andre verwandelt, welche diese Form haben wird

$$z^3 + pz + q = 0$$

oder $z^3 = -pz - q$.

Man setze $z = a + b$, so wird

$$z^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

oder $z^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$

da nun $a + b = z$, so wird hieraus

$$z^3 = a^3 + 3abz + b^3$$

Es muß demnach

$$a^3 + 3abz + b^3 = -pz - q$$

seyn. Folglich muß $a^3 + b^3 = -q$, und $3ab = -p$ seyn. Hieraus wird $a = \frac{p}{3b}$, und also

$-\frac{p^3}{27b^3} + b^3 = -q$, und $27b^6 - p^3 = -27qb^3$, folglich $b^6 + qb^3 = +\frac{p^3}{27}$

und $b^3 + \frac{1}{2}q = \mp\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}$

und $b = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$

da nun $a = -q - b$, so wird

$$a^3 = -q + \tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}$$

und

$$a = \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$$

oder $b = \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$

$$a = \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$$

Es sind aber die Cubickwurzeln aus jeder Größe dreyerley, (§. 631.) folglich wird

$$a = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$$

$$a = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$$

$$a = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$$

Eben so ist

$$b = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q + \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$$

$$b = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$$

$$b = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$$

Es ist also

$$z = \sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$$

$z =$

$$z=\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}\right)}+$$
$$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$$

$$z=\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}\right)}+$$
$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}\right)}$$

§. 634.

Beweis.

Um sich zu überzeugen, daß diese Wurzeln die wahren sind, darf man nur die einfache Gleichungen

$$z-\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right)}-\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right)}=0$$

$$z-\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right)}-$$
$$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right)}=0$$

$$z-\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right)}-$$
$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3\right)}\right)}=0$$

in einander multipliciren, so bringen sie die Gleichung $z^2+pz+q=0$ wieder hervor. Will

man die Multiplication vornehmen, setze man $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = m$ und $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = n$

so wird $m+n=-1$, $mn=+1$, $m^2+n^2=-1$.

Ferner setze man $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}\right)} = A$

und $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q-\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\right)}\right)} = B$, so ist

$$z - Am - Bn = o$$
$$z - An - Bm = o$$

folglich

$z^2-(m+n)(A+B)z+(A^2+B^2)mn+AB(m^2+n^2)=o$

oder $z^2+(A+B)z+(A+B^2)-AB=o$

$$z-A-B=o$$

$z^3+(A+B)z^2+(A^2+B^2)z-ABz$

$-(A+B)z^2-(A^2+B^2)z-2ABz-A^3-AB^2-A^2B-B^3=o$

$+AB^2+A^2B$

oder $z^3-3ABz-A^3-B^3=o$

Es ist aber $AB=\sqrt[3]{-\frac{1}{27}p^3}=-\frac{1}{3}p$ und $A^3+B^3=-q$. Folglich ist auch $z^3+pz+q=o$ die vorhin angenommene Gleichung.

§. 635.

Anmerkung.

So oft als p positiv ist, so oft bekomt man die Wurzeln richtig. Eben dieses findet auch statt, wenn p zwar negativ, aber $\frac{1}{27}p^3$ kleiner, als $\frac{1}{4}q^2$

ist.

ist. Ist aber p negativ, und $\frac{1}{27} p^3$ größer, als $\frac{1}{4} q^2$, so wird $\sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}$ negativ, folglich ist $\sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}$ eine imaginäre Grösse, aus welcher sich keine Wurzel ziehen läst.

§. 636.

Wenn aber $\sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}$ eine negative Größe ist, so läst sich daraus nicht schließen, daß die Wurzeln der cubischen Gleichung unmöglich sind. Denn da die Wurzeln derselben $= a + b$ sind, so kann die Summe dieser beyden Größen, ohngeachtet jede vor sich unmöglich ist, dennoch eine wirkliche Größe seyn.

§. 637.

Wenn $\sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}$ eine negative Größe ist, so sind vielmehr alle drey Wurzeln der Gleichung reelle und wirkliche Größen. Weil in diesem Falle die Gleichung $x^3 - px \mp q = o$ ist, wo p und q wirkliche Größen sind, so wollen wir setzen, es wäre möglich, daß zwey Wurzeln derselben unmöglich seyn könnten. Weil nun das zweite Glied in der Gleichung fehlt, so müssen die beyde unmögliche Wurzeln diese Form haben, $a + \sqrt{-b}$, und $a - \sqrt{-b}$, und die dritte muß nothwendig $-2a$ seyn, denn sonst könnte aus der

Multiplication der einfachen Gleichungen

$$x - a + \sqrt{} - b = o$$
$$x - a - \sqrt{} - b = v$$
$$x + 2a$$

keine Gleichung entstehen, in der das zweite Glied fehlte. Multiplicirt man diese Wurzeln wirklich in einander, so bekomt man die Gleichung

$$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = o$$
$$+ b \quad + 2ab$$

Diese Gleichung soll nun mit der vorigen

$$x^3 - px + q = o$$

einerley, und $\frac{1}{27} p^3$ größer, als $\frac{1}{4} q^2$ seyn. Es muß also $-p = -3a^2 + b$ seyn, folglich $p = 3a^2 - b$. Nun ist $3a^2 - b$ kleiner, als $3a^2$, folglich $(3a^2 - b)^3$ kleiner, als $(3a^2)^3$, folglich wird $\frac{p^3}{27} <$ als a^6. Es ist aber $q = (2a^3 + 2ab)$ und $\frac{1}{2} q = a^3 + ab$, folglich ist $\frac{1}{4} q^2 = a^6 + 2ab + a^2b^2$, und demnach $\frac{1}{4} q^2 > a^6$, folglich ist auch in diesem Falle $\frac{1}{27} p^3$ kleiner, als $\frac{1}{4} q^2$. Es sollte aber $\frac{1}{27} p^3$ größer, als $-\frac{1}{4} q^2$ seyn. Da dieses nun widersprechend ist, so sieht man offenbar, daß wenn $\sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}$ eine negative Größe ist, die cubische Gleichung keine unmögliche Wurzeln haben kann, sondern daß in diesem Falle vielmehr alle Wurzeln der Gleichung reelle Größen sind.

§. 638.

§. 638.

Dieser Fall, nemlich wenn $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ eine negative Größe ist, und der den Algebraisten soviel Kopfbrechens gemacht, so daß sie ihn auch Casum irreductibilem genennt, ist also der Algemeinheit der Auflösung aller cubischen Gleichungen, gar nicht entgegen; er dienet vielmehr zu einem sichern Kennzeichen, daß lauter wirkliche Wurzeln in der Gleichung sind. In diesem Falle aber kann man leicht die Grenzen der Wurzeln finden, und dadurch die Wurzeln selbst bestimmen.

§. 639.

Man kann auch die Wurzeln der Gleichungen vom vierten und fünften Grade auf eine ganz allgemeine Art bestimmen; da überhaupt aber alle diese Methoden, so schön sie auch sind, eben keinen sonderlichen Nutzen haben, und wenn man die Wurzeln wirklich gebraucht, man dieselben doch meistentheils durch eine Näherung finden muß, welche man so weit fortführen kann, daß man keine merklichen Fehler befürchten darf, so will ich mir hierbey nicht länger aufhalten, sondern noch einige andre Betrachtungen über die Gleichungen anstellen, welche in der Folge von mehrerem Nutzen seyn werden.

§. 440.

Aufgabe.

Nachdem man eine gewisse Menge von Größen, deren Anzahl n ist, dergestalt auf alle

mögliche Art miteinander combinirt hat, daß die Anzahl der Größen in jeder Combination $m - 1$ ist; so soll man eben diese Anzahl von Größen dergestalt auf alle mögliche Art wieder miteinander combiniren, daß die Anzahl der Größen in jeder Combination m ist. Man will die Summe dieser neuen Combinationen wissen?

§. 641.

Auflösung.

Es sey Z die Summe aller möglichen Verbindungen der Größen $a, b, c, d, e \ldots\ldots x, y, z$ dergestalt, daß in jeder einzeln Verbindung die Anzahl der darin befindlichen Größe m ist. Nun ist offenbar, daß z entsteht, wenn man eine jede Verbindung dieser Größen zu $m - 1$ aufs neue mit allen den übrigen Größen verbindet, außer denen, die darinnen selbst sind; oder wenn man alle mögliche Verbindungen dieser Größen zu $m - 1$ in denen eine gewisse Größe z. E. z nicht anzutreffen ist, mit dieser Größe z aufs neue verbindet. Z. E. wenn die 9 Größen $abcdefxyz$ zu 4 verbunden sind, und man nimt eine jede Verbindung zu vieren, als $abcd$, $abce$, $abcf$, $abcx$, $abcy$ ꝛc. in denen z nicht anzutreffen ist, und verbindet sie mit z, daß also daraus diese Verbindungen $abcdz$, $abcez$, $abcfz$, $abcxz$, $abcyz$ ꝛc. entstehen. Eben so nehme man alle Verbindungen, in denen eine andre Größe z. E. y nicht anzutreffen ist, und verbinde dieselben aufs neue mit y. Auf diese Art werden alle Größen zu m verbunden.

Allein

Allein indem man alle mögliche Verbindungen zu $m - 1$, in denen nicht z vorkomt, mit z wieder verbindet, und hernach eine jede andre Verbindung in der y, x ꝛc. fehlet, wieder eben so mit y und x verbindet, so komt eine jede Verbindung der Gröſſen zu m, auch $m$mahl vor. Denn wenn man z. E. diese Verbindung

$$abcde \ldots\ldots xy$$

in der $m - 1$ Größen vorkommen, mit z verbindet, und hernach diese Verbindung

$$abcde \ldots\ldots xz$$

in der alle vorige Größen, ohne y sind, wieder mit y verbindet, so entsteht eben wieder die vorige Verbindung. Eben so, wenn eine andere Verbindung

$$abcd \ldots\ldots yz$$

in der alle die vorigen Größen bis auf x sind, wieder mit x verbunden wird, so entsteht wieder dieselbe Verbindung. Und überhaupt, wenn man eine gewisse Verbindung nimt, in der $(m - 1)$ Größen vorkommen

$$abcdef \ldots\ldots tuxy$$

und man verbindet dieselbe mit z, so sind noch $m - 1$ andre Verbindungen, in denen allen die Größe z ist, und alle die andern Größen, ohne y, oder x, oder u, oder t, oder ꝛc. f, e ꝛc. Wenn man nun eine jede wieder mit der fehlenden Größe verbindet, so entstehen soviel Verbindungen, die vollkommen einerley sind, als die Zahl $m - 1$ Einheiten hat; folglich mit der ersten, m Verbindungen zu m Größen, die vollkommen einerley sind. Wenn also

α die Summe aller möglichen Verbindungen der Größen zu $m - 1$ ohne z.

β die Summe aller möglichen Verbindungen eben dieser Größen zu $m - 1$ ohne y.

γ die Summe aller möglichen Verbindungen dee Größen zu $m - 1$ ohne x.

und so weiter δ, ε, ξ ꝛc. sind, so folgt hieraus, daß $\alpha z + \beta y + \gamma x + \delta u + \varepsilon t +$ ꝛc. ..... $m$mahl so groß ist, als die Summe aller möglichen Verbindungen dieser Größen zu m. Da nun Z die Summe aller möglichen Verbindungen dieser Größen zu m ist, so folgt hieraus, daß

$$mZ = \alpha z + \beta y + \gamma x + \delta u +$$ ꝛc.

und $Z = \frac{\alpha z + \beta y + \gamma x + \delta u +}{m}$ ꝛc. ist.

§. 642.

Anmerkung.

Um diesen Beweis mit einem Beyspiele zu erläutern: setze man, daß man die Größen $abcuxyz$ zu dreyen verbunden hat, so sind 35 dergleichen mögliche Verbindungen, welche sich von diesen 7 Größen machen lassen, und folgende:

abc	acu	auy	bcu	buy	cux	cyz
abu	acx	auz	bcx	buz	cuy	uxy
abx	acy	axy	bcy	bxy	cuz	uxz
aby	acz	axz	bcz	bxz	cxy	uyz
abz	aux	ayz	bux	byz	cxz	xyz

Will man nun alle diese Größen $abcuxyz$ zu vie-

vieren auf alle mögliche Art verbinden, so nehme man aus allen möglichen Verbindungen zu dreyen, erstlich diejenigen heraus, in denen nicht z ist, als:

a b c	*a c u*	*a u y*	*a u x*	*c u y*
a b u	*a c x*	*a x y*	*b u y*	*c x y*
a b x	*a c y*	*b c u*	*b x y*	*u x y*
a b y	*a u x*	*b c y*	*c u x*	*b c x*

und verbinde diese mit z, so hat man

a b c z	*a c u z*	*a u y z*	*b u x z*	*c u y z*
a b u z	*a c x z*	*a x y z*	*b u y z*	*c x y z*
a b x z	*a c y z*	*b c u z*	*b x y z*	*u x y z*
a b y z	*a u x z*	*b c y z*	*c u x z*	*b c x z*

Man nehme nun alle Verbindungen ohne y, als:

a b c	*a c u*	*a u z*	*b c z*	*c x z*
a b u	*a c x*	*a x z*	*b u z*	*b u x*
a b x	*a c z*	*b c u*	*c u x*	*u x z*
a b z	*a u x*	*b c x*	*c u z*	*b x z*

und verbinde dieselben mit y, so werden folgende:

a b c y	*a c u y*	*a u z y*	*b c z y*	*c x z y*
a b u y	*a c x y*	*a x z y*	*b u z y*	*b u x y*
a b x y	*a c z y*	*b c u y*	*c u x y*	*u x z y*
a b z y	*a u x y*	*b c x y*	*c u z y*	*b x z y*

Eben so gehe man weiter fort, und verbinde diejenigen Verbindungrn zu dreyen, in denen *x* nicht ist, mit *x*, und in denen *u* nicht ist, mit *u* und so weiter, und rechne alle diese Verbindungen zu vieren zusammen, so bekomt man viermal soviel Verbindungen der sieben Größen *a b c u x y z*, als zu vieren möglich sind; daß ist, in dieser Summe komt eine jede Verbindung z. E. *u x y z* viermal vor.

Denn

Denn unter den Verbindungen zu dreyen kommen folgende vor

$$uxy$$
$$uxz$$
$$uzy$$
$$zxy$$

Folglich wenn man die erste mit z, die zweite mit y, die dritte mit x, die vierte mit u verbindet, so entstehen vier Verbindungen, welche vollkommen einerley sind. Und so ist es auch mit den Uebrigen. Folglich entstehen auf die vorhin gezeigte Art viermahl soviel Verbindungen, die aus den sieben Größen $abcuxyz$ gemacht werden können, als heraus kommen, wenn sie auf alle mögliche Art zu vieren verbunden werden.

§. 643.

Lehrsatz.

Wenn in der Gleichung

$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{ꝛc.} = o$

die Wurzeln a, b, c, d ꝛc. $x\,y\,z$ sind, und P ist die Summe aller Quadrate, Q die Summe aller Cuborum, R die Summe aller Biquadrate, S die Summe der fünften Potenzen ꝛc. so wird

$P = A$
$Q = AP - 2B$
$R = AQ - BP + 3C$
$S = AR - BQ + CP - 4D$
$T = AS - BR + CQ - DP + 5E$

und überhaupt, wenn P^N, die Summe der Dignitäten n der Wurzeln; P^{N-1}, die Summe der Dignitäten $n - 1$ der Wurzeln ꝛc. Z aber die Summe

der

der Verbindungen bedeuten, welche entstehen, wenn alle Wurzeln zu n verbunden werden, so ist

$$P^N = AP^{N-1} - BP^{N-2} + CP^{N-3} - DP^{N-4} + \text{ꝛc.} \ldots\ldots nZ.$$

§. 644.

Beweis.

Es sey x eine von den Wurzeln der vorigen Gleichung: Ferner

A' die Summe aller Wurzeln ohne x.

B' die Summe aller möglichen Verbindungen der Wurzeln ohne x, zu zweyen.

C' die Summe aller möglichen Verbindungen der Wurzeln ohne x, zu dreyen,

und so weiter, D' E, ꝛc. so wird (§. 498.)

1) $$\begin{aligned} x + A' &= A \\ A'x + B' &= B \\ B'x + C' &= C \\ C'x + D' &= D \end{aligned}$$

ꝛc. Eben so, wenn

A'' die Summe aller Wurzeln ohne z.

B'' die Summe aller Verbindungen der Wurzeln ohne z, zu zweyen.

C'' die Summe aller Verbindungen der Wurzeln ohne z du dreyen und D'', E'' ꝛc. alle mögliche Verbindungen der Wurzeln ohne z zu vieren, fünfen ꝛc. bedeuten, so wird ebenfalls, (§. 498.)

$$
\begin{aligned}
2)\quad z + A'' &= A\\
A''z + B'' &= B\\
B''z + C'' &= C\\
C''z + D'' &= D\\
D''z + E'' &= E
\end{aligned}
$$

&c. Bedeuten auf eben diese Art

A''', A^{IV}, A^{V}, A^{VI} &c. die Summe aller Wurzeln, ohne y, u, t, f &c.

B''', B^{IV}, B^{V}, B^{VI} &c. die Summe aller Verbindungen der Wurzeln ohne y, u, t, f &c. zu zweyen.

C''', C^{IV}, C^{V}, C^{VI} &c. die Summe aller Verbindungen der Wurzeln ohne y, u, t, f &c. zu dreyen,

und so weiter, D''', D^{IV}, E''', E^{IV} zu vieren, zu fünfen, so wird ebenfalls

$$
\begin{aligned}
3)\quad y + A''' &= A\\
A'''y + B''' &= B\\
B'''y + C''' &= C\\
C'''y + D''' &= D\\
D'''y + E''' &= E
\end{aligned}
$$

&c.

$$
\begin{aligned}
4)\quad u + A^{IV} &= A\\
A^{IV}u + B^{IV} &= B\\
B^{IV}u + C^{IV} &= C\\
C^{IV}u + D^{IV} &= D\\
D^{IV}u + E^{IV} &= E
\end{aligned}
$$

&c.

$$
\begin{aligned}
5)\quad t + A^{V} &= A\\
A^{V}t + B^{V} &= B\\
B^{V}t + C^{V} &= C\\
C^{V}t + D^{V} &= D\\
D^{V}t + E^{V} &= E
\end{aligned}
$$

&c.

$$
\begin{aligned}
6)\quad f + A^{VI} &= A\\
A^{VI}f + B^{VI} &= B\\
B^{VI}f + C^{VI} &= C\\
C^{VI}f + D^{VI} &= D\\
D^{VI}f + E^{VI} &= E
\end{aligned}
$$

&c.

Gesetzt nun, man wollte die Summe der 5ten Dignitäten aller Wurzeln haben, so multiplicire man die erste Gleichung No. 1. mit x^4, die zweite

(No. 1.)

(No. 1.) mit x^3, die dritte No. 1. mit x^2, die vierte mit x, so wird

$$x^5 + A'x^4 = Ax^4$$
$$A'x^4 + B'x^3 = Bx^3$$
$$B'x^3 + C'x^2 = Cx^2$$
$$C'x^2 + D'x = Dx$$
$$D'x + E' = E$$

Hieraus wird

$$x^5 + E' = Ax^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + E$$

folglich $x^5 = Ax^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + (E - E')$

Wenn man nun die Gleichungen No. 2 mit z^4, z^3, z^2, z ꝛc. multipliciert, und dieses bey allen übrigen beobachtet, und hernach eben so verfährt, wie bey dieser, so hat man nebst dieser, folgende Gleichungen

$$x^5 = Ax^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + E - E'$$
$$z^5 = Az^4 - Bz^3 + Cz^2 - Dz + E - E''$$
$$y^5 = Ay^4 - By^3 + Cy^2 - Dy + E - E'''$$
$$u^5 = Au^4 - Bu^3 + Cu^2 - Du + E - E^{IV}$$
$$t^5 = At^4 - Bt^3 + Ct^2 - Dt + E - E^{V}$$
$$\int^5 = A\int^4 - B\int^3 + C\int^2 - D\int + E - E^{VI}$$

ꝛc. ꝛc. soviel noch Wurzeln übrig sind.

Es ist aber
$$E' = E - xD'$$
$$E'' = E - zD''$$
$$E''' = E - yD'''$$
$$E^{IV} = E - uD^{IV}$$
$$E^{V} = E - tD^{V}$$
$$E^{VI} = E - \int D^{VI}$$

und so weiter. Wenn man nun diese Werthe in die vorige Gleichungen setzet, und dieselben alle addirt, so wird

$(x^5 + z^5 + y^5 + u^5 + t^5 + \int^5 + \text{ꝛc.}) =$
$A(x^4 + z^4 + y^4 + u^4 + t^4 + \int^4 + \text{ꝛc.}) -$
$B(x^3 + z^3 + y^3 + u^3 + t^3 + \int^3 + \text{ꝛc.}) +$
$C(x^2 + z^2 + y^2 + u^2 + t^2 + \int^2 + \text{ꝛc.}) -$
$D(x + z + y + u + t + \int + \text{ꝛc.}) +$
$D'x + D''z + D'''y + D^{IV}u + D^{V}t + D^{VI}\int + \text{ꝛc.}$

Da aber D', D'', D''', D^{IV}, D^{V}, D^{VI} ꝛc. alle mögliche Verbindungen zu vieren, nach und nach, ohne x, z, y, u, t, $\int$ ꝛc. sind, und E alle mögliche Verbindungen aller Wurzeln zu fünfen anzeigt, so ist (§. 641.) $D'x + D''z + D'''y + D^{IV}u + D^{V}t + D^{VI}\int + \text{ꝛc.} = 5E$. Folglich da auch

$P = x + z + y + u + t + \int + \text{ꝛc.}$
$Q = x^2 + z^2 + y^2 + u^2 + t^2 + \int^2 + \text{ꝛc.}$
$R = x^3 + z^3 + y^3 + u^3 + t^3 + \int^3 + \text{ꝛc.}$
$S = x^4 + z^4 + y^4 + u^4 + t^4 + \int^4 + \text{ꝛc.}$
$T = x^5 + z^5 + y^5 + u^5 + t^5 + \int^5 + \text{ꝛc.}$

ist, und man setzt diese Werthe in der vorigen Gleichung, so wird

$$T = AS - BR + CQ - DP + 5E$$

Auf eben diese Art kann man alle andre Fälle beweisen. Folglich ist auch

$$P^N = AP^{N-1} - BP^{N-2} + CP^{N-3} - \text{ꝛc. } nZ.$$

§. 645.

Zusatz.

Man setze $x = \frac{1}{y}$ in der vorigen Gleichung, so wird

$\frac{1}{y^{\prime\prime\prime}}$

$\frac{1}{y^m} - A\frac{1}{y^{m-1}} + \frac{B}{y^{m-2}} - \frac{C}{y^{m-3}} + \text{ꝛc.} = 0$

und wenn man mit y^m multiplicirt, so wird

$0 = 1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - Ey^5 + \text{ꝛc.}$

Wenn nun a, b, c, d ꝛc. die Wurzeln der Gleichung $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \text{ꝛc.} = 0$ sind, so, daß diese Gleichung aus der Multiplication der einfachen Gleichungen

$x - a = 0$ $\quad$ $x - d = 0$
$x - b = 0$ $\quad$ $x - e = 0$
$x - c = 0$ $\quad$ $x - f = 0$

ꝛc. entsteht, und man setzt vor x die Größe $\frac{1}{y}$, so wird die Gleichung $0 = 1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \text{ꝛc.}$ aus der Multiplication der Gleichungen

$\frac{1}{y} - a = 0$ $\quad$ $\frac{1}{y} - d = 0$
$\frac{1}{y} - b = 0$ $\quad$ $\frac{1}{y} - e = 0$
$\frac{1}{y} - c = 0$ $\quad$ $\frac{1}{y} - f = 0$

ꝛc. oder durch die Multiplication der Gleichungen

$1 - ay = 0$ $\quad$ $1 - dy = 0$
$1 - by = 0$ $\quad$ $1 - ey = 0$
$1 - cy = 0$ $\quad$ $1 - fy = 0$

ꝛc. entstehen.

Wenn also eine Gleichung

$0 = 1 - Ay + By^2 - Cy^3 + \text{ꝛc.}$

in ihre Factores aufgelöset wird, so, daß

$1 - Ay + By^2 - Cy^3 + \text{&c.} = (1 - ay)(1 - by)(1 - cy)(1 - dy)(1 - ey)(1 - fy) \times \text{&c.}$

und man setzt

$$P = a + b + c + d + \text{&c.}$$
$$Q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{&c.}$$
$$R = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \text{&c.}$$
$$S = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + \text{&c.}$$

&c. so wird

$$P = A$$
$$Q = AP - 2B$$
$$R = AQ - BP + 3C$$
$$S = AR - BQ + CP - 4D$$
$$T = AS - BR + CQ - DP + 5E \text{ &c.}$$

§. 646.

Anmerkung.

In allen diesen Sätzen können A, B &c. sowohl positiv als negativ, auch $= 0$ seyn. Man kann also überhaupt bey allen Arten von Gleichungen das anwenden, was vorhin von den Dignitäten der Wurzeln gesagt worden. Uebrigens ist dieser Lehrsatz einer von denen, welche Newton in seiner Aritmetica universali unbewiesen angegeben; und dahero haben sich verschiedene angelegen seyn lassen, den Beweis davon zu finden. Die meisten aber, welche ich davon gelesen, scheinen mir nicht die Deutlichkeit zu haben, die man wohl verlangen könnte.

§. 647.

Aufgabe.

Eine Quadratwurzel, welche diese Form hat, $\sqrt{(A \mp \sqrt{B})}$ in zwey andre Quadratwurzeln zu zerfällen.

§. 648.

Auflösung.

Die beyden Quadratwurzeln, welche man sucht, sollen $\sqrt{x}$ und $\sqrt{z}$ seyn, dergestalt, daß

$$\sqrt{(A \mp \sqrt{B})} = \sqrt{x} \mp \sqrt{z}$$

folglich $A \mp \sqrt{B} = x \mp 2\sqrt{xz} + z$

Man setze $A = x + z$, so wird $\sqrt{B} = 2\sqrt{xz}$, folglich $4xz = B$, und $z = \frac{B}{4x}$. Setzt man diesen Werth von z in die vorige Gleichung, so wird

$$x + \frac{B}{4x} = A$$

$$4x^2 + B = 4Ax$$

$$x^2 - Ax = -\tfrac{1}{4}B$$

und $x = \frac{1}{2}A \mp \sqrt{(\frac{1}{4}AA - \frac{1}{4}B)}$

oder $x = \frac{A \mp \sqrt{(AA - B)}}{2}$

Durch eben diese Formel bekomt man z, wenn man vor dem Wurzelzeichen das dem entgegengesetzte Zeichen setzt, welches man davor gesetzt hat, um die Größe x anzugeben. Wenn man also

$$x = \frac{A + \sqrt{(AA - B)}}{2}$$

setzet, so wird

$$z = \frac{A - \sqrt{(AA - B)}}{2}$$

Da nun $\sqrt{(A \mp \sqrt{B})} = \sqrt{x} \mp \sqrt{z}$, so wird $\sqrt{(A + \sqrt{B})} = \sqrt{\left(\frac{A + \sqrt{(AA - B)}}{2}\right)} \mp \sqrt{\left(\frac{A - \sqrt{(AA - B)}}{2}\right)}$.

§. 649.

Anmerkung.

Auf diese Art kann man die Quadratwurzeln einfacher ausdrücken. Gesetzt, man wollte die Quadratwurzel aus $3 + \sqrt{8}$ haben, so wird $A = 3$, $B = +\sqrt{8}$, folglich $AA - B = 9 - 8 = 1$, und wenn man diese Werthe in der vorigen Formel setzet, so hat man $\sqrt{(3 + \sqrt{8})} = \sqrt{\left(\frac{3+1}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{3-1}{2}\right)}$ oder $\sqrt{3} + \sqrt{8} = \sqrt{\frac{4}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}} = 1 + \sqrt{2}$.

Gesetzt, man wollte aus $14 - \sqrt{180}$ die Quadratwurzel haben, so wird $A = 14$, $B = 180$, folglich $\sqrt{(A^2 - B)} = 196 - 180 = \sqrt{16} = 4$, folglich wird $\sqrt{(14 - \sqrt{180})} = \sqrt{\left(\frac{14+4}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{14-4}{2}\right)} = \sqrt{9} - \sqrt{\frac{10}{2}} = 3 - \sqrt{5}$.

Wenn $\sqrt{32} - \sqrt{24}$ diejenige Zahl ist, aus der man die Quadratwurzel nehmen soll, so wird $AA = 32$, $B = 24$, folglich $\sqrt{A^2 - B} = \sqrt{(32 - 24)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Folglich wird

$\sqrt{(\sqrt{32}$

$\sqrt{(\sqrt{32}-\sqrt{24})}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{32}+2\sqrt{2}}{2}\right)}-\sqrt{\left(\frac{\sqrt{32}+2\sqrt{2}}{2}\right)}$
$=\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}\right)}-\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2}\right)}=$
$\sqrt{(3\sqrt{2})}-\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{18}}-\sqrt{\sqrt{2}}$, oder $\sqrt{(\sqrt{32}$
$-\sqrt{24})}=\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{2}$.

§. 650.

Es ist (§. 485.) gezeigt worden, daß man jede imaginäre oder eingebildete Größe, auf eine von diesen Formen bringen kann, $\beta\sqrt{-1}$, $\beta\sqrt[4]{-1}$, $\beta\sqrt[8]{-1}$, $\beta\sqrt[16]{-1}$ ꝛc. Durch Hülfe dieses Satzes, lassen sich dieselbe alle auf diese Form $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ bringen, in der α und β reelle Größen bedeuten, die entweder rational oder irrational sind. Denn es ist $\sqrt[4]{-1}=\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt{(0+\sqrt{-1})}$. Vergleicht man nun diese Formel mit der Formel $\sqrt{(A\mp\sqrt{B})}$, so wird $A=0$, $B=-1$, folglich $\sqrt{(A^2-B)}=\sqrt{0}+1=\sqrt{1}$. Hieraus wird also $\sqrt[4]{-1}=\sqrt{0}+\sqrt{-1}=\sqrt{\left(\frac{0+1}{2}\right)}+\sqrt{\frac{0-1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{-\frac{1}{2}}$, oder $\sqrt[4]{-1}=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{-1}$.

Da nun $\sqrt[8]{-1}=\sqrt{\sqrt[4]{-1}}$, so wird auch $\sqrt[8]{-1}=\sqrt{(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{-1})}$, und wenn man diesen Werth wieder mit der Formel $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ vergleicht, so wird $A=\sqrt{\frac{1}{2}}$, folglich $A^2=\frac{1}{2}$

und $B = -\frac{1}{2}$, folglich $A^2 - B = 1$, folglich $\sqrt{\left(\frac{A^2 + \sqrt{A^2 - B}}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}} + 1}{2}\right)}$ und $\sqrt{\left(\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}} - 1}{2}\right)} =$ folglich $\sqrt[8]{-1} = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})} + \sqrt{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})} = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})} + \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})}\sqrt{-1}$.

Auf eben diese Art findet man

$$\sqrt[16]{-1} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})})+\sqrt{(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{2}})})}\times\sqrt{-1}$$

$$\sqrt[32]{-1} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{2}})})})+\sqrt{(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{2}})})})}\cdot\sqrt{-1}$$

$$\sqrt[64]{-1} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}+\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{2}})})})})}+\sqrt{(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})})})})}\cdot\sqrt{-1}$$

und so weiter. Wenn man also $\beta\sqrt[4]{-1}$, $\beta\sqrt[8]{-1}$, $\beta\sqrt[16]{-1}$, $\beta\sqrt[32]{-1}$ ꝛc. auf die Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ bringen will, so darf man nur die vorigen Ausdrücke mit β multipliciren.

§. 651.

Wenn auch vor der unmöglichen Größe ein Wurzelzeichen stehet, so kann man dieselbe dennoch auf diese Form $\alpha \mp \beta\sqrt{-1}$ bringen. Denn gesetzt, man hätte diese Größe $\sqrt[n]{(a + b\sqrt{-1})}$, so kann dieselbe auch so geschrieben werden, $\sqrt[n]{(a \times$

$(1 +$

$\left(1 + \frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)$. Setzt man nun $\frac{b}{a} = \gamma$,

so wird $\sqrt[n]{a + b\sqrt{-1}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{(1 + \gamma\sqrt{-1})}$, und folglich wenn man diesen Ausdruck nach (§. 537.) entwickelt,

$$\sqrt[n]{(a+b\sqrt{-1})} = \sqrt[n]{a} \times \left(1 + \frac{1}{n}\gamma\sqrt{-1} - \frac{1.1-n}{n.2n}\gamma^2 + \frac{1.1-n.1-2n}{n.2n.4n}\gamma^3\sqrt{-1} - \frac{1.1-n.1-2n.1-3n}{n\,2n.3n.4n}\gamma^4 + \text{&c.}\right)$$

in diesem Ausdruck sind einige Glieder reel, die andern aber imaginär. Nennt man nun die Summe aller reellen Größen, α, und β die Summe aller derjenigen, die durch $\sqrt{-1}$ multiplicirt werden, so ist offenbar, daß auch dieser Ausdruck $\sqrt[n]{(a \mp b\sqrt{-1})}$ auf die allgemeine Form $\alpha \mp \beta\sqrt{-1}$ gebracht werden kann. Hieraus folgt also, daß überhaupt eine jede unmögliche Größe auf die Form $\alpha \mp \beta\sqrt{-1}$ gebracht werden kann, in der α und β reelle Größen bedeuten.

§. 652.

Wenn zwey unmögliche Größen $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ in einander multiplicirt werden, so wird das Product $\alpha^2 + \beta^2$ allezeit eine wirkliche und reelle Größe. Eben so ist auch das Product von zwey imaginären Größen von der Form $\beta\sqrt{-1}$ und $b\sqrt{-1}$ allezeit eine wirkliche Größe, und $= -b\beta$.

§. 653.

Lehrsatz.

Wenn eine reelle oder wirkliche Größe E, die übrigens beschaffen seyn kann, wie sie will, durch die unmögliche Größe R + I dividirt wird, welche aus der wirklichen Größe R und der imaginären Größe I, von der Form $\beta\sqrt{} - 1$, zusammengesetzt ist, und es entsteht durch diese Division ein Quotient von einer gewissen Form, und man dividirt eben diese Größe E durch R — I, so ist der Quotient, welcher durch diese Division entsteht, von dem ersten blos in Ansehung der Zeichen unterschieden, welche die imaginären Größen vor sich haben.

§. 654.

Beweis.

Wenn man die Größe E durch R + I dividirt, so wird der Quotient theils aus wirklichen, theils aus imaginären Größen bestehen, denn sonst könnte die Größe E nicht wieder hervorgebracht werden, wenn der Quotient durch R + I multiplicirt würde. Dieser Quotient wird aber allezeit auf die Form $\alpha + \beta\sqrt{} - 1$ gebracht werden können. Man lasse nunmehro r alle wirkliche Theile, und i alle imaginäre Theile des Quotienten zusammengenommen bedeuten, so, daß i von der Form $\beta\sqrt{} - 1$ ist. Multiplicirt man nun den Quotienten $r + i$ mit R + I, so muß die Größe wieder entstehen, welche dividiret worden, folglich ist

E =

$E = Rr + Ri + Ir + Ii$, in welchen Rr und Ii reelle Größen, Ri und Ir aber imaginäre Größen sind. (§. 652.) Weil nun E eine reelle Größe ist, so wird $Rr + Ii = E$, und $Ri + Ir = o$, folglich auch $Rr + Ii - Ri - Ir = E$, oder $E = (R - I)(r - i)$. Hieraus folgt also, daß E durch $R - I$ auch dividirt werden kann, und daß der Quotient $r - i$, welcher daraus entsteht, von dem erstern blos in Ansehung des Zeichens, welches die imaginäre Größe i vor sich hat, unterschieden ist. Denn im ersten Fall war der Quotient $r + i$, und hier ist derselbe $r - i$.

§. 655.

Zusatz.

Wenn also eine Gleichung durch $x + r + i$ wo r eine reelle, i aber eine imaginäre Größe bedeuten, dividirt werden kann, so, daß $-r - i$ die Wurzel der Gleichung ist, so kann dieselbe auch durch $x + r - i$ dividirt werden, und $-r + i$ ist auch eine von den unmöglichen Wurzeln der Gleichung. Die Anzahl der unmöglichen Wurzeln in einer Gleichung ist also allezeit eine gerade Zahl, und wenn man eine von den Wurzeln weiß, so kann man allezeit die andre finden, die mit der vorigen zusammen addirt, eine wirkliche Größe hervorbringt. Wenn z. E. $-r + i$ die eine Wurzel ist, so ist die andre $-r - i$ und ihre Summe $-r + i - r - i = -2r$.

§. 656.

Wenn man also zwey dergleichen unmögliche Wurzeln in einander multiplicirt, so wird das Produckt eine rationelle quadratische Gleichung. Denn wenn $x + r + i$ durch $x + r - i$ multiplicirt wird, so ist das Produckt $(x + r)^2 - ii$, in dem beyde Quadrate reell sind. Hieraus folgt also, daß eine jede Gleichung, in der unmögliche Wurzeln sind, allezeit doppelte wirkliche Factores hat. (Factores duplices reales.) Folglich daß sie sich in solche doppelte Factores auflösen läst, wenn sie nicht in einfache reelle Factores zerfällt werden kann.

§. 657.

Eine jede Gleichung von einem Grade, dessen Exponent eine gerade Zahl ist, kann also aus der Multiplication von lauter solchen doppelten reellen Factoren entstanden seyn. Wenn aber der Exponent des Grades der Gleichung eine ungerade Zahl ist, so kann die Gleichung nicht aus lauter solchen doppelten Factoren entstehen, sondern es muß wenigstens eine einfache Gleichung hinzu kommen, deren Wurzeln eine wirkliche Größe ist, wenn die Gleichung, welche aus der Multiplication entstehet, lauter wirkliche Theile haben soll.

§. 658.

Wenn also eine Gleichung vom Grade $2n$ ist, so können darinnen die Anzahl der unmöglichen Wurzeln entweder $2n$ oder $2n - 2$, $2n - 4$, $2n - 6$, $2n - 8$ ꝛc. seyn. Ist aber die Gleichung vom Grade $2n + 1$, so hat dieselbe wenigstens

stens eine wirkliche Wurzel, oder 3, oder 5, oder 7, oder 9, oder 11 ꝛc. Denn die unmögliche Wurzeln können darinnen entweder $2n$, oder $2n - 2$, $2n - 4$, $2n - 6$ ꝛc. seyn.

Achter Abschnitt.

Von den trigonometrischen Calcul und einigen Gleichungen und Aufgaben, welche sich durch denselben auflösen lassen.

§. 659.

Ein Zirkel entsteht, wie aus der Geometrie bekannt ist, wenn sich eine gerade Linie CA von einer bestimten Länge um dem Punkt C, welcher der Mittelpunkt heist, herum bewegt. Der Punkt A beschreibt alsdenn den Umkreis des Zirkels, und da die Bewegung ohne Ende fortgesetzt werden kann, so beschreibt der Punkt A nach und nach die Peripherie, ein, zwey, drey ꝛc. mahl. Fig. 53.

Man nehme nun einen Punkt, als A zum Anfangspunkt der Bewegung an, und ziehe durch den Mittelpunkt C den Diameter AE. Ferner ziehe man von dem Punkt B in der Peripherie eine gerade Linie B*b*, welche auf den Diameter in D perpendikulär ist, und den Umkreis in *B* und *b* durch-

durchschneidet, so ist BD der Sinus des Bogen AB, oder des Winkels ACB und CD der Cosinus des Winkels ACB, oder des Bogen AB.

Man verlängre ferner den Radius BC, bis derselbe den Umkreis des Zirkels in b' durchschneidet, und ziehe bD' auf den Diameter AE perpendikulär, und verlängere dieselbe, bis sie den Umkreis des Zirkels in B' durchschneidet.

Da nun der Sinus eines Bogens diejenige Linie ist, welche von dem Endepunkt eines gewissen Bogens, auf denjenigen Diameter perpendikulär gezogen wird, welcher durch den Anfangspunkt des Bogens gezogen worden, so folgt daraus, daß, wenn $AB = \alpha$, und $\pi =$ der halben Peripherie gesetzt wird, alle diese Bogen, α, $\pi - \alpha$, $2\pi + \alpha$, $3\pi - \alpha$, $4\pi + \alpha$, $5\pi - \alpha$ ꝛc. einerley Sinum BD haben.

Denn weil die Triangel BDC, $b'CD'$, $B'CD'$ einander gleich sind, so ist der Bogen $B'E = AB$ und $BD = B'D$.

Nun ist

BD	der Sinus des Bogens		AB
$B'D$	=	=	AB'
BD	=	=	ABEAB
$B'D$	=	=	$AB'EAB'$
BD	=	=	ABEABEAB
$B'C$	=	=	$AB'EAB'EAB'$

und so gehet es immer fort, indem der Punkt A ver-

vermöge seiner fortdaurenden Bewegung alle diese Bogen beschreibt.

Es ist aber auch $Ab = AB$, und beyde Bogen sind blos der Lage nach voneinander verschieden, und $BD = bD$, so, daß bD, der Sinus des Bogens Ab, der Lage nach, auch dem Sinus BD des Bogens AB entgegen gesetzt ist. Wenn man also den Sinus des Bogens AB und der übrigen, positiv annimt, so muß der Sinus des Bogens Ab negativ angenommen werden. Es haben also alle folgende Bogen: $-\alpha$, $\pi + \alpha$, $2\pi - \alpha$, $3\pi + \alpha$, $4\pi - \alpha$ ꝛc. einerley Sinum Db, welcher aber negativ ist.

Es ist also überhaupt, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, $\text{Sin. } \alpha = \text{Sin. } (2n\pi + \alpha)$

und $\text{Sin. } \alpha = \text{Sin. } ((2n + 1)\pi - \alpha)$

$-\text{Sin } \alpha = \text{Sin. } (2n\pi - \alpha)$

$-\text{Sin. } \alpha = \text{Sin. } ((2n + 1)\pi + \alpha)$

§. 660.

Weil CD der Cosinus des Bogens AB ist, so ist derselbe auch der Cosinus aller der Bogen, welche sich bey A anfangen, und bey B endigen; und da zugleich CD der Cosinus des Bogens Ab ist, so ist er auch der Cosinus aller der Bogen, welche sich bey A anfangen, und bey b endigen. Stellt man sich nun vor, daß der Punkt, der den Umkreis des Zirkels beschreibt, seine Bewegung ins unendliche fortsetzt, so beschreibt er nach und nach die Bogen, AB, $ABEb$, $ABEAB$, $ABEABEb$

und

und so weiter. Folglich haben alle die Bogen, α, $2\pi - \alpha$, $2\pi + \alpha$, $4\pi - \alpha$, $4\pi + \alpha$, $6\pi - \alpha$, $6\pi + \alpha$ ꝛc einerley Cosinum CD, und wenn n wieder eine ganze Zahl bedeutet, so ist überhaupt

$$\text{Cos. } \alpha = \text{Cos. } (2n\pi \mp \alpha)$$

Daß ist, alle die Bogen, welche zusammen genommen, der Peripherie des Zirkels etliche mal gleich sind, haben einerley Cosinum.

Wenn man ferner die Linien bC, BC zieht, bis sie den Umkreis des Zirkels in B′ und b' durchschneiden, so sind die Bogen FB′ Eb' einander, und dem Bogen BA gleich; desgleichen ist CD′, der Cosinus des Bogens AB′, dem Cosinus des Bogens AB, oder CD gleich. Weil diese beyde Cosinus CD und CD′ aber der Lage nach einander *entgegengesetzt sind, so muß CD′ negativ genommen werden, wenn CD als positiv* betrachtet wird. Folglich ist der Cosinus aller der Bogen. $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $3\pi - \alpha$, $3\pi + \alpha$, $5\pi - \alpha$, $5\pi + \alpha$ ꝛc. dem Cosinus des Bogens α zwar gleich, aber negativ. Es ist überhaupt also, wenn n eine ganze Zahl bedeutet,

$$-\text{Cos. } \alpha = \text{Cos. } ((2n + 1)\pi \mp \alpha)$$

§. 661.

Wenn nun der Bogen $\alpha = 0$ ist, so ist der Sinus desselben auch $= 0$, und der Cosinus desselben $+r$, oder $+1$, wenn man den Radius $r = 1$ annimt, welches allezeit zu geschehen pflegt. Ist aber $\alpha = 90° = \frac{1}{2}\pi$, so ist der Sinus desselben $= +1$,

und

und der Cosinus desselben $= 0$. Es ist also überhaupt unter diesen Bedingungen im ersten Fall

1) Sin. $2n\pi = 0$

2) Sin. $(2n + 1)\pi = 0$ (§. 660.)

und 3) Cos. $2n\pi = +r = +1$

4) Cos. $(2n + 1)\pi = -r = -1$. §. 660.

Im zweiten Fall aber, wenn $\alpha = 90^0 = \frac{1}{2}\pi$, so wird Sin. $(2n\pi + \frac{1}{2}\pi) = r = 1$

oder Sin. $\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi = r = 1$

und Sin. $\left(\frac{4n-1}{2}\right)\pi = -r = -1$. §. 660.

Diese Formeln werden in der Folge von vielen Nutzen seyn, und man kann bey den Tangenten und Cotangenten eben diese Betrachtungen anstellen. Da aber überhaupt $\frac{\text{Sin. } \alpha}{\text{Cos. } \alpha} = tg\,\alpha$, (§. 313.) so folgt daraus, daß Tang. $(2n\pi + \alpha)$ positiv, und Tang. $(2n\pi - \alpha)$ negativ ist. Denn

$$\text{Tang. } (2n\pi + \alpha) = \frac{\text{Sin. } (2n\pi + \alpha)}{\text{Col. } (2n\pi + \alpha)} \text{ (§. 659.)}$$

$$\text{und Tang. } (2n\pi - \alpha) = \frac{+\text{Sin. } (2n\pi - \alpha)}{+\text{Col. } (2n\pi - \alpha)} = \frac{-\text{Sin. } \alpha}{+\text{Col. } \alpha} \text{ (§. 659)}$$

Auf eben diese Art findet man

Tang. $((2n + 1)\pi + \alpha)$ positiv, und

Tang. $((2n + 1)\pi - \alpha)$ negativ.

Eben so wird Cot. $(2n\pi + \alpha)$ positiv,

Cot. $(2n\pi - \alpha)$ negativ,

Cot. $((2n + 1)\pi + \alpha)$ positiv,

Cot. $((2n + 1)\pi - \alpha)$ negativ.

Und so kann man auch die Secanten und Cosecanten betrachten.

§. 662.

Aufgabe.

Es werden die Sinus und Cosinus zweyer Bogen gegeben; man soll die Sinus und Cosinus der Summe oder der Differenz finden.

§. 663.

Auflösung.

Es sey AB der eine, und BD der andre Bogen, deren Sinus und Cosinus gegeben werden. Man nehme BE = BD, so wird AD die Summe der beyden gegebenen Bogen und AE ihre Differenz. Zieht man nun die Linie DE, welche die Linie BC in G durchschneidet, so ist DE auf
Fig 54 BC in G perpendikulär, und wenn man die Linien EK, BF, GH, DI auf AC perpendikulär zieht, so wird DI der Sinus, und CI der Cosinus der Summe der Bogen AB und BE. Ferner ist EK der Sinus, und CK der Cosinus der Differenz der Bogen AB und BD. Man ziehe GL auf DI, und EM auf GH perpendikulär, welche folglich mit der Linie CA parrallel sind. Man setze nunmehro den Radius AC = r, den Bogen AB = α, den Bogen BD = β, so, daß AD = $\alpha + \beta$, und AE = $\alpha - \beta$ ist, so wird hieraus BF = Sin. α, DG = Sin. β, CF = Cos. α, CG = Cos. β, DI = Sin. $(\alpha + \beta)$, CI = Cos. $(\alpha + \beta)$, EK = Sin. $(\alpha - \beta)$,

CK

$CK = \text{Cof.}(\alpha - \beta)$. Nun ist $BC : BF = CG : GH$, folglich $GH = \frac{\text{Sin. } \alpha \text{ Cof. } \beta.}{r}$ Ferner $BC : FC = GC : HC$, und $HC = \frac{\text{Cof. } \alpha \text{ Cof. } \beta.}{r}$ Die rechtwinklichten Triangel CBF, GEM, DGL sind aber einander ähnlich. Denn weil GH, BF auf AC perpendikulär, folglich parallel sind, so sind die Winkel CGH, CBF einander gleich. Da nun CBF und BCF zusammen einen rechten Winkel ausmachen, desgleichen HGC und MGE, so folgt hieraus, daß der Winkel EGM dem Winkel BCH gleich ist. Der Triangel DGL ist aber dem Triangel EGM vollkommen gleich. Aus dieser Aehnlichkeit der Triangel folgt also, daß

$CB : BF = EG : EM = GD : GL$ ist.

Folglich ist $EM = GL = \frac{\text{Sin. } \alpha. \text{ Sin. } \beta.}{r}$ Es ist aber auch $CB : CF = EG : GM = GD : DL$, und hieraus $GM = DL = \frac{\text{Cof. } \alpha. \text{ Sin. } \beta.}{r}$

Nun ist $DI = DL + LI = DL + GH$, folglich $DI = \frac{\text{Sin. } \alpha. \text{ Cof. } \beta + \text{Cof. } \alpha. \text{ Sin. } \beta.}{r}$

Ferner $CI = CH - HI = CH - GL$, oder $CI = \frac{\text{Cof. } \alpha. \text{ Cof. } \beta - \text{Sin. } \alpha. \text{ Sin. } \beta.}{r}$ Allein

$$EK = GH - GM = \frac{\text{Sin. } \alpha. \text{ Cof. } \beta - \text{Cof. } \alpha. \text{ Sin. } \beta}{r}$$

$$CK = CH + HK = CH + EM$$

oder $CK = \frac{\text{Cos. } \alpha . \text{ Cos. } \beta + \text{Sin. } \alpha . \text{ Sin. } \beta .}{r}$

Es ist also

1) $\text{Sin. } (\alpha + \beta) = \frac{\text{Sin. } \alpha . \text{ Cos. } \beta + \text{Sin. } \beta \text{ Cos. } \alpha}{r}$

2) $\text{Sin. } (\alpha - \beta) = \frac{\text{Sin. } \alpha . \text{ Cos. } \beta - \text{Sin. } \beta . \text{ Cos. } \alpha}{r}$

3) $\text{Cos. } (\alpha + \beta) = \frac{\text{Cos. } \alpha . \text{ Cos. } \beta - \text{Sin. } \beta . \text{ Sin. } \alpha}{r}$

4) $\text{Cos. } (\alpha - \beta) = \frac{\text{Cos. } \alpha . \text{ Cos. } \beta + \text{Sin. } \beta . \text{ Sin. } \alpha}{r}$

§. 664.

Zusatz.

Wenn nun $\alpha = \beta$, so ist auch $\text{Sin. } \alpha = \text{Sin. } \beta$ und $\text{Cos. } \alpha = \text{Cos. } \beta$, folglich wird

$$\text{Sin. } 2\alpha = \frac{\text{Sin. } \alpha . \text{ Cos. } \alpha + \text{Sin. } \alpha . \text{ Cos. } \alpha}{r}$$

$$\text{Cos. } 2\alpha = \frac{\text{Cos. } \alpha . \text{ Cos. } \alpha - \text{Sin. } \alpha . \text{ Sin. } \alpha}{r}$$

oder $\text{Sin. } 2\alpha = \frac{2 \text{ Sin. } \alpha . \text{ Cos. } \alpha}{r}$

$$\text{Cos. } 2\alpha = \frac{2 (\text{Cos. } \alpha)^2 - rr}{r}$$

weil $rr = (\text{Sin. } \alpha)^2 + (\text{Cos. } \alpha)^2$.

Setzt man nun in den Formeln (§. 663.) $\beta = 2\alpha$, so muß man $\frac{2 . \text{ Sin. } \alpha . \text{ Cos. } \alpha}{r}$ vor Sin. β, und $\frac{2 \text{ Cos. } \alpha^2 - rr}{r}$ vor Cos. β setzen, und denn bekomt man

Sin. 3α

$$\text{Sin. } 3\alpha = \frac{(4.\ \text{Cos. } \alpha^3 - rr)\ \text{Sin. } \alpha}{r^2}$$

$$\text{Cos. } 3\alpha = \frac{(4.\ \text{Cos. } \alpha^3 - 3r^2\ \text{Cos. } \alpha)}{r^2}$$

und so kann man weiter gehen.

Setzt man nun Sin. $\alpha = f$, Cos. $\alpha = c$, so wird

Sin. $\alpha = f$

Sin. $2\alpha = \frac{2cf}{r}$

Sin. $3\alpha = \frac{(4c^2 - r^2)f}{r^2}$

Sin. $4\alpha = \frac{(8c^3 - 4r^2c)f}{r^3}$

Sin. $5\alpha = \frac{(16c^4 - 12r^2c^2 + r^4)f}{r^4}$

Sin. $6\alpha = \frac{(32c^5 - 32r^2c^3 + 6r^4c)f}{r^5}$

Sin. $7\alpha = \frac{(64c^6 - 80r^2c^4 + 24r^4c^2 - r^6)f}{r^6}$

und so weiter,

Cos. $\alpha = c$

Cos. $2\alpha = \frac{(2cc - rr)}{r}$

Cos. $3\alpha = \frac{4c^3 - 3r^2c}{r^2}$

Cos. $4\alpha = \frac{8c^4 - 8r^2c^2 + r^4}{r^3}$

Cos. $5\alpha = \frac{16c^5 - 20r^2c^3 + 5r^4c}{r^4}$

$$\text{Cos. } 6\alpha = \frac{32c^6 - 48r^2c^4 + 18r^4c^2 - r^5}{r^5}$$

$$\text{Cos. } 7\alpha = \frac{64c^7 - 112r^2c^5 + 56r^4c^3 - r^6c}{r^6}$$

und so weiter.

§. 665.

Daß, was (§. 389. 390) gezeigt worden, fließt auch hieraus: Nemlich man kann immer nach und nach einen jeden Bogen in zwey, vier, acht, sechzehn ꝛc. gleiche Theile theilen. Wenn man z. E. den Bogen A, dessen Cosinus gegeben wird, in zwey gleiche Theile theilen soll, so muß man den Cos. $\frac{1}{2}$ A wissen. Und alsdenn wird

$$\text{Cos. A} = \text{Cos. } 2 \times \tfrac{1}{2}\text{ A} = \frac{2\,(\text{Cos. } \frac{1}{2}\text{ A})^2 - rr}{r}$$

folglich r Cos. A $= 2\,(\text{Cos. } \frac{1}{2}\text{ A})^2 - rr$

und also $\text{Cos. } \frac{1}{2}\text{ A} = \sqrt{\left(\frac{r^2 + r\,\text{Cos. A}}{2}\right)}$

Auf eben die Art findet man

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}\text{ A} = \sqrt{\left(\frac{rr - r\,\text{Cos. A}}{2}\right)}$$

§. 666.

Wenn man die erste und zweite Formel §. 663. addirt, so bekomt man

$$\text{Sin. } \alpha.\ \text{Cos. } \beta = \frac{\text{Sin. } (\alpha + \beta) + \text{Sin. } (\alpha - \beta)}{2r}$$

und indem man $n^{o}1$ und 2 subtrahirt

$$\text{Sin. } \beta.\ \text{Cos. } \alpha = \frac{\text{Sin. } (\alpha + \beta) - \text{Sin. } (\alpha - \beta)}{2r}$$

Eben

Auf eben diese Art bekomt man aus N, 3 und 4

$$\text{Cos. } \alpha \cdot \text{Cos. } \beta = \frac{\text{Cos. } (\alpha - \beta) + \text{Cos. } (\alpha + \beta)}{2r}$$

$$\text{Sin. } \alpha \cdot \text{Sin. } \beta = \frac{\text{Cos. } (\alpha - \beta) - \text{Cos. } (\alpha + \beta)}{2r}$$

Durch Hülfe dieser Formeln, lassen sich nun die Dignitäten der Sinus und Cosinus leicht bestimmen, und man bekomt, indem man $\beta = \alpha$ setzet,

$$\text{Sin. } \alpha = \text{Sin. } \alpha$$

$$(\text{Sin. } \alpha)^2 = \frac{\text{Cos. } (\alpha - \alpha) - \text{Cos. } 2\alpha}{2r}$$

folglich da $\text{Cos. } (\alpha - \alpha) = \text{Cos. } 0 = r$ ist, so wird

$$(\text{Sin. } \alpha)^2 = \frac{r - \text{Cos. } 2\alpha}{2r}$$

$$(\text{Cos. } \alpha)^2 = \frac{r + \text{Cos. } 2\alpha}{2r}$$

Nimt man nun r in der Folge vor die Einheit, oder $r = 1$, so wird

$$(\text{Sin. } \alpha)^2 = \frac{1 - \text{Cos. } 2\alpha}{2}$$

$$(\text{Cos. } \alpha)^2 = \frac{1 + \text{Cos. } 2\alpha}{2}$$

Wenn man nun die §. 664. angebene Formeln zu Hülfe nimt, so findet man, wenn $r = 1$ ist.

$$\text{Sin. } \alpha = \text{Sin. } \alpha$$

$$2\,(\text{Sin. } \alpha)^2 = 1 - \text{Cos. } 2\alpha$$

$$4\,(\text{Sin. } \alpha)^3 = 3\,\text{Sin. } \alpha - \text{Sin. } 3\alpha$$

$$8\,(\text{Sin. } \alpha)^4 = 3 - 4\,\text{Cos. } 2\alpha + \text{Cos. } 4\alpha$$

$$16\,(\text{Sin. } \alpha)^5 = 10\,\text{Sin. } \alpha - 5\,\text{Sin. } 3\alpha + \text{Sin. } 5\alpha$$

$$32\,(\text{Sin. } \alpha)^6 = 10 - 15\,\text{Cos. } 2\alpha + 6\,\text{Cos. } 4\alpha - \text{Cos. } 6\alpha$$

und so weiter,

$\text{Cos.}\,\alpha = \text{Cos.}\,\alpha$

$2(\text{Cos.}\,\alpha)^2 = 1 + \text{Cos.}\,2\alpha$

$4(\text{Cos.}\,\alpha)^3 = 3\,\text{Cos.}\,\alpha + \text{Cos.}\,3\alpha$

$8(\text{Cos.}\,\alpha)^4 = 3 + 4\,\text{Cos.}\,2\alpha + \text{Cos.}\,4\alpha$

$16(\text{Cos.}\,\alpha)^5 = 10\,\text{Cos.}\,\alpha + 5\,\text{Cos.}\,3\alpha + \text{Cos.}\,5\alpha$

$32(\text{Cos.}\,\alpha)^6 = 10 + 15\,\text{Cos.}\,2\alpha + 6\,\text{Cos.}\,4\alpha + \text{Cos.}\,6\alpha$

und so weiter, welches man leicht weiter fortführen kann.

§. 667.

Man setze $\alpha + \beta = a$, $\alpha - \beta = b$, so wird $\alpha = \frac{a+b}{2}$, und $\beta = \frac{a-b}{2}$. Folglich ist nach §. 666.

1) $\text{Sin.}\,a + \text{Sin.}\,b = 2\,\text{Sin.}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{Cos.}\left(\frac{a-b}{2}\right)$

2) $\text{Sin.}\,a - \text{Sin.}\,b = 2\,\text{Sin.}\left(\frac{a-b}{2}\right)\text{Cos.}\left(\frac{a+b}{2}\right)$

3) $\text{Cos.}\,a + \text{Cos.}\,b = 2\,\text{Cos.}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{Cos.}\left(\frac{a-b}{2}\right)$

4) $\text{Cos.}\,b - \text{Cos.}\,a = 2\,\text{Sin.}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{Sin.}\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Dividirt man nun diese Formeln nach und nach durch einander, und erinnert sich, daß $\frac{\text{Sin. A}}{\text{Cos. A}} = \text{Tang. A}$ (§. 313.) ist, so bekomt man

5) $\frac{\text{Sin.}\,a+\text{Sin.}\,b}{\text{Sin.}\,a-\text{Sin.}\,b} = \frac{\text{Tang.}\frac{a+b}{2}}{\text{Tang.}\frac{a-b}{2}} = \text{Tang.}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{Cot.}\left(\frac{a-b}{2}\right)$

6) Sin.

6) $\frac{\text{Sin. } a + \text{Sin. } b}{\text{Cof. } a + \text{Cof. } b} = \text{Tang.} \left(\frac{a+b}{2}\right)$

7) $\frac{\text{Sin. } a + \text{Sin. } b}{\text{Cof. } b - \text{Cof. } a} = \text{Cot.} \left(\frac{a-b}{2}\right)$

8) $\frac{\text{Sin. } a - \text{Sin. } b}{\text{Cof. } a + \text{Cof. } b} = \text{Tang.} \left(\frac{a-b}{2}\right)$

9) $\frac{\text{Sin. } a - \text{Sin. } b}{\text{Cof. } b - \text{Cof. } a} = \text{Cot.} \left(\frac{a+a}{2}\right)$

10) $\frac{\text{Cof. } a + \text{Cof. } b}{\text{Cof. } b - \text{Cof. } a} = \text{Cot.} \left(\frac{a+b}{2}\right) \times \text{Cot.} \left(\frac{a-b}{2}\right)$

§. 668.

Durch Hülfe der vorhergehenden Sätze läst sich nun die Tangente der Summe zweyer Bogen, und der Differenz derselben leicht finden, wenn die Tangenten der Bogen selbst gegeben werden. Denn da die Tangente entsteht, wenn man den Sinus durch den Cosinus dividirt, (§ 313.) so wird

$$\text{Tang.}(\alpha+\beta) = \frac{\text{Sin.}(\alpha+\beta)}{\text{Cof.}(\alpha+\beta)} = \frac{\text{Sin.}\alpha.\text{Cof}\,\beta + \text{Sin.}\beta.\text{Cof}\,\alpha}{\text{Cof.}\alpha.\text{Cof.}\beta - \text{Sin.}\alpha\ \text{Sin.}\beta}$$

dividirt man nun Zehler und Nenner durch Cof. β. Cof. α, so wird

$$\text{Tang.}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\text{Sin. } \alpha}{\text{Cof. } \alpha} + \frac{\text{Sin. } \beta}{\text{Cof. } \beta}}{1 - \frac{\text{Sin. } \alpha}{\text{Cof. } \alpha} \frac{\text{Sin. } \beta}{\text{Cof. } \beta}}$$

folglich da $\frac{\text{Sin. } \alpha}{\text{Cof. } \alpha} = \text{Tang. } \alpha$ und $\frac{\text{Sin. } \beta}{\text{Cof. } \beta} = \text{Tang. } \beta$

so ist, $\text{Tang.}(\alpha+\beta) = \frac{\text{Tang. } \alpha + \text{Tang. } \beta}{1 - \text{Tang. } \alpha\ \text{Tang. } \beta}$

Auf eben diese Art findet man

$$\text{Tang.}(\alpha - \beta) = \frac{\text{Tang.}\,\alpha - \text{Tang.}\,\beta}{1 + \text{Tang.}\,\alpha \times \text{Tang.}\,\beta}$$

Da nun ferner $\text{Cot.}(\alpha + \beta) = \frac{1}{\text{Tang.}(\alpha+\beta)}$ ist, so bekomt man

$$\text{Cot.}(\alpha + \beta) = \frac{1 - \text{Tang.}\,\alpha.\,\text{Tang.}\,\beta}{\text{Tang.}\,\alpha + \text{Tang.}\,\beta}$$

und $$\text{Cot.}(\alpha - \beta) = \frac{1 + \text{Tang.}\,\alpha\,\text{Tang.}\,\beta}{\text{Tang.}\,\alpha - \text{Tang.}\,\beta}$$

oder wenn man den Zehler und Nenner mit Tang. α. Tang. β dividirt, und Cot. α vor $\frac{1}{\text{Tang.}\alpha}$

Desgleichen Cot. β vor $\frac{1}{\text{Tang.}\,\alpha}$ sezt, so wird

$$\text{Cot.}(\alpha + \beta) = \frac{\text{Cot.}\,\alpha.\,\text{Cot.}\,\beta - 1}{\text{Cot.}\,\beta + \text{Cot.}\,\alpha}$$

$$\text{Cot.}(\alpha - \beta) = \frac{\text{Cot.}\,\alpha\,\text{Cot.}\,\beta + 1}{\text{Cot.}\,\beta - \text{Cot.}\,\alpha}$$

§. 669.

Ist nun auch hier $\beta = \alpha$, so bekomt man

$$\text{Tang.}\,2\alpha = \frac{2\,\text{Tang.}\,\alpha}{1 - (\text{Tang.}\,\alpha)^2}$$

$$\text{Cot.}\,2\alpha = \frac{1 - \text{Tang.}\,\alpha^2}{2\,\text{Tang.}\,\alpha} = \frac{\text{Cot.}\,\alpha - \text{Tang.}\,\alpha}{2}$$

Sezt man nun $\alpha = 30^\circ - \beta$, so wird $2\alpha = 60^\circ - 2\beta$, und also Cot. 2α = Cot. $(60^\circ - 2\beta)$ folglich wird

$$\text{Cot.}(60^\circ - 2\beta) = \frac{\text{Cot.}(30^\circ - \beta) - \text{Tang.}(30 - \beta)}{2}$$

Es

Es ist aber Cot. A = Tang. (90 — A), folglich wird Cot. (60 — 2β) = Tang. (90° — 60° + 2β) = Tang. (30 + 2β), folglich auch Tang. (30° + 2β) = $\frac{\text{Cot.}(30° - \beta) - \text{Tang.}(30° - \beta)}{2}$

§. 670.

Durch Hülfe dieser letzten Formeln liessen sich die Tangenten aller Bogen, die größer als 30° sind, leicht finden, wenn man nur die Tangenten und Cotangenten der Winkel wüßte, welche kleiner sind als 30°. Eben dieses Vortheils kann man sich bedienen, um die Sinus und Cosinus der Bogen von 30° bis 60° zu bestimmen. Denn da Sin. 30° = $\frac{1}{2}$ ist, wenn der Radius 1 angenommen wird, und man nimt, §666, α = 30°, so wird

$\frac{1}{2}$ Sin. β = $\frac{\text{Cos.}(30° - \beta) - \text{Cos.}(30° + \beta)}{2}$

folglich Cos. (30° + β) = Cos. 30° − β) − Sin. β. Eben so Sin. (30 + β) = Cos. β − Sin. (30° − β), hierdurch findet man nun leicht alle Sinus von 30° bis 60, wenn die Sinus der Winkel von 0 bis 30° bekannt sind.

§. 671.

Aufgabe.

Man soll den Umkreis des Zirkels in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilen.

§. 672.

Vorbereitung.

Wenn man einen Bogen in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilen will, so kann dieses ganz füg-

füglich geschehen, wenn man den Sinus oder Cosinus des verlangten Theils angiebt.

Es ist aber §659.660 gezeigt worden, daß ein gegebener Sinus nicht allein zu einem Bogen α gehört, sondern auch zu allen denen folgenden: $\pi - \alpha$, $2\pi + \alpha$, $3\pi - \alpha$, $4\pi + \alpha$, $5\pi - \alpha$, $6\pi + \alpha$ - - - - $n\pi \mp \alpha$. Eben so ist auch gewiesen worden, daß ein gegebener Cosinus nicht allein zu den Bogen α, sondern auch zu alle den folgenden: $2\pi \mp \alpha$, $4\pi + \alpha$, $6\pi \mp \alpha$ - - - - $2n\pi \mp \alpha$ gehöret, der Bogen α mag größer oder kleiner als 90° oder der vierte Theil des Zirkels seyn.

Wenn man nun einen Bogen, dessen Cosinus gegeben wird, in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilen will, so muß man alle diese Bogen α, $2\pi \mp \alpha$, $4\pi \mp \alpha$ .... in eben soviel gleiche Theile theilen; denn der gegebene Cosinus kann sowohl zu dem einen als den andern gehören. So würde man, wenn man einen Bogen dessen Cosinus gegeben wird, in zwey Theile theilen solte, folgende Theile finden: $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha$, $\pi + \frac{1}{2}\alpha$, $2\pi - \frac{1}{2}\alpha$, $2\pi + \frac{1}{2}\alpha$ $3\pi - \frac{1}{2}\alpha$, $3\pi + \frac{1}{2}\alpha$, $4\pi - \frac{1}{2}\alpha$, $4\pi + \frac{1}{2}$ &c. allein $\frac{1}{2}\alpha$ und $2\pi + \frac{1}{2}\alpha$ haben einerley Cosinum, und es endigen sich die Bogen in einem Punkte, desgleichen fangen sich folgende Bogen $\pi - \frac{1}{2}\alpha$ und $3\pi - \frac{1}{2}\alpha$ bey einen Punkt an, und endigen sich bey einerley Punkte; eben so ist es mit den Bogen $\pi + \frac{1}{2}\alpha$, $3\pi + \frac{1}{2}\alpha$ und $2\pi - \frac{1}{2}\alpha$, $4\pi - \frac{1}{2}\alpha$ beschaffen, und so gehet es immer fort. Es sind also nur vier Punkte da, bey denen sich die verlangte Bogen endigen. Da nun auch noch dazu die Bogen

$\frac{1}{2}\alpha$,

$\frac{1}{2}\alpha$, $2\pi + \frac{1}{2}\alpha$, $2\pi - \frac{1}{2}\alpha$, $4\pi - \frac{1}{2}\alpha$ einerley Cosinum, desgleichen $\pi - \frac{1}{2}\alpha$, $\pi + \frac{1}{2}\alpha$, $3\pi - \frac{1}{2}\alpha$, $3\pi + \frac{1}{2}\alpha$ einerley Cosinum haben, so braucht man nur zwey Cosinus, nemlich der Bogen $\frac{1}{2}\alpha$ und $\pi - \frac{1}{2}\alpha$ zu wissen, um die Theilungspunkte zu bestimmen.

Wenn man einen gegebenen Bogen, durch Hülfe des dazu gegebenen Cosinus, in drey gleiche Theile theilen solte, so müste man eben die vorhin gezeigte Bogen wieder theilen, weil der gegebene Cosinus sowohl zu dem einen als dem andern gehören kann. Die Theile der Bogen, die sich bey A anfangen, würden aber folgende seyn: $\frac{1}{3}\alpha$, $\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{4}{3}\pi - \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha$, $2\pi - \frac{1}{3}\alpha$, $2\pi + \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{8}{3}\pi - \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{3}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha$ ꝛc.

Es fangen sich aber die Bogen $\frac{1}{3}\alpha$, $\frac{3}{3}\pi - \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{4}{3}\pi - \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha$, $2\pi - \frac{1}{3}\alpha$ und $2\pi + \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{3}{3}\pi - \alpha$. $\frac{3}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{10}{3}\pi - \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{10}{3}\pi + \alpha$, $4\pi - \frac{1}{3}\alpha$ sowohl bey einem Punkte an, als endigen sich auch bey einem Punkte; und so geht es immer ins unendliche fort. Da nun ferner die Bogen $\frac{1}{3}\alpha$, $2\pi + \frac{1}{3}\alpha$, $2\pi - \frac{1}{3}\alpha$, $4\pi - \frac{1}{3}\alpha$ einerley Cosinum haben, desgleichen auch die Bogens $\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{3}{3}\pi - \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{10}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha$ einerley Cosinum haben, wie auch die Bogen $\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{8}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{10}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha$, so folgt hieraus, daß man zur Bestimmung der Theilungspunkte nur drey Cosinus braucht, und dazu kann man die Cosinus der Bogen $\frac{1}{3}\alpha$, $\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha$, $\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha$ gebrauchen.

Eben

Eben so würde man vier Cosinus finden, durch denen man alle die Bogen in vier Theile theilen könnte; fünf Cosinus, wenn man die Bogen in fünfe theilen solte, und so weiter.

In der Aufgabe wird nun verlangt, daß die ganze Peripherie in eine gewisse Anzahl gleicher Theile getheilt werden soll. Da nun der Sinus der ganzen Peripherie $= 0$ ist, und man will diese Theilung dergestalt verrichten, daß man die Sinus der Theile angiebt, so muß man alle die Bogen theilen, deren Sinus o ist, folglich alle diese Bogen $0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi$ &c. $n\pi$. Und wenn also überhaupt die Peripherie in n Theile getheilet werden kann, so sind folgende Bogen: $\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \frac{4\pi}{n} \ldots . \pi, \pi + \frac{1\pi}{n}, \pi - \frac{2\pi}{n}, \pi - \frac{3\pi}{n}, \pi + \frac{4\pi}{n}$ &c. und von diesen haben die Bogen $\frac{\pi}{n}, \pi + \frac{1\pi}{n}$, und $\frac{2\pi}{n} + \pi + \frac{2\pi}{n}$, u. s. w. respective einerley Sinus und Cosinus. Hieraus bekommt man also folgende

§. 673.

Auflösung.

Gesetzt, man soll die Bogen, deren Sin. $= s$ ist, in zwey gleiche Theile theilen, so ist §. 664. $\frac{2sc}{r} = 0$. Folglich entweder $s = 0$, oder $c = 0$, denn r hat seine bestimte Größe. Da man aber die Punkte nicht haben will, bey denen $s = 0$, so

wird

wird $c = o$, folglich da $o = \text{Cos. } 90^\circ$ ist, so folgt daraus, daß man durch den Mittelpunkt eine gerade Linie perpendikulär auf den Diameter ziehen muß, und diese wird alle die Punkte bestimmen, in denen die Peripherie in zwey gleiche Theile getheilet wird, eine Sache, welche schon aus der Geometrie bekannt ist.

2) Soll man den Bogen, dessen Sinus $= o$ in drey gleiche Theile theilen, so hat man aus §. 664.

$$\frac{(4c^2 - r^2)f}{r} = o$$

Also entweder $f = o$, oder $4c^2 - r^2 = o$. Da man aber die Punkte nicht haben will, bey denen $f = o$, so wird $4c^2 - r^2 = o$, folglich $c^2 = \frac{1}{4}r^2$, und $c = \mp \frac{1}{2}r$. Man ziehe also den Diameter BA, theile den Radius CA, CB in D und D' in zwey gleiche Theile, und ziehe durch D und D' die Linien EF, $E'F'$ auf AB perpendikulär, so sind E, E', F', F die verlangte Punkte, und AE ist der dritte Theil von π, AE' der dritte Theil von 2π, ABF' der dritte Theil von 3π und so weiter. Fig. 55.

3) Will man den Bogen, dessen Sinus $= o$ in vier Theile theilen, so wird, wie vorhin, aus §. 664.

$$8c^3 - 4r^2c = o$$
$$2c^2 - rr = o$$
$$c^2 = \frac{r^2}{2}$$
$$c = \mp r\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

4) Wolte

4) Wollte man die Bogen, deren Sinus $= o$ in fünf Theile theilen, so wäre nach §. 664.

$$16c^4 - 12r^2c^2 + r^4 = o$$

$$c^4 - \tfrac{3}{4}r^2c^2 = -\frac{r^4}{16}$$

$$c^2 = \frac{3}{8}r^2 \mp \sqrt{\frac{5}{64}r^2}$$

$$c^2 = r^2 \times \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}$$

$$c = \mp r\sqrt{\left(\frac{3 \mp \sqrt{5}}{8}\right)}$$

5) Wollte man eben diese Bogen in 6 Theile theilen, so hätte man dazu die Gleichung

$$32c^5 - 32r^2c^3 + 6r^4c = o$$

$$c^4 - r^2c^2 = -\frac{3r^4}{16}$$

$$c^2 = \frac{r^2}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{16}r^4}$$

oder $c^2 = \frac{r^2}{2} \mp \frac{1}{4}r^2 = \frac{2r^2 \mp r^2}{4}$

und also $c = \mp \frac{1}{2}r\sqrt{(3 \mp 1)}$

folglich sind zwey $c = \mp \frac{1}{2}r$

und die zwey andern $c = \mp \frac{1}{2}r\sqrt{3}$.

6) Will man eben diese Bogen in sieben gleiche Theile theilen, so müste man die Gleichung

$$64c^6 - 80r^2c^4 + 24r^4c^2 - r^6 = o$$

auflösen, welches aber nicht angeht, außer durch eine Näherung.

§. 674.

§. 674.

Anmerkung.

Wenn man noch weiter gehen, und die Bogen, deren Sinus $= o$ ist, in 8, 9, 10 ꝛc. Theile theilen wollte, so würde man ebenfalls, wie bey der letzten vorigen Theilung, auf Gleichungen verfallen, welche sich nicht genau auflösen lassen, wenigstens nicht in allen Fällen. Es kann also nur die Peripherie des Zirkels bis in sechs gleiche Theile auf eine geometrische Art getheilet werden, desgleichen, in 8, 10, 12 ꝛc. und indem man diese Theile aufs neue wieder theilet. Durch Hülfe der vorigen Auflösung könnte man auch die Seiten der regulären Figuren finden, welche sich in einem Zirkel beschreiben lassen, da dieses aber schon hinlänglich aus der Geometrie bekannt ist, so will ich mich hierbey nicht aufhalten.

§. 675.

Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel in drey gleiche Theile zu theilen.

§. 676.

Auflösung.

Wenn man bey dieser Aufgabe eben die Anmerkungen macht, welche man bey der vorigen nothwendig machen muste, so sieht man auch, daß man unendlich viel Bogen theilen muß. Nemlich, wenn a der Cosinus des gegebenen Bogens ist, und man will den Cosinus des dritten theils haben, so muß man alle diejenigen Cosinus finden, welche

den Cosinus des gegebenen Winkels, oder a hervorbringen. Man setze also §. 665. a vor Cos. $3a$, so wird c derjenige Cosinus, den man sucht, welchen man jetzt, als eine unbekannte Größe ansieht, und dahero x nennen kann. Es ist also

$$\frac{4x^3 - 3r^2x}{r^2} = a$$

folglich $4x^3 - 3r^2x = ar^2$

und $x^3 - \frac{3}{4}r^2x = \frac{ar^2}{4}$

oder $x^3 - \frac{3}{4}r^2x - \frac{ar^2}{4} = o$

Diese Gleichung ist vom dritten Grade und läst sich nicht allgemein auflösen, wenn man nemlich die Wurzeln anders, als durch die §. 634. gegebene Regeln haben will.

§. 677.

Anmerkung.

Diese Aufgabe ist eine von den wichtigsten voriger Zeiten, und die grösten Geometer haben sich damit beschäftiget. Sie läst sich aber nicht auf eine geometrische Art auflösen, wenigstens nicht in allen Fällen, und dahero ist es auch noch nach der jetzigen Einrichtung der Auflösungskunst unmöglich, einen jeden gegebenen Winkel in drey gleiche Theile zu theilen. Da man aber die Sinustafeln hat, so kann man sich der Theilung des Winkels in drey Theile bedienen, um beynahe alle cubische Gleichungen aufzulösen, daß ist, den Werth der Wurzeln derselben so genau anzugeben, als es nur verlangt wer-

werden kann. Es komt nemlich blos alles darauf an, daß man den Winkel bestimt, so, daß die Wurzel der cubischen Gleichung der Cosinus des dritten theils desselben ist.

§. 678.

Eine jede cubische Gleichung, aus der das zweite Glied weggeschaft worden, bekomt diese Form

$$x^3 + Px + Q = o$$

Wenn nun diese mit der vorigen §. 676. einerley seyn soll, so muß $P = -\frac{3}{4}r^2$, und $Q = -\frac{ar^2}{4}$ seyn. Hieraus wird also $r = \mp\sqrt{-\frac{4}{3}P}$ und $a = \frac{3Q}{P}$ Soll nun r eine mögliche Größe seyn, so muß nothwendig P negativ seyn. Wenn aber dieses ist, und die Gleichung diese Form hat,

$$x^3 - Px \pm Q = o$$

so läst sich dieselbe, durch die Theilung des Winkels in drey gleiche Theile vollkommen auflösen; und die geometrische Construktion ist folgende:

Man beschreibe mit dem Radius $AC = \sqrt{\frac{4}{3}P}$ einen Zirkel, ziehe den Diameter AB, nehme auf denselben $CD = \frac{3Q}{P}$, ziehe DE auf AC perpendikulär, theile den Bogen AE in F dergestalt, daß AF der dritte Theil des Bogens AE ist, und ziehe FG auf CA perpendikulär, so wird CG eine von den Wurzeln der Gleichung. Um die andern zu bekommen, muß man auch die Bogen, ABE', ABE'AE in drey gleiche Theile theilen. Fig. 56.

§. 679.

Wenn aber die Gleichung aufgelöset werden soll, so muß nothwendig a kleiner seyn, als r, folglich a^2 kleiner, als rr, oder $\frac{9QQ}{P^2}$ muß kleiner seyn, als $\frac{4}{3}P$, folglich muß $\frac{1}{4}QQ$ kleiner seyn, als $\frac{1}{27}P^3$, und wenn dieses ist, so hat die cubische Gleichung ganz gewiß drey wirkliche Wurzeln.

Dieses bestätigt, das was §. 638. angemerkt worden. Denn nach der dort gegebenen Regel wurde alsdenn $\frac{1}{4}QQ - \frac{1}{27}P^3$ eine negative Größe. Folglich so oft dieses geschieht, so oft beweist auch die hier gemachte Anmerkung, daß die Gleichung drey wirkliche Wurzeln hat, und dieselben kann man durch die Theilung des Winkels in drey gleiche Theile erhalten.

Gesetzt z. E. man hätte diese Gleichung $x^3 - 7x + 6 = 0$, deren Wurzeln man finden soll, so wird hieraus $r = \sqrt{\frac{28}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{21}$, und $a = -\frac{18}{7}$, folglich ist der Bogen größer, als 90°. Es ist aber $\frac{2}{3}\sqrt{21} = 3,05505 = r'$, und $-\frac{18}{7} = -2,5714185 = a$. Dieser ist also der Cosinus des Bogens, wenn der Radius $= 3,05505$ ist. Nun ist der Radius in den gewöhnlichen Tabellen

bellen 10000000, folglich da sich die Cosinus verhalten, wie die Radius, so wird

$3,05505 : 10000000 = -2,5714285 : -8416976$

Nun ist $+ 8416976$ der Cosinus von $32^\circ, 41$ und also $- 8416976$ der Cosinus $147^\circ 19$. Davon $49^\circ 6'$ beynahe der dritte Theil ist, und der Cosinus von $49^\circ 6'$ ist 6545209. Um nun den Cosinus von $49^\circ 6'$ vor dem Radius 3,05505 zu finden, setze man

$10000000 : 3,05505 = 6545209 : 1,999$ ꝛc.

Also ist 1, 999 die verlangte Wurzel, aber etwas zu klein, dahero kann man 2, davor nehmen, welches auch die richtige Wurzel ist. Dieses Beyspiel wird zeigen, wie man in ähnlichen Fällen zu verfahren hat. Man siehet aber aus dem Calcul, daß derselbe sehr weitläuftig ist, und daß man nach der (§. 621.) gezeigten Methode besser zurechte komt. Ich muß nur hier noch anmerken, daß man durch die Trisection des Winkels den sogenannten Casum irreductibilem auflöset. Denn wenn man die vorige Gleichung nach der daselbst gegebenen Regel auflöset, so hat man

$$x = \sqrt[3]{\left(-3+\sqrt{\left(9-\frac{343}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(-3-\sqrt{\left(9-\frac{343}{27}\right)}\right)}$$

oder

$$x = \sqrt[3]{\left(-3+\sqrt{-\frac{100}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-3-\sqrt{-\frac{100}{27}}\right)}$$

und hieraus sieht man, daß die Wurzel eine von denen ist, die irreductibel genennt wird.

Auf eben diese Art könnte man einige Gleichungen vom vierten und fünften Grade ꝛc. durch die Theilung des Winkels in vier, fünf ꝛc. gleiche Theile auflösen; da sie aber nicht oft vorkommen, und ein jeder, sich der hier gegebenen Anleitung bedienen kann, um solche selbst zu finden, so will ich zu andern Materien fortgehen, die nützlicher sind.

§. 680.

Aufgabe.

Es wird die Lage dreyer Punkte A, B, C gegeben, welche in einer Fläche liegen. Ferner, die Winkel, unter denen dieselbe in dem Punkt D gesehen, oder durch ein Instrument gemessen werden; man soll die Lage des Punkts D in Absicht auf die drey Punkte A, B, C bestimmen, indem vorausgesetzt wird, daß alle Punkte in einer Fläche liegen.

§. 681.

Vorbereitung.

Weil die Lage der drey Punkte, A, B, C, gegeben wird, so versteht man darunter, daß die Win-
Fig. 57. kel des Triangels ABC gegeben werden. Die Lage des Punkts D wird aber bestimt, wenn man einen von den Winkeln DBC, oder DAC, oder DCB, oder DBA ꝛc. weiß. Denn da die Winkel BDC, BDA, CDA gegeben werden, so weiß man in den Triangeln DBC, DCA, DBA sogleich den dritten Winkel, wenn man DBC, oder DCA, oder DBA weiß. Durch diese Winkel

wird

wird aber die Lage des Punkts D in Absicht auf die drey gegebene Punkte bestimt.

Man beschreibe durch die drey Punkte A, B, C einen Zirkel, welcher die Linien AD, BD, CD in *a*, *b*, *c* durchschneidet. Ferner ziehe man die Linien *bc*, *ac*, *ba*, so sind die Triangel D*ac*, DCA; ferner D*bc*, DCB, und D*ba*, DAB einander ähnlich, und es ist in dem Triangel *abc* der Winkel $abc = cbB - abB$. Ferner ist, $cbB = bcD + bDc$, und $abB = baD + bDa$, folglich wird $abc = bcD + bDc - baD - bDA$. Weil aber die Triangel D*cb*, DBC einander ähnlich sind, so ist D*cb* = DBC, folglich $abc = DBC - baD + bDc - bDa$. Da aber auch die Triangel D*ab*, DBA einander ähnlich sind, so ist der Winkel D*ab* dem Winkel DBA gleich, folglich wird

$abc = DBC - DBA - (bDa - bDc)$

$abc = ABC - CDA.$

Auf eben die Art findet man

$acb = BCA + BDC + CDA$, und

$bac = BAC - BDC.$

Setzt man nun BCA = *a*, ABC = *b*, BAC = *c*, BDC = *f*, CDA = *g*, so wird

$abc = b - g$

$acb = a + f + g$

$bac = c - f.$

Nunmehro ist

$Da : ac = DC : CA$

$Da : ab = DB : BA$

folglich $\frac{DC}{DB} = \frac{ab.\ AC}{ac.\ AB}$

Ferner ist $Db : bc = DC : CB$

$Db : ba = DA : AB$

und hieraus $\frac{DC}{DA} = \frac{ab.\ CB}{bc.\ AB}$.

Es ist aber auch $ac : ab = \text{Sin. } abc : \text{Sin. } acb$ und $ab : bc = \text{Sin. } acb : \text{Sin. } bac$, folglich

$$\frac{ab}{bc} = \frac{\text{Sin. } (a + f + g)}{\text{Sin. } (c - f)}$$

$$\frac{ab}{ac} = \frac{\text{Sin. } (a + f + g)}{\text{Sin. } (b - g)}$$

Hieraus wird

$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC \text{ Sin. } (a + f + g)}{AB \text{ Sin. } (b - g)}$$

$$\frac{DC}{DA} = \frac{BC \text{ Sin. } (a + f + g)}{AB \text{ Sin. } (c - f)}$$

Es ist aber $AC : AB = \text{Sin. } b : \text{Sin. } a$

$BC : AB = \text{Sin. } c : \text{Sin. } a$

folglich wird

$$\frac{DC}{DB} = \frac{\text{Sin. } b. \text{ Sin. } (a + g + f)}{\text{Sin. } a. \text{ Sin. } (b - g)}$$

$$\frac{DC}{DA} = \frac{\text{Sin. } c. \text{ Sin. } (a + g + f)}{\text{Sin. } a. \text{ Sin. } (c - f)}$$

Nach dieser Vorbereitung wird es leicht seyn, den Winkel DCB zu bestimmen.

§. 682.

Auflösung.

Es sey der Winkel $DCB = \varphi$, so wird $DC : DB = \text{Sin. } DBC : \text{Sin. } \varphi$. Nun ist aber Sin. DCB

$DCB = \text{Sin.}(f + \varphi)$, folglich ist $\frac{DC}{DB} = \frac{\text{Sin.}(f+\varphi)}{\text{Sin.}\varphi}$, und dahero auch $\frac{\text{Sin.}(f+\varphi)}{\text{Sin.}\varphi} = \frac{\text{Sin.}\,b.\ \text{Sin.}(a+g+f).}{\text{Sin.}\,a.\ \text{Sin.}(b-g)}$

Da nun $\text{Sin.}(f+\varphi) = \text{Sin.}\,f\ \text{Cos.}\,\varphi + \text{Sin.}\,\varphi\ \text{Cos.}\,f$ §. 663. so wird

$$\frac{\text{Sin.}f\,\text{Cos.}\varphi + \text{Sin.}\varphi\,\text{Cos.}f}{\text{Sin.}\,\varphi} = \frac{\text{Sin.}\,b.\text{Sin.}(a+g+f)}{\text{Sin.}\,a.\text{Sin.}(b-g)}$$

oder

$$\text{Sin.}f\,\text{Cot.}\varphi + \text{Cos.}f = \frac{\text{Sin.}\,b.\ \text{Sin.}(a+g+f)}{\text{Sin.}\,a.\ \text{Sin.}(b-g)}$$

Es ist aber $\text{Sin.}(a+g+f) = \text{Sin.}(a+g)\,\text{Cos.}\,f + \text{Sin.}\,f.\,\text{Cos.}(a+g)$, folglich wird $\text{Sin.}\,f.\,\text{Cot.}\varphi + \text{Cos.}f = \frac{\text{Sin.}\,b \times (\text{Sin.}(a+g)\,\text{Cos.}f + \text{Sin.}f.\,\text{Cos.}(a+g))}{\text{Sin.}\,a\ \text{Sin.}\,b-g}$

und wenn man durch $\text{Sin.}\,f$ dividirt,

$$\text{Cot.}\varphi + \text{Cot.}f = \frac{\text{Sin.}\,b\,\text{Sin.}(a+g)\,\text{Cot.}f + \text{Sin.}\,b.\,\text{Cos.}(a+g)}{\text{Sin.}\,a\ \text{Sin.}(b-g)}$$

da nun auch $\text{Sin.}(b-g) = \text{Sin.}\,b\ \text{Cos.}\,g - \text{Sin.}\,g\ \text{Cos.}\,a$, so wird

$$\text{Cot.}\varphi + \text{Cot.}f = \frac{\text{Sin.}(a+g)\,\text{Cot.}f + \text{Cos.}(a+g)}{\text{Sin.}\,a\,\text{Cos.}\,g - \text{Sin.}\,a\,\text{Sin.}\,g\ \text{Cot.}\,b}$$

Setzt man nun auch $\text{Sin.}\,a\ \text{Sin.}\,g + \text{Sin.}\,g\ \text{Cos.}\,a$ vor $\text{Sin.}(a+g)$ und $\text{Cos.}\,a\ \text{Cos.}\,g - \text{Sin.}\,a\ \text{Sin.}\,g$ vor $\text{Cos.}(a+g)$, so wird $\text{Cot.}\varphi + \text{Cot.}f = \frac{(\text{Sin.}\,a\text{Cos.}\,g + \text{Sin.}\,g\text{Cos.}\,a)\text{Cot.}f + \text{Cos.}\,a\text{Cos.}\,g - \text{Sin.}\,a\text{Sin.}\,g}{\text{Sin.}\,a\ \text{Cos.}\,g - \text{Sin.}\,a\ \text{Sin.}\,g\ \text{Cot.}\,b}$

dividirt man nun mit Sin. a Sin. g, so wird

$$\text{Cot.}\varphi + \text{Cot.}f = \frac{(\text{Cot.}g + \text{Cot.}a)\text{Cot.}f + \text{Cot.}a\,\text{Cot.}g - 1}{\text{Cot.}g - \text{Cot.}b}$$

folglich

$$\text{Cot.}\varphi = \frac{(\text{Cot.}a + \text{Cot.}b)\text{Cot.}f + \text{Cot.}a.\text{Cot.}g - 1}{\text{Cot.}g - \text{Cot.}b}$$

§. 683.

Anmerkung.

Es sey z. E. der Winkel $BCA = a = 75°$ $ABC = 60° = b$ $BDC = f = 15°$ $CDA = g = 30°$, so wird

Cot. $75° = 0,26794$
Cot. $60° = 0,57735$

Cot. $60° +$ Cot. $75° = 0,84529$
Cot. $a \times$ Cot. $g =$ Cot. $75° \times$ Cot. $30° = 0,26794 \times 0,57735 = 0,15469$, folglich (Cot. $75° +$ Cot. $60°$) Cot. $15° = 0,84529 \times 3,73205 = 3,15466$, folglich wenn man addirt, so wird (Cot. $75° +$ Cot. $60°$) Cot. $15° +$ Cot. $75° \times$ Cot. $30° - 1 = 2,30935$. Da nun Cot. $30° -$ Cot. $60° = 1,73205 - 0,57735 = 1,15470$, folglich hieraus Cot. $\varphi = \frac{2,30935}{1,15470} = 1,9999$, so ist $\varphi = 26° 34'$ beynahe.

Weiß man nun diesen Winkel, so ist der Winkel DBC leicht gefunden, denn derselbe ist $180° - BDC - \varphi = 180° - 15° - 26° 34' = 138° 26'$. Hieraus findet man ferner den Win-

Winkel DCA, in dem man φ von BCA abzieht, und alsdenn ist DCA = 75° — 38°, 26′ = 36° 34′ und DAC = 180° — DCA — CDA = 180° — 36° 34′ — 30°| = 113° 26′. Da also alle Winkel in der Figur DBCA bestimt worden, so ist die Lage des Punkts D nicht mehr unbestimt, sondern man hat dieselbe. Wenn man nun noch eine Seite in den Triangel ABC weiß, so findet man die Entfernung des Punkts D, von den dreyen Punkten A, B, C nach den bekannten Regeln der Trigonometrie.

§. 684.

Aufgabe.

Man kann die drey Objeckte A, C, B aus den dreyen Punkten D, E, F sehen, und daselbst die Winkel BDC, CDA, BEC, BEA, BFC, CEA messen, welche die Linien an jedem Punkte machen, die von den dreyen Objeckten dahin gezogen werden; man kann ferner in einen von den dreyen Punkten B, C, A die drey Punkte D, E, F sehen, und an diesen Punkt z. E. in A die Winkel DAE, EAF messen; man soll die Lage dieser sechs Punkte A, C, B, D, E, F bestimmen. Fig 58.

§. 685.

Auflösung.

Man setze die Winkel BDC = *a*, CDA = *b*, BEC = *c*, CEA = *d*, BFC = *e*, CFA = *f*, DAE = *k*, EAF = *l*. Es ist aber in jedem Triangel die Summe aller Winkel so

groß,

groß, als die Summe aller Winkel in einen andern Triangel, folglich ist die Summe der Winkel AFE + EAF = AEC + FCE, folglich ist ECF = EAF + CFA — AEC, oder ECF = $l+f-d$.

Eben so wird DCE = $k+d-b$, und FBE = $e+f+l-c-d$, EBD = $c+d+k-a-b$. Zur Bequemlichkeit setze man $l+f-d=n$, $k+d-b=m$, $e+f+l-c-d=h$, $c+d+k-a-b=g$.

Man setze ferner CB = P, BC = Q, CD = L, CE = M, CF = N, und die Winkel EBC = x, ECB = y, so bekomt man nach den bekannten Lehrsätzen der Trigonometrie

1) Sin. a: Sin. $(x+g)$ = P: L
2) Sin. $(y-k)$ (Sin. b) = L: Q
3) Sin. x: Sin. c = M: P
4) Sin. d: Sin. y = Q: M
5) Sin. e: Sin. $(x-h)$ = P: N
6) Sin. $(y+l)$ (Sin. f) = N: Z

Multiplicirt man die vier ersten Analogien in einander, so wird Sin. a. Sin. $(y-k)$ Sin. x Sin. d: Sin. $(x+g)$ Sin. b Sin. c Sin. y = 1: 1, folglich Sin. a Sin. $(y-k)$ Sin. x Sin. d = Sin. $(x+g)$ Sin. b Sin. c Sin y, und da

Sin. $(y-k)$ = Sin. y Cos. k — Sin. k Cos. y
Sin. $(x+g)$ = Sin. x Cos. g + Sin. g Cos. x

so ist Sin. a Sin. d Sin. x (Sin. y Cos. k — Sin. k Cos. y) = Sin. b Sin. c Sin. y (Sin. x Cos. g +

$g + \text{Sin. } g \text{ Cos. } x$). Man dividire alles durch Sin. x Sin. y, und setze Cot. x vor $\frac{\text{Cos. } x}{\text{Sin. } x}$ und Cot. y vor $\frac{\text{Cos. } y}{\text{Sin. } y}$, so wird Sin. a Sin. d (Cos. k — Sin. k Cot. y) = Sin. b Sin. c (Cos. g + Sin. g Cot. x); folglich

$$\text{Cot. } y = \frac{\text{Sin. } a \text{ Sin. } d \text{ Cos. } k - \text{Sin. } b \text{ Sin. } c (\text{Cos } g + \text{Sin. } g \text{ Cot. } x)}{\text{Sin. } k}$$

Multiplicirt man hingegen die vier letzten Analogien in einander, so wird

Sin. x. Sin. d. Sin. e. Sin. $(y + l)$ = Sin. c. Sin. y. Sin. $(x - h)$ Sin. f

folglich durch eine mit der vorigen ganz ähnlichen Verwandlung,

Sin. d. Sin. e (Cos. l + Sin. l. Cot. y) = Sin. c. Sin. f (Cos. h — Sin. h. Cot. x), folglich

$$\text{Cot. } y = \frac{\text{Sin. } c \text{ Sin. } f (\text{Cos. } h - \text{Sin. } h \text{ Cot. } x) - \text{Sin. } d \text{ Sin. } e \text{ Cos. } l}{\text{Sin. } l}$$

Aus diesen beyden Werthen von Cot. y bekomt man nach den bekannten algebraischen Verwandlungen

$$\text{Cot. } x = \frac{\left(\begin{array}{l}\text{Sin. } a \text{ Sin. } d \text{ Sin. } l \text{ Cos. } k + \text{Sin. } e \text{ Sin. } d \text{ Sin. } k \text{ Cos. } l \\ - \text{Sin. } b \text{ Sin. } c \text{ Sin. } l \text{ Cos. } g - \text{Sin. } c \text{ Sin. } f \text{ Cos. } b \text{ Cos. } k\end{array}\right)}{\text{Sin. } b \text{ Sin. } c \text{ Sin. } g \text{ Sin. } l - \text{Sin. } c \text{ Sin. } f \text{ Sin. } b \text{ Sin. } k}$$

§. 686.

Anmerkung.

Diese Aufgabe ist eine von den wichtigsten, die in der praktischen Geometrie nur vorkommen können.

Man

Man ist dadurch im Stande, alle Gegenstände, die man nur in einer Ebene übersehen kann, mit der grösten Bequemlichkeit aufzunehmen, und ohne weitläuftigkeit im Grund zu legen, oder einen Riß davon zu verfertigen. Ich habe dieselbe aus des Herrn Lamberts Beyträgen genommen, in welchen vortreflichen Werke noch mehrere dergleichen practische Fälle untersucht, und aufgelöset werden.

§. 687.

Aufgabe.

Die vier Punkte A, B, C, D liegen in einer geraden Linie. Man weiß, wie weit A von B entfernt, desgleichen, wie weit C von D ist. Allein die Entfernung der mittelsten Punkte C und B weiß man nicht. Aus einem gewissen Punkt E aber kann man die vier Punkte A, B, C, D sehen, und daselbst die Winkel AEB, AEC, AED
Fig. 59. messen. Man soll nun die Länge der Linie AD bestimmen.

§. 688.

Auflösung.

Weil der mittelste Theil CB der geraden Linie AD unbekannt ist, so kann derselbe nicht anders gefunden werden, als wenn man in dem Triangel AEC eine Seite und zwey Winkel, oder andre drey Stücke weiß, welche zur Bestimmung eines Triangels erfordert werden. Man muß dahero dieses aus den gegebenen Stüken zu bekommen suchen.

chen. Nun ist in dem Triangel AEB der Winkel AEB und die Seite AB bekannt. Es wird also nur noch erfordert, daß man den Winkel EAB weiß, und sobald dieser bekannt ist, so wird das Uebrige leicht gefunden. Die ganze Aufgabe komt also darauf an, den Triangel AEB erst völlig zu bestimmen. In dieser Absicht sey

AB = m, CD = n. Der Winkel AEB = a, AEC = b, AED = c. Man ziehe von E auf AD die Linie EP perpendikulär, und setze AEP = x, so wird hieraus BEP = $x - a$, CEP = $b - x$, DEP = $c - x$.

Es ist also 1) EP: AP = 1: Tang. x, folglich AP = EP. Tang. x.

2) EP: BP = 1: Tang. $(x - a)$, und also BP = EP. Tang. $(x - a)$.

3) EP: CP = 1: Tang. $(b - x)$, und CP = EP. Tang. $(b - x)$.

4) EP: PD = 1: Tang. $(c - x)$, und PD = EP. Tang. $(c - x)$.

Hieraus bekomt man

AB = AP — BP = EP (Tang. x — Tang. $(x - a)$)
CD = PD — PC = EP (Tang. $(c - x)$ — Tang. $(b - x)$)
Also AB: CD = $m:n$ = EP (Tang. x — Tang. $(x - a)$): EP (Tang. $(c - x)$ — Tang. $(b - x)$), oder
$m:n$ = Tang. x - Tang. $(x-a)$: Tang. $(c-x)$ - Tang. $(b-x)$
Es ist aber Tang. $(x - a)$ = $\frac{\text{Tang. } x - \text{Tang. } a}{1 + \text{Tang. } x, \text{Tang. } a}$

Tang.

$$\text{Tang.}(c-x) = \frac{\text{Tang.}\,c - \text{Tang.}\,x}{1 + \text{Tang.}\,c\,\text{Tang.}\,x}$$

$$\text{Tang.}(b-x) = \frac{\text{Tang.}\,b - \text{Tang.}\,x}{1 + \text{Tang.}\,c.\,\text{Tang.}} \quad \text{§. 667.}$$

folglich

$$\text{Tang.}\,x - \text{Tang.}(x-a) = \text{Tang.}\,x - \frac{\text{Tang.}\,x + \text{Tang.}\,a}{1 + \text{Tang.}\,x\,\text{Tang.}\,a}$$

$$= \frac{\text{Tang.}\,x + \text{Tang.}\,x^2\,\text{Tang.}\,a - \text{Tang.}\,x + \text{Tang.}\,a}{1 + \text{Tang.}\,a\,\text{Tang.}\,x}$$

$$= \frac{\text{Tang.}\,a\,(1 + \text{Tang.}\,x^2)}{1 + \text{Tang.}\,a\,\text{Tang.}\,x}$$ Und da $1 + \text{Tang.}$

$x^2 = \text{Sec.}\,x^2$ so wird

$$\text{Tang.}\,x - \text{Tang.}\,(x-a) = \frac{\text{Tang.}\,a.\,\text{Sec.}\,x^2}{1 + \text{Tang.}\,a.\,\text{Tang.}\,x.}$$

Eben so wird

$$\text{Tang.}(c-x) - \text{Tang.}(b-x) = \frac{\text{Tang.}\,c - \text{Tang.}\,x}{1 + \text{Tang.}\,c.\,\text{Tang.}\,x}$$

$$- (\text{Tang.}\,b - \text{Tang.}\,x) = (\text{Tang.}\,c + \text{Tang.}\,c.\,\text{Tang.}\,b$$

$$\frac{}{1 + \text{Tang.}\,b.\,\text{Tang.}\,x}$$

$$\text{Tang.}\,x - \text{Tang.}\,x - \text{Tang.}\,b.\,\text{Tang.}\,x^2 - \text{Tang.}\,b - \text{Tang.}\,b.\,\text{Tang.}\,c.\,\text{Tang.}\,x + \text{Tang.}\,c.\,\text{Tang.}\,x^2 + \text{Tang.}\,x) : (1 + \text{Tang.}\,c.\,\text{Tang.}\,x)\,(1 + \text{Tang.}\,b.\,\text{Tang.}\,x)$$

$$= \frac{(\text{Tang.}\,c - \text{Tang.}\,b)\,(1 + \text{Tang.}\,x^2)}{(1 + \text{Tang.}\,c.\,\text{Tang.}\,x)(1 + \text{Tang}\,b.\,\text{Tang.}\,x)}$$

$$= \frac{(\text{Tang.}\,c - \text{Tang.}\,b)\,\text{Sec.}\,x^2}{(1 + \text{Tang.}\,c.\,\text{Tang.}\,x)\,(1 + \text{Tang.}\,b.\,\text{Tang.}\,x.}$$

Wenn man nun gehörig substituirt, so wird

$$m : n = \frac{\text{Tang. } a. \text{ Sin. } x^2 :}{1 + \text{Tang. } a. \text{ Tang. } x}$$
$$\frac{(\text{Tang. } c - \text{Tang. } b) \text{ Sec. } x^2}{}$$

$(1 + \text{Tang. } c. \text{Tang. } x)(1 + \text{Tang. } b. \text{Tang. } x$
$= \text{Tang. } a. (1 + \text{Tang. } c. \text{Tang. } x)(1 + \text{Tang. } b$
$\text{Tang. } x) : (\text{Tang. } c - \text{Tang. } b)(1 + \text{Tang. } a. \text{Tang. } x)$
indem man diese Proportion dadurch verändert, daß man jedes Glied durch das Product aus den Nennern multiplicirt. Es ist also auch
$(\text{Tang. } c - \text{Tang. } b)(1 + \text{Tang. } a. \text{Tang. } x)m = n$
$\text{Tang. } a(1 + \text{Tang. } c. \text{Tang. } x)(1 + \text{Tang. } b. \text{Tang. } x$
oder indem man wirklich multiplicirt
$n \text{Tang. } a. \text{Tang. } b. \text{Tang. } c (\text{Tang. } x)^2 + n \text{Tang. } a$
$\text{Tang. } c. \text{Tang. } x + n \text{Tang. } a. \text{Tang. } b. \text{Tang. } x +$
$n \text{Tang. } a = m(\text{Tang. } c - \text{Tang. } b) + m \text{Tang. } a$
$\text{Tang. } x (\text{Tang. } c. - \text{Tang. } b)$. Hieraus wird
$\text{Tang. } x^2 (n \text{ Tang. } a. \text{Tang. } b. \text{Tang. } c) + (\text{Tang. } a$
$(n \text{Tang. } c + n \text{Tang. } b + m (\text{Tang. } b - \text{Tang. } c))$
$\text{Tang. } x = m \text{ Tang. } c - m \text{ Tang. } b - n \text{ Tang. } a,$
oder wenn man mit n Tang. a. Tang. b. Tang. c dividirt, und vor $\frac{1}{\text{Tang.}}$ Cot. setzet, so wird

$$\text{Tang. } x^2 + \text{Tang. } x (\text{Cot. } b + \text{Cot. } c + \frac{m}{n}(\text{Cot. } b$$
$$- \text{Cot. } b) = \frac{m}{n}(\text{Cot. } b - \text{Cot. } c) \text{Cot. } a - \text{Cot. } b$$

Cot. c. Aus dieser Gleichung findet man den Werth der Tangente des Winkels x nach den bekannten Regeln, welche die Auflösung der quadratischen Gleichungen anzeigen. Man setze nehmlich

$$\text{Cot. } b + \text{Cot. } c + \frac{m}{n}(\text{Cot. } c - \text{Cot. } b) = P$$

$$\frac{m}{n}(\text{Cot. } b - \text{Cot. } c)\,\text{Cot. } a - \text{Cot. } b.\,\text{Cot. } c = Q$$

so hat man $\text{Tang. } x^2 + P\,\text{Tang. } x = Q$

und $\text{Tang. } x = -\frac{1}{2}P \mp \sqrt{\left(\frac{PP}{4} + Q\right)}$

Da man nun hieraus den Winkel AEP durch die bekannte Tangente findet, so ist auch der Winkel EAB, und also in dem Triangel AEB die Seite AB und die Winkel, folglich alles, bekannt, und dadurch findet man die Länge AD nach den gewöhnlichen trigonometrischen Regeln.

§. 689.

Anmerkung.

Diese letzte Gleichung giebt vor Tang. x zwey Werthe an, und es muß aus besondern Umständen ausgemacht werden, welcher derjenige ist, der die Aufgabe so auflöset, wie sie vorgetragen worden. Indessen ist dabey auch weiter keine Schwürigkeit, denn die Linien AD können auch
Fig. 60. die Lage B′C′ haben, so, daß die Theile AB′, C′D′ die zwischen die Schenkel der gegebenen Winkel AEB, CED fallen, eben die Verhältniß gegen einander haben, welche die Linien AB, CD gegen einander haben. Dahero kann einmal x, den Winkel AEP und das andre mal den Winkel AEP′ bedeuetn. Denn der Winkel AEP wird durch eben die Gleichungen, und durch die übrige Schlüße bestimt, welche wir vorhero gemacht haben. Dahero ist der

Werth

Werth des Winkels $x = AEP$, leicht von dem Werth $x = AEP'$ zu unterscheiden. Der positive Werth, der vor Tang. x aus der Gleichung komt, ist allezeit derjenige, welcher die Aufgabe so auflöset, wie sie vorgetragen worden.

Um hiervon ein Beyspiel zu geben, sey der Winkel $AEB = 15° = a$, $AEC = 60° = b$, $AED = 80° = c$, $m = 7,8$ Ruthen, $n = 46$ Ruthen, so wird $\frac{m}{n} = \frac{7,8}{46} = \frac{3,9}{23} = 0,17$

Ferner Cot. $60° = 0,57735 =$ Cot. b

Cot. $80° = 0,17632 =$ Cot. c

und Cot. b + Cot. $c = 0,75367$

Cot. c — Cot. $b = -0,40103$

$\frac{m}{n}$ (Cot. c — Cot. b) $= -0,068176$

folglich $P = 0,68550$

$\frac{m}{n}$ (Cot. b — Cot. c) Cot. $a = 0,06817 \times 3,73205 = 0,25441$. Ferner Cot. b Cot. $c =$ Cot. $60° \times$ Cot. $80° = 0,10169$, folglich $Q = 0,15272$. Und $\frac{1}{4}PP + Q = (0,34275)^2 + 0,15272 = 0,27027$, und $V\left(\frac{PP}{4} + Q\right) = V\,0,27020 = 0,51980$. Und also $-\frac{1}{2}P + V\left(\frac{PP}{4} + Q\right) = -0,34275 + 0,51980 = 0,17711$. Schlägt man nun in den Sinustafeln nach, so findet sich, daß diese Zahl, die Tangente des Winkels 10° 2′ ist, oder des Winkels

10°, wenn man es nicht sehr genau nimt. Es ist also der Winkel AEP = 10°, folglich der Winkel EAP = 180° — 10° — 90° = 80°. Folglich da AEB = 15° ist, so wird EBA = 85°. Ferner, da AEC = 60° ist, so wird ACE = 40°. Nun ist AB: AE = Sin. 15°: Sin. 85. Folglich Log. AE = Log. AB + Log. Sin. 85° — Log. Sin. 15°, und also Log. AE = 0, 8920946 + 9, 9983442 — 9, 4129962 = 1, 4774426. Dieser Logarithmus gehört zu der Zahl 30, folglich ist AE = 30 Ruthen. Nachdem also AE gefunden worden, so ist wieder AE: AC = Sin. ACE: Sin. AEC = Sin. 40°: Sin. 60°, folglich Log. AC = Log. AE + Log. Sin. 60° — Log. Sin. 40°

= 1, 4774426
9, 9375306
11, 4149732
9, 8080675

Log. AC = 1, 6069057 und AC = 40, 45 Ruthen.

§. 690.

Aufgabe.

ABCD ist ein Recktangel. In einem beliebigen Punkte E mißt man die Winkel AEB, BEC, CED, unter denen man zwey und zwey Ecken desselben siehet; man soll die Verhältniß der Seiten des Recktangels gegen einander bestimmen. Fig 61

§. 691.

§. 691.

Auflösung.

Man nenne die Winkel $AEH = a$, $BEC = HEI = c$, $CED = IED = b$, ziehe von E auf die Seiten AD, BC, die verlängert werden können, wenns nöthig ist, die perpendikulär Linien FE, EG, und nenne den Winkel $FEH = GEB = x$, so wird $FEA = a + x$, $FED = b + c + x$, $FEI = c + x$. Nun ist $EF : EG = FH : BG = FI : GC$, oder da $FA = BG$, und $GC = FD$ so ist $FH : FA = FI : FD$.

Es ist aber auch $FH : FA = \text{Tang. } x : \text{Tang. } a + x$ und $FI : FD = \text{Tang. } (c + x) : \text{Tang. } (b + c + x)$. Demnach ist
$\text{Tang. } x : \text{Tang. } (a + x) = \text{Tang. } (c + x) : \text{Tang. } (b + c + x)$, und also
$\text{Tang. } (a + x) - \text{Tang. } x : \text{Tang. } (a + x) + \text{Tang. } x = \text{Tang. } (b + c + x) - \text{Tang. } (c + x) : \text{Tang. } (b + c + x) + \text{Tang. } (c + x)$. Es ist aber

$$\text{Tang.}(a+x) - \text{Tang.}\, x = \frac{\text{Tang.}\, a + \text{Tang.}\, x}{1 - \text{Tang.}\, a\, \text{Tang.}\, x} - \text{Tang.}\, x =$$

$$\frac{\text{Tang.}\, a + \text{Tang.}\, x - \text{Tang.}\, x + \text{Tang.}\, a\, \text{Tang.}\, x^2}{1 - \text{Tang.}\, a\, \text{Tang.}\, x} =$$

$$\frac{\text{Tang.}\, a\,(1 + \text{Tang.}\, x^2)}{1 - \text{Tang.}\, a.\text{Tang.}\, x} = \frac{\text{Tang}\, a.\text{Sec.}\, x^2}{1 - \text{Tang.}\, a\, \text{Tang.}\, x}, \text{ und Tang.}(a + x) + \text{Tang.}\, x = \frac{\text{Tang.}\, a + 2\,\text{Tang.}\, x - \text{Tang.}\, a\, \text{Tang.}\, x^2}{1 - \text{Tang.}\, a\, \text{Tang.}\, x}.$$

Setzt man nun Tang. $a = \frac{\text{Sin. } a}{\text{Cos. } a}$, und Tang. $x = \frac{\text{Sin. } x}{\text{Cos. } x}$, so wird Tang. $(a + x) + \text{Tang. } x$

$$= \frac{\text{Sin. } a}{\text{Cos. } a} + \frac{2 \text{ Sin. } x}{\text{Cos. } x} - \frac{\text{Sin. } a \text{ Sin. } x^2}{\text{Cos. } a \text{ Cos. } x^2} =$$

$$\frac{1 - \text{Tang. } a \text{ Tang. } x}{\text{Sin. } a \text{Cos. } x^2 + \text{Sin. } x \text{Cos. } a \text{ Cos. } x + \text{Sin. } x \text{ Cos. } a \text{Cos. } x - \text{Sin. } a \text{Sin. } x^2}$$

$$= \frac{(1 - \text{Tang. } a. \text{ Tang. } x) \text{ Cos. } a. \text{ Cos. } x^2)}{\text{Cos. } x (\text{Sin. } a \text{Cos. } x + \text{Sin. } x \text{Cos. } a) + \text{Sin. } x (\text{Cos. } a \text{Cos. } x - \text{Sin. } a \text{Sin. } x)}$$

$$= \frac{(1 - \text{Tang } a \text{ Tang. } x) \text{ Cos. } a \text{ Cos. } x^2}{\text{Cos. } x \text{ Sin. } (a + x) + \text{Sin. } x \text{ Cos. } (a + x)} \quad (\S. 663)$$

$$= \frac{(1 - \text{Tang. } a \text{ Tang. } x, \text{ Cos. } a \text{ Cos. } x^2}{\text{Sin. } (a + 2x)} \quad (\S. 663.)$$

$$\frac{}{(1 - \text{Tang. } a \text{ Tang. } x)(\text{Cos. } a \text{ Cos. } x^2)}$$

Hieraus wird Tang. $(a + x) - \text{Tang. } x$: Tang. $(a + x) + \text{Tang. } x = \frac{\text{Sin. } a \text{ Sec. } x^2}{\text{Cos. } a (1 - \text{Tang. } a \text{ Tang. } x)}$:

$$\frac{\text{Sin. } (a + 2x)}{\text{Cos. } a \text{ Cos. } x^2 (1 - \text{Tang. } a \text{ Tang. } x)} =$$

$$\text{Sin. } a \text{ Sec. } x^2 : \text{Sin. } (a + 2x). \quad \text{Da nun Sec. } x^2 = \frac{1}{\text{Cos. } x^2}, \quad (\S. 313.) \text{ so wird}$$

Tang. $(a + x) - \text{Tang. } x$: Tang. $(a + x) + \text{Tang. } x = \text{Sin. } a$: Sin. $(a + 2x)$.

Und auf eben die Art findet man Tang. $(b + c + x) - \text{Tang. } (c + x)$: Tang. $(b + c + x) + \text{Tang. } (c + x) = \text{Sin. } b$: Sin. $(b + 2c + 2x)$. Man darf

nur

nur gedenken, daß b das, was vorhin a, und $c + x$ das bedeutet, was vorhin x war. Also ist

$\text{Sin.}\, a : \text{Sin.}\,(a + 2x) = \text{Sin.}\, b : \text{Sin.}\,(b + 2c + 2x)$

und

$\text{Sin.}\, a : \text{Sin.}\, b = \text{Sin.}\,(a + 2x) : \text{Sin.}\,(b + 2c + 2x)$

folglich auch

$\text{Sin.}\, a + \text{Sin.}\, b : \text{Sin.}\, a - \text{Sin.}\, b = \text{Sin.}\,(a + 2x) + \text{Sin.}\,(b + 2c + 2x) : \text{Sin.}\,(a + 2x) - \text{Sin.}\,(b + 2c + 2x)$

oder $\text{Tang.}\left(\frac{a+b}{2}\right) : \text{Tang.}\left(\frac{a-b}{2}\right) = \text{Tang.}\left(\frac{a+b+2c+4x}{2}\right) \text{Tang.}\left(\frac{a-b-2c}{2}\right)$

folglich ist $\text{Tang.}\left(\frac{a+b+2c+4x}{2}\right) = \frac{\text{Tang.}\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{Tang.}\left(\frac{a-b-2c}{2}\right)}{\text{Tang.}\left(\frac{a-b}{2}\right)}$.

§. 692.

Anmerkung.

Diese Aufgabe ist nun soweit aufgelöset, daß man in jeden vorkommenden Falle den Winkel x und daraus das übrige finden kann. Will man indessen die Tangente des Winkels x völlig entwikeln, so setze man erst der Bequemlichkeit wegen $\frac{a+b+2c}{2} = \alpha$, $\frac{a-b-2c}{2} = \beta$, $\frac{a+b}{2} = \gamma$, $\frac{a-b}{2} = \delta$, so wird $\text{Tang.}\,(\alpha + 2x) =$

$\frac{\text{Tang. } \gamma \text{ Tang. } \beta}{\text{Tang. } \delta}$, oder $\frac{\text{Tang. } \alpha + \text{Tang. } 2x}{1 - \text{Tang. } \alpha \text{ Tang. } 2x}$ $= \frac{\text{Tang. } \beta \text{ Tang. } \gamma}{\text{Tang. } \delta}$, folglich Tang. α, Tang. δ + Tang. δ Tang. $2x$ = Tang. β Tang. γ — Tang. α Tang. β Tang. γ. Tang. $2x$, folglich (Tang. δ + Tang. α Tang. β Tang. γ) Tang. $2x$ = Tang. β Tang γ — Tang. α Tang. δ und Tang. $2x$ = Tang. β Tang. γ − Tang. α Tang. δ

$$\frac{\text{Tang. } \delta + \text{Tang. } \alpha . \text{Tang. } \beta . \text{Tang. } \gamma}{}$$

Die erstere Formel ist aber deßwegen bequemer, weil man sie leicht durch Hülfe der Logaritmen berechnen kann. Wollte man hieraus weiter die Tangenten des Winkels x finden, so würde man auf eine quadratische Gleichung verfallen, welche man aber mit Fleiß vermeiden muß.

§. 693.

Aufgabe.

Die vier Objecte A, B, C, D sieht man sämtlich in den vier Stunden E, H, K, L, und mißt daselbst die vier Winkel, welche diese vier Objecte an den vier Punkten machen. Man soll die Lage aller dieser acht Punkte bestimmen.

§. 694.

Auflösung.

Man nehme an, daß man die Lage dieser Punkte schon wüßte, und lege die Linie BC zum Grunde, ziehe auf derselben von A und D die Linien

nien AF, DG perpendikulär und beschreibe ferner durch die Punkte A, B, C, und B, C, D zwey Zirkel. Man ziehe ferner die Linien *ab*, *ac*, *bc*, und $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$, so ist nach den Eigenschaften des Zirkels Fig. 62.

$$Ea : ab = EB : BA$$
$$Ea : ec = EC : CA$$
$$E\delta : \delta\gamma = EC : CD$$
$$E\delta : \delta\beta = EB : BD$$

Dahero $Ea = \frac{ab \cdot EB}{AB} = \frac{ac \cdot EC}{AC}$

$$E\delta = \frac{\delta\gamma \cdot EC}{CD} = \frac{\delta\beta \cdot EB}{BD}$$

und hieraus

$$\frac{EB}{EC} = \frac{ac \cdot AB}{ab \; AC} = \frac{\delta\gamma \cdot BD}{\delta\beta \; CD}$$

Es sey nun ferner der Winkel

$AEB = f$ $ABF = \omega$ $DBC = \mu$
$BEC = g$ $ACB = \gamma$
$CEC = h$ $DCG = \varphi$

So ist $ac : ab = \text{Sin. } abc : \text{Sin. } acb$

Es ist aber $abc = abB + cbB = baE + aEb + bcE + bEc$. Da nun die Triangel *ab*E, EAB einander ähnlich sind, desgleichen die Triangel E*bc*, FCB, so wird $baE = EBA$, $bcE = EBC$, folglich $abc = EBA + AEB + EBC + BEC = ABC + f + g = 180^\circ - \omega + f + g$. Nun ist aber Sin. $(180^\circ - \omega + f + g) = \text{Sin. } (\omega - f - g)$ folglich ist Sin. $abc = \text{Sin. } (\omega - f - g)$.

Ferner ist der Winkel acb dem Winkel aAb gleich, weil beyde auf den Bogen ab stehen, und der Winkel aAb ist so groß, als der Winkel $(AbB - AEb)$, und da die Winkel AbB, ACB auch auf einerley Bogen stehen, und daher einander gleich sind, so wird der Winkel $aAb = acb = (ACB - AEB) = \gamma - f$. Hieraus folgt also, daß

$ac : ab = \text{Sin.}(\omega - f - g) : \text{Sin.}(\gamma - f)$

und $AC = \text{Sin.}\, AB : \text{Sin.}\, \omega$.

Auf der andern Seite wird eben so bewiesen, daß $\text{Sin.}\, \beta\gamma\delta = \text{Sin.}(\varphi - h - g)$, und $\text{Sin.}\, \gamma\beta\delta = \text{Sin.}(\mu - h)$ ist, folglich ist

$\delta\gamma : \delta\beta = \text{Sin.}(\mu - h) : \text{Sin.}(\varphi - h - g)$

und $BD : CD = \text{Sin.}\, \varphi : \text{Sin.}\, \mu$

folglich wird $\frac{ac \times AB}{ab.AC} = \frac{\text{Sin.}\,\gamma\ \text{Sin.}(\omega - f - g)}{\text{Sin.}\,\omega\ \text{Sin.}(\gamma - f)}$

$\frac{\delta\gamma.BD}{\beta\delta.CD} = \frac{\text{Sin.}\,\varphi\ \text{Sin.}(\mu - h)}{\text{Sin.}\,\mu\ \text{Sin.}(\varphi - h - g)}$

Diese Werthe sind nun einander gleich, und um sie abzukürzen, entwickele man die Sinus der zusammengesetzten Winkel, so wird

$$\frac{\text{Sin.}\,\gamma\ \text{Sin.}\,\omega\ \text{Cos.}(f+g) - \text{Sin.}\,\gamma\ \text{Cos.}\,\omega\ \text{Sin.}(f+g)}{\text{Sin.}\,\omega\ \text{Sin.}\,\gamma\ \text{Cos.}\,f - \text{Sin.}\,f\ \text{Cos.}\,\gamma\ \text{Sin.}\,\omega} = \frac{\text{Sin.}\,\varphi\ \text{Sin.}\,\mu\ \text{Cos.}\,h - \text{Sin.}\,\varphi.\ \text{Sin.}\,h\ \text{Cos.}\,\mu}{\text{Sin.}\,\mu\ \text{Sin.}\,\varphi\ \text{Cos.}\,h + g - \text{Sin.}\,\mu\ \text{Cos.}\,\varphi\ \text{Sin.}\,h + g}$$

und wenn man mit $\text{Sin.}\,\gamma\ \text{Sin.}\,\omega$ auf der einen und mit $\text{Sin.}\,\varphi\ \text{Sin.}\,\mu$ auf der andern Seite dividirt, so wird, weil $\frac{\text{Cos.}}{\text{Sin.}} = \text{Cot.}$

Cos.

$$\frac{\text{Cos.}\,(f+g) - \text{Sin.}\,(f+g)\,\text{Cot.}\,\omega}{\text{Cos.}\,h - \text{Sin.}\,f\,\text{Cot.}\,\mu} = \frac{\text{Cos.}\,f - \text{Sin.}\,f\,\text{Cot.}\,\gamma}{\text{Cos.}\,(h+g) - \text{Sin.}\,(h+g)\,\text{Cot.}\,\varphi}$$

Man setze nun BC = 1, AF = P, FB = Q, DG = R, CG = S, so wird AF: FB = 1: Cot. ω = P: Q, folglich ist Cot. $\omega = \frac{Q}{P}$ Eben so Cot. $\varphi = \frac{S}{R}$ Ferner ist AF: FC = 1: Cot. FAB, folglich Cot. $\gamma = \frac{Q+1}{P}$, und auf eben die Art findet man Cot. $\mu = \frac{S+1}{R}$.

Setzt man nun diese Werthe in der letzten Gleichung, so wird

$$\frac{P.\,\text{Cos.}\,(f+g) - Q.\,\text{Sin.}\,(f+g)}{P\,\text{Cos.}\,f - (Q+1)\,\text{Sin.}\,f} = \frac{R.\,\text{Cos.}\,h - (S+1)\,\text{Sin.}\,h}{R\,\text{Cos.}\,(h+g) - S.\,\text{Sin.}\,(h+g)}$$

Multiplicirt man ferner durch das Product aus den Nennern, und bringt alle Glieder auf eine Seite, so erhält man diese Gleichung,

$$\left.\begin{array}{l} +\,Q.S.\,\text{Sin.}\,(f+g)\,\text{Sin.}\,(g+h) \\ -\,QR.\,\text{Sin.}\,(f+g)\,\text{Sin.}\,(g+h) \\ -\,PS.\,\text{Cos.}\,(f+g)\,\text{Sin.}\,(g+h) \\ +\,PR\,\text{Cos.}\,(f+g)\,\text{Cos.}\,(g+h) \\ -\,QS.\,\text{Sin.}\,f.\,\text{Sin.}\,h + QR.\,\text{Sin.}\,f\,\text{Cos.}\,h \\ +\,PS.\,\text{Cos.}\,f\,\text{Sin.}\,h - PR.\,\text{Cos.}\,f\,\text{Cos.}\,h \\ -\,Q.\,\text{Sin.}\,f\,\text{Sin.}\,h - S.\,\text{Sin.}\,f\,\text{Sin.}\,h \\ +\,P.\,\text{Cos.}\,f\,\text{Sin.}\,h + R.\,\text{Sin.}\,f\,\text{Cos.}\,h \\ \qquad - \text{Sin.}\,f\,\text{Sin.}\,h \end{array}\right\} = 0$$

Diese

Diese Gleichung muß man suchen bequemer einzurichten, und ist Sin. $(f+g)$ Sin. $(g+h) =$ (Sin. f Cos. g + Sin. g Cos. f) (Sin. g Cos. h + Sin. h Cos. g) $=$ Sin. g Cos. g (Sin. f Cos. h + Sin. h Cos. f) + Sin. g^2 Cos. f Cos. h + Cos. g^2 Sin. h Sin. $f =$ Sin. g Cos. g Sin. $(f+h)$ + Sin. g^2 Cos. f Cos. h + Cos. g^2 Sin. h Sin. f. Folglich QS. Sin. $(f+g)$ Sin. $(g+h)$ — QS. Sin. f Sin. $h =$ QS (Sin. g Cos. g Sin. $(f+h)$ + Sin. g^2 Cos. f Cos. h + (Cos. g^2 — 1) Sin. f Sin. h. Da nun Cos. $g^2 - 1 =$ — Sin. g^2, so wird hieraus

QS (Sin. $(f+g)$ Sin. $(g+h)$ — Sin. f Sin. $h) =$ QS. Sin. g Cos. g Sin. $(f+h)$ + Sin. g^2 (Cos. f Cos. h — Sin. f Sin. $h) =$ QS Sin. g (Cos. g Sin. $(f+h)$ + Sin. g Cos. $(f+h)$) $=$ QS Sin. g Sin. $(f+g+h)$ nach §. 663.

Auf eben die Art findet man

PR (Cos. $(f+g)$ Cos. $(g+h)$ — Cos. f Cos. h) $=$ — PR Sin. $g \asymp$ Sin $(f+g+h)$.

QR Sin. $(f+g)$ Cos. $(g+h)$ — QR Sin. f Cos. $h =$ QR Sin. g Cos. $(f+g+h)$, und

PS Cos. $(f+g)$ Sin. $(g+h)$ — PS Cos. f Sin. $h =$ PS Sin. g Cos. $(f+g+h)$.

Setzt man nun diese Werthe in der vorigen Gleichung, so verwandelt sich dieselbe in diese

(QS — PR) Sin. g Sin. $(f+g+h)$ — (FS + QR) Sin. g Cos. $(f+g+h)$ + R Sin. f Cos. h + P Cos. f Sin. h — (Q + S + 1) Sin. f Sin. h).

Um diese Gleichung zum Gebrauch noch bequemer einzurichten, setze man nach §. 666.

$$\text{Sin. } g \text{ Sin. } (f+g+h) = \frac{\text{Cos. } (f+h) - \text{Cos. } (f+2g+h)}{2}$$

$$\text{Sin. } g \text{ Cos. } (f+g+h) = \frac{\text{Sin. } (f+2g+h) - \text{Sin. } (f+h)}{2}$$

$$\text{Sin. } f \text{ Cos. } h = \frac{\text{Sin. } (f+h) + \text{Sin. } (f-h)}{2}$$

$$\text{Sin. } h \text{ Cos. } f = \frac{\text{Sin. } (f+h) - \text{Sin. } (f-h)}{2}$$

$$\text{Sin. } f \text{ Sin. } h = \frac{\text{Cos. } (f-h) - \text{Cos. } (f+h)}{2}$$

Wenn diese Werthe in der vorigen Gleichung substituirt werden, so bekomt man

$$\left.\begin{array}{l}(QS-PR)(\text{Cos. } (f+h) - \text{Cos. } (f+2g+h)) - \\ (PS+QR)(\text{Sin. } (f+2g+h) - \text{Sin. } (f+h)) + \\ R.(\text{Sin. } (f+h) + \text{Sin. } (f-h)) + P.(\text{Sin. } (f+h) - \\ \text{Sin } (f-h)) - (Q+S+1)(\text{Cos. } (f-h) - \text{Cos. } (f+h))\end{array}\right\} = 0$$

Diese Gleichung ist in sofern sehr bequem, weil man nicht nöthig hat, die Sinus und Cosinus in einander zu multipliciren, welches die Rechnung beschwerlicher und weitläuftiger machen würde.

§. 695.

Anmerkung.

Diese Gleichung ist lediglich durch den ersten Standpunkt E gefunden worden. Da nun jeder von den übrigen Punkten auch solche Gleichung giebt, so bekomt man in allen vier Gleichungen, und durch Hülfe derselben werden sich die Größen

P, Q,

P, Q, R, S bestimmen lassen. Es würde zu weitläuftig seyn, den Werth dieser Größen einzeln und allgemein zu bestimmen, die Gleichungen würden in der Ausübung viel Unbequemlichkeiten verursachen; dahero wird es besser seyn, durch ein Beyspiel zu zeigen, wie man sie finden muß. In dieser Absicht schreibe man die vorige Gleichung also

$$Q+S+1=(QS-PR)\frac{\text{Cos.}(f+h)-\text{Cos.}(f+2g+h)}{\text{Cos.}(f-h)-\text{Cos.}(f+h)}$$
$$-(PS+QR)\frac{\text{Sin.}(f+2g+h)-\text{Sin.}(f+h)}{\text{Cos.}(f-h)-\text{Cos.}(f+h)}$$
$$+R\frac{(\text{Sin.}(f+h)+\text{Sin.}(f-h))}{\text{Cos.}(f-h)-\text{Cos.}(f+h)}+$$
$$P\frac{\text{Sin.}(f+h)-\text{Sin.}(f-h)}{\text{Cos.}(f-h)-\text{Cos.}(f+h)}$$

oder nach §. 667. No. 7 & 9

$$Q+S+1=(QS-PR)\frac{(\text{Cos.}(f+h)-\text{Cos.}(f+2g+h))}{\text{Cos.}(f-h)-\text{Cos.}(f+h)}$$
$$-(PS+QR)\frac{(\text{Sin.}(f+2g+h)-\text{Sin.}(f+h))}{\text{Cos.}(f-h)-\text{Cos.}(f+h)}$$
$$+R\,\text{Cot.}\,h+P\,\text{Cot.}\,f.$$

§. 696.

Wenn man diese Formel in jeden vorkommenden Fall gebrauchen will, so muß man ausserdem, daß die Tangenten, Cotangenten, und die Cosinus der stumpfen Winkel, negativ bleiben, desgleichen die Tangenten und Cotangenten, und Sinus der negativen Winkel ebenfalls negativ sind, noch folgendes anmerken. Die Auflösung ist nur vor dem Fall eingerichtet, wenn die Punkte

B, C,

B, C, D alle rechter Hand der Linie liegen, die von jeden Standpunkt nach dem Punkt A gezogen wird, so, daß B rechter Hand A; C rechter Hand B; D rechter Hand C liegt. Wenn nun einer von den Punkten, oder etliche von denselben, eine Lage bekommen, die dieser entgegengesetzt ist, so werden die Winkel an jeden Standpunkt vor diesen Punkten negativ. Als wenn B linker Hand A liegt, so ist der Winkel $AEB = f$ negativ. Eben dieses wird seyn, wenn D linker Hand C fällt, alsdenn wird CED negativ. Nach diesen vorläufigen Erinnerungen will ich zu dem Exempel selbst schreiten.

Es sey also

Vor dem Standpunkt E		Vor dem Punkt H	
$f = AEB$	$= + 22° 30'$	AHG	$= + 63° 48'$
$g = BEC$	$= + 60° 44'$	BHC	$= + 107° 38'$
$h = CED$	$= - 18° 40'$	CHD	$= - 42° 20'$

Vor dem Punkt K		Vor dem Punkt L	
AKB	$= + 66° 20'$	ALB	$= + 31° 30'$
BKC	$= + 205° 58'$	BLC	$= + 277° 52'$
CKD	$= - 70° 38'$	CHD	$= - 32° 56'$

Hieraus wird nun ferner

Vor dem Punkt E		Vor dem Punkt H	
$f + 2g + h$	$= 125° 18'$	$f + 2g + h$	$= 236° 44$
$f + h$	$= 3° 50'$	$f + h$	$= 21° 28'$
$f - h$	$= 41° 10'$	$f - h$	$= 106\ 8'$

Vor dem Punkt K		Vor dem Punkt L	
$f + 2g + h$	$= + 407° 38'$	$f + 2g + h$	$= 554° 18'$
$f + h$	$= - 4' 18'$	$f + h$	$= - 1° 26'$
$f - h$	$= + 136° 58'$	$f - h$	$= + 64\ 26'$

Nun

Nun ist vor dem Punkt E

Cos. 125° 18′ = — Cos. 54° 42′ = — 0,57785
Sin. 125° 28′ = Sin. 54° 42′ = + 0,81613
Cos. 3° 50′ = Sin. 86 10′ = + 0,99776
Cos. 41° 10′ = Sin. 48 50′ = + 0,75279
Sin. 3° 50′ = = 0,06685
Cot. *h* = Cot. — 18° 40 = — 2,96004
Cot. *f* = Cot. 22° 30′ = + 2,41421

Vor dem Punkt H

Cos. 236° 44 = — Cos. 56° 44′ = — 0,54853
Sin. 236° 44′ = — Sin. 56° 44 = — 0,83612
Cos. 21° 28′ = ... 0,93063
Sin. 21° 28′ = ... 0,36595
Cos. 106° 8′ = — Cos. 73° 52′ = — 0,27787
Cot. *h* = Cot. — 42° 20 = — 1,09770
Cot. *f* = Cot. 63° 48′ = 0,49206

Vor dem Punkt K

Cos. 407° 38′ = Cos. 47° 38′ = 0,67387
Sin. 407° 38′ = Sin. 47° 38′ = 0,73884
Cos. (— 4° 18′) = + Cos. 4° 18′ = 0,99718
Sin. (— 4° 18′) = — Sin. 4° 18′ = — 0,07497
Cos. 136° 58′ = — Cos. 43° 2 = — 0,73095
Cot. (— 70° 38′) = — Cot. 70° 38′ = — 0,35150
Cot. *f* = Cot. 66° 20′ = 0,43827

Vor dem Punkt L

Cos. 554° 18, = Cos. 194° 18′ = — Cos. 14° 18 = — 0,96091
Sin. 554° 18 = Sin. 194° 18′ = — Sin. 14° 18′ = — 0,24699
Cos. (— 1° 26′) = Cos. 1° 26′ = 0,99968

Sin.

Sin. (— 1° 26) = — Sin. 1° 26′ = 0, 02501
Cos. 64° 26′ = " " " " " 0, 43156
Cot. (— 32° 56) = — Cot. 32° 56′ = — 1, 54379
Cot. (31° 30′) = " " " " = 1, 63185

Wenn man nun diese Werthe in der vorigen letzten Gleichung gehörig setzet, so bekomt man folgende vier Gleichungen

Q + S + 1 = 2,4142 P — 2,9600 R + 3,0587 (PS + QR) — 6,4320 (QS — PR)
Q + S + 1 = 0,4921 P — 1,0977 R — 0,9947 (PS + QR) — 1,2240 (QS — PR)
Q + S + 1 = 0,4383 P — 0,3515 R + 0,4709 (PS + QR) — 0,1871 (QS — PR)
Q + S + 1 = 1,6318 P — 1,5438 R — 0,3907 (PS + QR) — 3,4653 (QS — PR)

Man ziehe diese Gleichungen nach und nach von der ersten, so wird

0 = 1,9221 P — 1,8623 R + 4,0534 (PS + QR) — 5,2080 (QS — PR)
0 = 1,9759 P — 2,6085 R + 2,5878 (PS + QR) — 6,2449 (QS — PR)
0 = 0,7842 P — 1,4162 R + 3,4494 (PS + QR) — 2,9667 (QS — PR)

Man dividire ferner eine jede Gleichung durch den Coefficienten des letzten Gliedes rechter Hand, so wird

0 = 0,3691 P — 0,3576 R + 0,7783 (PS + QR) — (QS — PR)
0 = 0,3164 P — 0,4177 R + 0,4144 (PS + QR) — (QS — PR)

$o = 0{,}2637\,P - 0{,}4774\,R + 1{,}1627\,(PS + QR) - (QS - PR)$

Man ziehe wieder eine jede von der ersten ab, so wird

$o = 0{,}0527\,P + 0{,}0601\,R + 0{,}3639\,(PS + QR)$
$o = 0{,}1054\,P + 0{,}1198\,R - 0{,}3844\,(PS + QR)$

Man dividire wieder jede Gleichung, durch den Coefficienten des letzten Gliedes rechter Hand, so wird

$o = 0{,}1448\,P + 0{,}1652\,R + (PS + QR)$
$o = 0{,}2742\,P + 0{,}3117\,R - (PS + QR)$

Wenn man diese Gleichungen addirt, so erhält man

$o = 0{,}4190\,P + 0{,}4769\,R.$

Durch Hülfe dieser Gleichung bekomt man, indem man stuffenweise zurück gehet, folgende vier Gleichungen

1° $R = -0{,}8786\,P$
2) $PS + QR = -0{,}0003\,P$
3) $QS - PR = +0{,}6831\,P$
4) $Q + S + 1 = +0{,}6202\,P$

Aus diesen aber bekomt man wieder folgende, indem man sie verbindet,

5) $S - 0{,}8786\,Q = -0{,}0003$ (No. 1. 2)
6) $S + Q = -1 + 0{,}6202\,P$ (No. 4.)

7) $1{,}8786\,Q = -0{,}9997 + 0{,}6202\,P$ (No. 5. 6)

8) $Q = -0{,}5321 + 0{,}3301\,P$ (No. 7)
9) $S = -0{,}4679 + 0{,}2901\,P$ (No. 6. 8)

10) $QS = 0{,}2490 - 0{,}3088\,P + 0{,}0957\,P^2$ (No. 8. 9)
11) $QS = +0{,}6831\,P - 0{,}8786\,P^2$ (No. 1. 3)

12)

12) $0 = +0{,}2490 - 0{,}9919P + 0{,}9743P$ (No. 10. 11)

13) $P^2 - 1{,}0180P = -0{,}2555$. (No. 12.)

Hieraus bekomt man endlich, nach den bekannten Regeln

$$P = +0{,}5090 \mp \sqrt{((0{,}5090)^2 - 0{,}2555)}$$

und daher hat diese Größe zwey Werthe, welche sind

$$P = +0{,}5690$$
$$P = +0{,}4490$$

Nimt man nun den ersten Werth, so wird

$$R = -0{,}4998$$
$$Q = -0{,}3543$$
$$S = -0{,}3028$$

Hieraus bekomt man also

$$\text{Cot. } \omega = \frac{Q}{P} = -0{,}62267$$

$$\text{Cot. } \varphi = \frac{S}{R} = +0{,}60584$$

$$\text{Cot. } \gamma = \frac{Q+1}{P} = +0{,}11347$$

$$\text{Cot. } \mu = \frac{S+1}{R} = -0{,}13949$$

folglich auch

$\omega = 121^\circ\ 54^\circ$	$\gamma = 83^\circ\ 32'$
$\varphi = 58^\circ\ 48'$	$\mu = 97^\circ\ 56'$

oder

$\omega = -58^\circ\ 6'$	$\gamma = 83^\circ\ 32'$
$\varphi = {}^\circ 58\ 48'$	$\mu = -32^\circ\ 4'$

§. 697.

Wenn man diese Aufgabe construiren will, so ziehe man die gerade Linie BC, deren Länge

man nach Gefallen, und als die Einheit annimt, aus der die übrige Linien ausgedrückt werden.

Man nehme $BF = Q = -0,3543$ aber von B nach C zu, weil Q negativ ist. In F richte man die Linie FA perpendikulär auf, dergestalt aber, daß sie unterhalb BC fällt, weil P positiv ist, und mache $FA = +0,5690$, so wird dadurch der Punkt A bestimt. Fig. 63.

Ferner nehme man von C nach B zu die Linie $CG = -0,3028$. Denn weil dieselbe negativ ist, so muß sie eine solche Lage haben, welche derjenigen gerade entgegen gesetzt ist, in welcher sie in der Figur eingenommen worden, auf welcher sich die Auflösung gründet.

In G richte man wieder eine perpendikulär Linie auf, so aber, daß dieselbe oberhalb CB fällt, weil die Auflösung diese perpendikulär Linie, oder R negativ angiebt, und dieselbe also auch eine solche Lage haben muß, welche derjenigen gerade entgegen gesetzt ist, welche sie in der Figur hat, die zur Auflösung angenommen worden. Man mache $GD = 0,4998$, so wird dadurch der Punkt D bestimt.

Man hätte auch eben diese Punkte durch Hülfe der gefundenen Winkel bestimmen können, indem man diejenigen, so negativ oder stumpf sind, eine solche Lage giebt, die derjenigen gerade entgegengesetzt ist, welche sie in der Figur haben.

§. 698.

§. 698.

Diese Aufgabe ist unstreitig die schönste und nützlichste, welche man nur in der practischen Geometrie verlangen kann. Diese sinnreiche Auflösung haben wir der Scharfsinnigkeit des Herrn Lamberts zu danken, welcher dieselbe in seinen Beyträgen gegeben. Es ist dabey nur noch eine Unbequemlichkeit, daß die Größe P allezeit einen doppelten Werth hat, und man also den wahren Werth derselben erst aus andern Umständen bestimmen muß. Wenn man aber außer den Punkten A, B, C, D, noch einen andern Punkt T annimt, und aus jeden Standpunkt, die Winkel CET, CHT, CKT, CLT mißt, so bekomt man vier andre Gleichungen, aus denen man die Punkte A, B, C, D bestimmet, und aus diesen erhält man zwey andere Werthe vor P. davon einer nothwendig mit einen von den zuerst gefundenen einerley seyn muß, und dieses ist der Werth, welcher nicht allein die Lage der Punkte A, B, C, D, sondern auch die Lage der fünf Punkte A, B, C, D, T.

Denn der doppelte Werth von P rühret daher, weil die Punkte A und D sowohl in dem Zirkel der durch A, B, C, als auch in dem Zirkel der durch BCD geht, liegen können, folglich liegen diese Punkte in der geraden Linie AD, da wo dieselbe die beyde Zirkel durchschneidet, als in A, A′, D, D′.

Nimt man nun noch einen Punkt T an, und beschreibt durch B, C, T noch einen Zirkel, und zieht eie Linie AT, so durchschneiden sich die bey-

de Linien AD, AT in A, folglich muß A in dem Durchschnittspunkt derselben liegen. In beyden Fällen ist aber AF einerley, folglich muß man aus dieser Bedingung einen Werth von P bekommen, der schon da gewesen. Und dieser ist der Richtige.

Neunter Abschnitt.

Von den unbestimmten Aufgaben.

§. 699.

Aufgabe.

Man soll einen rechtwinklichten Triangel beschreiben, dessen gröste Seite oder Hypothenuse einer gegebenen geraden Linie gleich ist.

§. 700.

Vorbereitung.

Wenn man die Bedingungen dieser Aufgabe untersucht, so wird man leicht gewahr, daß dieselbe unbestimt ist. Man weiß nemlich, daß zur völligen Bestimmung eines Triangels, drey Stücke erfordert werden; da nun hier nur zwey gegeben werden, so wird man verschiedene Triangel beschreiben können, davon ein jeder so beschaffen ist, wie verlangt wird.

§. 701.

§. 701.

Auflösung.

Man beschreibe über die Linie AB, welche gegeben worden, oder der gegebenen geraden Linie gleich ist, einen halben Zirkel. Zieht man nun nach einen angenommenen Punkte C oder D in dem Umkreise desselben, von den äußersten Punkten A und B die gerade Linien EC, BC, oder AD, BD, so sind beyde Triangel rechtwinklicht, und die gröste Seite in denselben ist der gegebenen geraden Linie AB gleich. Fig. 66.

§. 702.

Will man diese Aufgabe algebraisch auflösen, so nenne man die gegebene Seite AB, a, und setze ABC sey der verlangte Triangel, und $AC = x$, $BC = y$, die verlangte Seiten desselben. Errinnert man sich nun aus der Geometrie, daß in einen rechtwinklichten Triangel, das Quadrat der grösten Seite so groß ist, als die Quadrate der beyden übrigen Seiten zusammengenommen, so bekomt man

$$x^2 + y^2 = aa$$

folglich $x^2 = aa - yy$

und $x = \mp V(a^2 - y^2)$

§. 703.

Anmerkung.

Es gehet nicht an, aus den Bedingungen der Aufgabe noch eine andre Gleichung zwischen x und y zu bekommen, welche doch erfordert wird, um den Werth einer von diesen beyden Größen völlig

zu bestimmen. In dieser Gleichung bleibt dahero die eine Größe unbestimt, und verändert sich allezeit wenn sich die andre verändert, und man sieht eben wie vorhin, daß man verschiedene Triangel findet, welche der Aufgabe ein Genüge thun.

Setzt man z. E. $a = 10$, und $y = 8$, so wird $x = \mp \sqrt{(100 - 64)} = \mp \sqrt{36} = \mp 6$. Setzt man hingegen $y = 5$, so wird $x = \mp \sqrt{(100 - 25)} = \mp \sqrt{75}$ eine irrational Größe, und so in andern Fällen.

§. 704.

Es sind also soviel verschiedene Triangel möglich, die alle einerley Hypothenuse a haben, soviel verschiedene Werthe man der Größe y geben kann, die kleiner sind, als 10. Nimt man y größer, als 10 an, so wird x eine unmögliche Größe. Z. E. wenn $y = 12$ gesetzt wird, so wird $x = \mp \sqrt{(100 - 144)} = \mp \sqrt{-44}$ eine eingebildete oder unmögliche Größe.

§. 705.

Erklärung.

Wenn man nach der Auflösung einer Aufgabe auf eine Gleichung komt, in der zwey oder mehrere unbekannte Größen vorkommen, davon eine jede nicht durch eine Gleichung bestimt werden kann, in der keine andre als bekannte Größen vorkommen, so heist eine solche Aufgabe eine unbestimte Aufgabe, (Problema indeterminatum) und die Größen x, y, z ꝛc. welche in dieser Gleichung befindlich sind, wer-

werden veränderliche oder unbestimmte Größen genennt. (Quantitates variabiles seu indeterminatæ).

§. 706.

Anmerkung.

Wenn zwey veränderliche Größen in der Gleichung vorkommen, so wird die eine allezeit in einen besondern Falle bestimt, wenn man der andern einen bestimmten Werth beylegt. Kommen in der letzten Gleichung drey veränderliche Größen vor, so wird eine bestimt, wenn man den beyden andern bestimte Werthe beylegt, und so geht es weiter fort. Da man nun diesen Größen verschiedene Werthe beylegen kann, so ist offenbar, daß eine unbestimte Aufgabe in verschiedenen Fällen möglich seyn kann. Um nun alle Fälle kennen zu lernen, müste man den unbestimten Größen alle mögliche Werthe beylegen. Indessen ist es genug, wenn man die Fälle anzeigt, in denen die Aufgabe möglich, oder die Grenzen bestimt, in denen die Möglichkeit derselben eingeschlossen ist. Auf diese Art findet man bey der vorigen Aufgabe, daß sie nur alsdenn möglich ist, wenn y kleiner, als $\mp a$ ist, und daß dieselbe unmöglich wird, sobald diese Größe größer, als $\mp a$ angenommen wird.

Es ist übrigens leicht zu begreifen, daß öfters unbestimte Aufgaben vorkommen müssen. Denn die Größen haben verschiedene Eigenschaften miteinander gemein, und einige, die ihnen wesentlich eigen sind, und sie von allen andern unterscheiden. Wird nun eine Aufgabe so vorgetragen, daß die Eigenschaften, welche die darinnen vorkommende Größen

mit andern gemein haben, blos gegeben werden, so ist offenbar, daß die Aufgabe nicht bestimt werden wird, sondern daß alle die Größen, welche diese Eigenschaften gemein haben, dieselbe auflösen werden. Die Aufgaben, welche bereits in den vorigen untersucht worden, werden leicht in unbestimmte verwandelt, wenn man einige oder mehrere Bedingungen wegläßt, welche zur völligen Bestimmung derselben erfordert werden. Um dieses zu zeigen, kann folgende Aufgabe dienen, welche bereits aufgelöset worden.

§. 707.

Aufgabe.

Ein Goldschmidt hat dreyerley Arten von Metall, die durch A, B, C angedeutet werden. Ein Mark von der ersten Maße A, hält 8 Loth Gold, und 8 Loth Silber, von der Maße B, 10 Loth Gold, und 6 Loth Silber, von der dritten Maße C, 14 Loth Gold und 2 Loth Silber. Er will daraus eine neue Composition machen, so, daß in einer Mark von derselben, 12 Loth Gold und 4 Loth Silber seyn sollen. Es ist nun die Frage, wie viel er von einem jeden Mark von den verschiedenen Maßen nehmen muß.

§. 708.

Auflösung.

Man nenne x die Quantität, welche er von der ersten Maße A, y die Quantität, welche er von der zweiten Maße B, und z diejenige, welche er

von

von der der dritten Maße C nehmen muß. Da nun ein Mark 16 Loth hält, so ist $16 : 8 = x :$ zu der Quantität des Goldes in x. Diese ist also $\frac{8x}{16}$. Eben so ist $\frac{10y}{16}$ die Quantität des Goldes in y, und $\frac{14z}{16}$ die Quantität des Goldes in z.

Gleichergestalt ist $\frac{8x}{16}$ die Quantität des Silbers in x, $\frac{6y}{16}$ die Quantität des Silbers in y, und $\frac{2z}{16}$ die Quantität des Silbers in z.

Es ist also $\frac{8x}{16} + \frac{10y}{16} + \frac{14z}{16} = 12$ Loth.

$$\frac{8x}{16} + \frac{6y}{16} + \frac{2z}{16} = 4 \text{ Loth.}$$

Zieht man nun die zweite Gleichung von der ersten ab, so wird

$$\frac{4y}{16} + \frac{12z}{16} = 8 \text{ Loth}$$

oder $\frac{4y}{4} + \frac{3z}{4} = 8$ Loth,

folglich $y + 3z = 32$ Loth

und $y = (32 - 3z)$ Loth.

Setzt man diesen Werth in der einen Gleichung, so wird

$$\frac{8x}{16} + \frac{10.32}{16} - \frac{3.10z}{16} + \frac{14z}{16} = 12 \text{ Loth,}$$

und

und wenn man mit 16 multiplicirt, und durch 8 dividirt, $x + 40 - 2z = 24$ Loth,
folglich $x = (2z - 16)$ Loth.

§. 709.

Anmerkung.

Weiter läst sich aus diesen Gleichungen nichts finden, und der Werth von z bleibt unbestimt. Sobald man aber der Größe z einen gewissen Werth beylegt, wird ein Fall bestimt, in dem die Aufgabe möglich ist. Man setze z. E. $z = 9$, so wird $x = 2$, und $y = 5$. Wenn also der Goldschmidt von der Maße A zwey Loth, von B fünf Loth, und von C neun Loth nimt, so wird die neue Composition so beschaffen seyn, wie er es verlangt. Eben dieses wird er aber auch erhalten, wenn er von C, zehn, von A, vier, und von B, zwey Loth nimt. Denn alsdenn ist die Quantität des Goldes in der Composition $\frac{32}{16} + \frac{20}{16} + \frac{140}{16} = 12$ Loth, und des Silbers $\frac{32}{16} + \frac{12}{16} + \frac{20}{16} = 4$ Loth, wie es verlangt worden.

Nimt man vor z gebrochne Zahlen, z. E
$z = \frac{17}{2}$ Loth, so wird $x = 1$, $y = 6\frac{1}{2}$
$z = \frac{19}{2}$ Loth, $x = 3$, $y = 7\frac{1}{2}$
und so in mehrern Fällen.

Es

Es kann aber auch geschehen, daß der Werth von einer, oder der andern Größe negativ wird. Z. E. wenn $z = 7$ angenommen wird, so bekomt man $x = -2$, und $y = 11$. Dieses zeigt also an, daß, wenn man von der Maße C, 7 Loth, und von der Maße B, 11 Loth genommen hat, und daraus eine Vermischung gemacht, man von derselben wieder soviel Gold und Silber wegnehmen muß, als in zwey Loth von der ersten Maße enthalten sind.

§. 710.

Aufgabe.

Es werden zwey ganze Zahlen gegeben, man soll zwey andre Zahlen finden, die so beschaffen sind, daß, wenn man durch dieselben, die erste von die gegebene Zahlen multiplicirt, und die, durch diese Multiplication entstandene Produckte, durch die andre gegebene Zahl dividirt, auf beyden Seiten gleich viel übrig bleibet.

§. 711.

Auflösung.

Es sollen n und d die gegebene Zahlen seyn, x und y aber diejenige Zahlen, welche man verlangt. Diese beyde leztern müssen also so beschaffen seyn, daß, wenn man nx durch d dividirt, und es bleibt die Zahl r übrig, eben diese Zahl r auch übrig bleibt, wenn man ny durch d dividirt.

Man

Man setze also p sey der Quotient, wenn nx durch d dividirt wird, und q der Quotient, wenn ny durch d dividirt wird. Ferner nehme man an, daß x größer, als y seyn soll, so ist

$$nx = dp + r$$
$$ny = dq + r$$

Ziehet man das kleinere von den größern ab, so wird $nx - ny = dp - dq$

oder $n(x-y) = d(p-q)$

und $x - y = \frac{d(p-q)}{n}$

Wenn nun diese Zahlen n, d, p, q, gegeben, oder nach Gefallen angenommen werden, so kann man unendlich viel Zahlen vor x und y finden, welche dieser Aufgabe ein Genüge thun. Und man sieht leicht ein, daß diese Aufgabe wieder unbestimt ist.

§. 712.

Anmerkung.

Es sey z. E. $n = 3$, $d = 7$, $p = 8$, $q = 2$, so wird $x - y = \frac{7.6}{3} = 14$. Nimt man nun $x = 19$, so wird $y = 5$, und es ist $\frac{nx}{d} = \frac{3.19}{7} = \frac{57}{7} = 8 + \frac{1}{7}$, $\frac{ny}{d} = \frac{3.5}{7} = 2 + \frac{1}{7}$. In beyden Fällen bleibt also gleichviel, nemlich 1 übrig.

§. 713.

§. 713.

Bey einer unbestimmten Aufgabe kann man noch verschiedene Fragen aufwerfen, welche die Einrichtung der Aufgabe betreffen. Besonders kann man fragen, wie die gegebene Größen beschaffen seyn müssen, damit diejenige Größen, welche man sucht, gewisse Eigenschaften haben. So kann z. E. bey der vorigen Aufgabe die Frage entstehen, wie die Zahlen, n, d, p, q ꝛc. beschaffen seyn müssen, damit die gesuchte Zahlen x und y ganze Zahlen werden. Wenn nur n und d allein gegeben werden, so komt es blos auf eine geschickte Wahl unter den Zahlen an, welche man vor die Buchstaben, oder Quotienten p und q setzen kann. Nun ist offenbar, daß x und y allezeit ganze Zahlen werden, wenn man vor p und q solche Zahlen setzt, daß $\frac{d(p-q)}{n}$ eine ganze Zahl wird. Denn wenn die Differenz zweyer Zahlen eine ganze Zahl ist, so müssen die Zahlen nothwendig selbst ganze Zahlen seyn. Dieses wird aber hier erhalten, wenn man p und q so annimt, daß sich $p - q$ durch n so dividiren läst, daß nichts übrig bleibt.

§. 714.

Die gegebene Zahlen n und d, welche nach den Bedingungen der Aufgabe, ganze Zahlen seyn sollen, sind entweder prim Zahlen, oder zusammengesetzte. Schreibt man daher die zuletzt gefundene Gleichung auf diese Art, $\frac{n}{d} = \frac{p-q}{x-y}$, so kann

$p - q$

$p - q$ kleiner seyn, als n, und $x - y$ kleiner, als d, wenn n und d zusammengesetzte Zahlen sind, und demohngeachtet, können alle die Zahlen x, y, p, q, ganze Zahlen seyn. Sind aber n und d prim Zahlen, oder solche, die keine Theiler haben, so kann $p - q$ niemals kleiner seyn, als n, und $x - y$ kleiner, als d, sobald man haben will, daß die Zahlen p, q, x, y, ganze Zahlen seyn sollen. Aus diesen Betrachtungen läßt sich denn folgender Schluß ziehen.

§. 715.

1. Zusatz.

Wenn zwey ganze Zahlen n und d gegeben werden, welche prim Zahlen sind, so ist es nicht möglich, zwey andre ganze Zahlen x und y zu finden, die kleiner sind, als die gegebene Zahl d, dergestalt, daß wenn man die Zahl n durch dieselben multiplicirt, und die Producte nx, ny durch d dividirt, nach der Division einerley Zahl r übrig bleibt. Nimt man also nach und nach $\frac{n}{d}, \frac{2n}{d}, \frac{3n}{d}$ ..... $\frac{dn}{d}$, so sind alle die Zahlen, welche nach geschehener Division übrig bleiben, verschieden. Da nun soviel dergleichen Brüche gemacht werden können, als Einheiten von 1 bis d sind, so kommen unter den Zahlen, welche übrig bleiben, auch alle die Zahlen von 1 bis d vor. Man kann also den Zähler eines jeden gegebenen Bruchs $\frac{n}{d}$, der auf

die

die kleinste Benennung gebracht worden, durch eine andre ganze Zahl x, welche kleiner, als der Nenner d ist, multipliciren, dergestalt, daß wenn man das dadurch entstehende Product nx durch d dividirt, eine jede gegebene Zahl r übrig bleibt, welche kleiner ist, als d. Wenn aber diese Zahl r, die übrig bleiben soll, gegeben ist, so ist nur eine einzige ganze Zahl x möglich, welche zu dieser Absicht dienet.

§. 716.

2. Zusatz.

Sind nun N und D prim Zahlen und x ist eine von den ganzen Zahlen, welche den Umständen gemäß angenommen werden muß, und kleiner, als D; der Buchstabe r bedeutet aber eine gegebene ganze Zahl, welche auch kleiner, als D ist, so kann man x allezeit so annehmen, daß $\frac{Nx - r}{D}$ eine ganze Zahl ist. Denn es ist offenbar, daß, wenn x dergestalt angenommen wird, daß $\frac{Nx}{D}$ eine ganze Zahl r übrig läßt, und man ziehet diese Zahl r von Nx ab, der Quotient $\frac{Nx - r}{D}$ nothwendig eine ganze Zahl seyn muß.

§. 717.

3. Zusatz.

Wenn die vorige Bedingungen beibehalten werden, so ist auch $Nt - m + \frac{Nx - r}{D}$ eine

ganze Zahl, wenn t und m ganze Zahlen sind. Bringt man diesen Ausdruck auf einerley Benennung, so ist auch $\frac{NDt - Dm + Nx - r}{D}$

oder $\frac{N(Dt + x) - (Dm + r)}{D}$ eine ganze Zahl. Nun kann $Dm + r$ eine jede ganze Zahl seyn, weil r eine jede ganze Zahl von o bis d seyn kann, (§. 715.) und diese Zahl $Dm + r$ kann auch negativ seyn, wenn m negativ wird. Setzt man nun $Dm + r = R$, und $Dt + r = X$, so wird der vorige Ausdruck, $\frac{NX - R}{D} = Q$

Hieraus folgt denn, daß wenn N und D unter sich prim Zahlen sind, R aber eine gegebene ganze Zahl ist, *man allezeit eine ganze Zahl finden kann*, die, wenn sie vor x gesetzt wird, eine ganze Zahl Q zum Quotienten hervorbringt. Hier aber wird R nicht kleiner, als D angenommen, folglich kann man vor R unendlich viel Zahlen setzen. Nimt man nun Q nach Gefallen an, so findet man

$$X = \frac{DQ + R}{N}$$

folglich wenn $Q = 1$ gesetzt wird,

$$X = \frac{D + R}{N}$$

§. 718.

Aufgabe.

Es wird die Lage zweyer geraden Linien AB, AC gegeben, man soll den Punkt D finden, der so

so beschaffen ist, daß wenn man von demselben die gerade Linien DE, DF, dergestalt auf AB und AC ziehet, daß sie mit denselben gegebene Winkel einschließen, die Verhältniß dieser Linien DE und DF, einer gegebenen Verhältniß gleich ist. Fig. 67.

§. 719.

Vorbereitung.

Weil die Lage der geraden Linien AB, AC gegeben wird, so wird auch der Winkel gegeben, unter dem sich dieselben durchschneiden, welches hier der Winkel CAB ist. Da ferner die Winkel gegeben werden, welche die Linien DE, DF, mit den Linien AB, AC einschließen sollen, so werden auch die Sinus, Cosinus ꝛc. dieser Winkel gegeben. Wenn nun D der verlangte Punkt wäre, und DE die verlangte Linie, und man verlängerte DE bis sie die Linie AC in C durchschnitte, so würde man auf diese Art einen Triangel ABC bekommen, in dem die Winkel CAB, DEB, folglich auch ACB bekant sind, und dahero durch die Sinus dieser Winkel die Verhältniß der Seiten gegeben wird.

Damit aber der Punkt D bestimt wird, muß man nothwendig die Länge der Linie DE und die Entfernung des Punkts E, wo die Linie DE die Linie AB durchschneidet, von A, oder die Länge der Linie AE, wissen. Beides aber muß aus dem bestimt werden, was in der Aufgabe gegeben wird.

§. 720.

Auflösung.

Man setze also D sey der verlangte Punkt, und E, F diejenige Punkte, wo die Linien DE, DF die Linien AB, AC, unter den gegebenen Winkeln durchschneiden. Diese gegebene Winkel aber sollen CAB = A, DEA = E, DFA = F, ECA = C seyn. Ferner sey AE = x, DE = y, und a: b die Verhältniß, welche gegeben worden, und der die Verhältniß DE: DF gleich seyn soll. Es ist aber in dem Triangel ACE, AE: CE = Sin. C: Sin. A, folglich, da AE = x ist, wird $CE = \frac{x \cdot \text{Sin. A}}{\text{Sin. C}}$. Und da DE = y, so wird $CD = CE - DE = \frac{x \text{ Sin. A}}{\text{Sin C}} - y$. Ferner ist CD: DF = Sin. F: Sin. C, und also $DF = \frac{CD \cdot \text{Sin. C}}{\text{Sin. F}}$, oder, wenn man vor CD den eben gefundenen Werth setzet, $DF = \frac{x \cdot \text{Sin. A} - y \cdot \text{Sin. C}}{\text{Sin. F}}$.

Nach den Bedingungen der Aufgabe soll aber DE: DF = a: b seyn, folglich wird

$y : \frac{x \text{ Sin. A} - y \text{ Sin. C}}{\text{Sin. F}} = a : b$, und

$by = \frac{ax \cdot \text{Sin. A} - ay \cdot \text{Sin. C}}{\text{Sin. F}}$, oder $by \cdot \text{Sin. F} = ax \text{ Sin. A} - ay \text{ Sin. C}$, und $by \text{ Sin. F} + ay \text{ Sin. C} = ax \text{ Sin. A}$. Folglich wird hieraus

$y =$

$$y = \frac{a \text{ Sin. A. } x}{b \text{. Sin. F} + a \text{. Sin. C}}$$

oder wenn man Sin. A $= m$, Sin. F $= n$, Sin. C $= p$ setzet,

$$y = \frac{amx}{bn + ap.}$$

§. 721.

Diese Gleichung zeigt also wieder, daß die Aufgabe unbestimt ist, und mehr Punkte möglich sind, welche so beschaffen, als der Punkt D verlangt wird. Denn sobald man der Größe x einen andern Werth beylegt, sobald wird auch die Größe y einen andern Werth bekommen. Indessen kann y niemals unmöglich werden, man mag die Größe x so groß, oder so klein als man will, positiv, oder negativ annehmen. Alle Werthe der Größe y lassen sich aber auf eine geometrische Art folgendergestalt bestimmen.

§. 722.

Man weis aus der Geometrie, daß, wenn man einen Triangel AKH hat, und man verlängert die Seiten AK, AH, und zieht nach Gefallen mit HK eine gerade Linie MN parrallel, welche die Seiten AK, AH in M und N durchschneidet, die Verhältniß der Linie AM zu der Linie MN der Verhältniß AK: HK beständig gleich ist, so groß man auch die Linie AM annimt. (Euc. 6. 2) Um nun alle mögliche Werthe anzugeben, welche die Linie y bekommt, wenn man die Linie x ver- Fig 68.

schiedentlich annimt, nehme man auf der Linie AB die Linie AK, und ziehe die Linie HK in K
Fig 67 dergestalt, daß der Winkel AKH dem Winkel E gleich ist, mache AK: KH = b. Sin. F + a Sin. C: a Sin. A, und ziehe durch H und A eine gerade Linie AG, so ist dieselbe so beschaffen, daß, wenn man in derselben einen Punkt D nach Gefallen annimt, und von demselben auf AB und AC die Linien DE, DF, unter den gegebenen Winkeln E, F zieht, die Verhältniß DE: DF der gegebenen Verhältniß a: b gleich ist. Denn die Triangel DEA, HKA sind einander ähnlich. Folglich wenn man AE = x, und DE = y setzet, so wird x: y = AK: KH = b. Sin. F + a Sin. C: a Sin. A, und also

$$y = \frac{ax.\ \text{Sin. A}}{b.\ \text{Sin. F} + a.\ \text{Sin. C}}$$

wie es die Auflösung verlangt.

§. 723.

Anmerkung.

Alle die Punkte D, welche den Bedingungen der Aufgabe ein Genüge leisten, liegen demnach in der geraden Linie AG. Wenn man nun die Länge der Linie x willkührlich annimt, so kann man den Ort des Punkts D den Augenblick bestimmen. Aus dieser Ursach wird auch die Linie AG der geometrische Ort, aller Punkte genent, welche, wie D, die Aufgabe auflösen. (Locus geometricus) Die Alten haben sich mit der Bestimmung der geometrischen Oerter sehr mühsam beschäftigt, und nachdem die Algebra

gebra auf die Geometrie angewandt worden, haben die neuern Geometer auch ihren Fleiß nicht gespa-ret, sondern dieselben durch Gleichungen ausgedrückt, und die Kennzeichen angegeben, wie man aus der Beschaffenheit der Gleichung, die Natur des Orts ohne viel Umstände kennen lernen kann. Die Alten unterschieden besonders dreyerley Art Oerter: Die ebene Oerter, (Locos planos) und darunter verstanden sie alle die Aufgaben, die so beschaffen waren, daß alle die Punkte, welche dieselben auflöseten, entweder in einer geraden Linie, oder in einen Zirkel lagen. Lagen aber alle die Punkte, durch die eine Aufgabe aufgelöset wurde, in einen von den Kegelschnitten, so gehörte die Aufgabe mit unter die Locus solidos, alle übrige Oerter wurden Loci lineares genent.

§. 724.

Aufgabe.

Es wird die Lage zweyer geraden Linien AB, AC gegeben, man soll den Punkt D finden, dergestalt, daß, wenn man von demselben die Linien DE, DF mit den gegebenen Linien parrallel zieht, das Quadrat der Linie DE, dem Recktangel aus der Linie DF in einer gegebenen geraden Linie *a* gleich ist. Fig. 69.

§. 725.

Auflösung.

Es sey D der verlangte Punkt, und DE mit AC, und DF mit AB parrallel. Weil nun die Figur AEDF ein Parrallellogrammum ist, so wird DF = AE, und der Punkt D bestimt, wenn man

DE, und AE weiß. Es sey also $AE = x$, und $DE = y$, so muß nach den gegebenen Bedingungen $yy = ax$ seyn.

§. 726.

Anmerkung.

Dieses ist die einzige Gleichung, welche man aus den Bedingungen bekomt, unter welchen die Aufgabe vorgetragen worden. Es giebt also verschiedene Punkte, welche, wie D, die vorausgesetzte Eigenschaft haben, und es ist offenbar, daß dieselben nicht in einer geraden Linie liegen können. Denn wenn man die Gleichung in diese Proportion $a : y = y : x$ auflöset, so sieht man leicht, daß die Verhältniß $y : x$ nicht beständig einerlei ist, welches sie aber seyn müste, wenn die Punkte D in einer geraden Linie lägen.

Wenn man $x = o$ setzet, so wird $y = o$ und die krumme Linie geht durch den Punkt A. Giebt man aber der Linie x einen andern Werth, welcher positiv ist, so wird die Linie y allezeit zwey Werthe bekommen, davon der eine positiv, der andre aber negativ ist: denn es ist allezeit $y = \mp \sqrt{ax}$.

Fig. 70 Nimt man demnach auf der Linie AB, x so groß, als AP, und zieht durch P die Linie MN parallel mit AC, so kann man $PM = +\sqrt{ax}$ auf der einen Seite von AB auf der Linie MN, und $PN = -\sqrt{ax}$ auf eben dieser Linie MN, aber auf der andern Seite von AB nehmen, und dadurch werden die Werthe von y, in Absicht auf die Bedeutung des positiven und negativen Zeichens bestimt.

bestimt. Da man nun der Linie x unendlich verschiedene Werthe beilegen kann, davon der eine immer größer ist, als der andre, so sieht man, daß alle Punkte D in einer krummen Linie liegen, die auf beyden Seiten der Linien AB ohne Ende fortgehet.

Setzt man hingegen x negativ, oder welches einerley ist, nimt man auf der Linie AB, die Linie AP von A nach D zu, anstatt daß sie vorhin von A nach B zu genommen worden, so wird $y = \mp \sqrt{-ax}$, folglich imaginär, und dieses ist ein Beweis, daß man auf der andern Seite der Linie AC, zu einer angenommenen Linie AP', keinen einzigen Punkt M' finden kann, der so beschaffen wäre, als es die Aufgabe verlangt. Fig. 71.

§. 727.

Alle Punkte dieser Linie lassen sich aber geometrisch auf folgende Art bestimmen. Auf der Linie AC nehme man $AF = a$, und ziehe durch F mit AB die Linie IK parrallel, auf der Linie IK schneide man von F nach I zu die Linien FG, FH, FI ꝛc. und nehme auf AC, von A nach C zu, die Linien $Ag = FG$, $Ah = FH$, $Ai = FI$ ꝛc. Eben so nehme man auf der andern Seite von F die Linien FG', FH', FI' ꝛc. und trage dieselben auf der Linie AC von A nach F zu dergestalt, daß $Ag' = FG'$, $Ah' = FH'$, $Ai' = FI'$ ꝛc. wird. Fig. 72.

Wenn dieses geschehen, so ziehe man durch die Punkte g, h, i ꝛc. g', h', i' gerade Linien, mit

AB oder IK parrallel, und durch A und die Punkte G, H, I ꝛc. G′, H′, I′ ꝛc. andre Linien, welche die vorigen in M″, M′, M ꝛc. m'', m', m durchschneiden, so sind alle diese Punkte in der krummen Linie, welche die Aufgabe auflöset.

§. 728.

Um dieses zu beweisen, ziehe man PM mit AC parrallel, so sind die Triangel IFA, APM einander ähnlich, und es ist FA: IF = PM: AP. Es ist aber Ai = PM. Da nun auch Ai = IF, so wird auch FI = PM, folglich ist FA: PM = PM: AP. Nent man nun AP, x, PM, y, so wird, da FA = a (§. 725.) auch $a : y = y : x$, folglich $yy = ax$. Eben dieser Beweis läst sich leicht auf alle übrige Punkte anwenden. Diese krumme Linie bestimt also den Ort aller Punkte, welche der Aufgabe ein Genüge leisten, und ist auch sonst unter den Nahmen der Parabel bekant.

§. 729.

Aufgabe.

Es wird eine gerade Linie AB gegeben, man soll außerhalb derselben einen Punkt M finden, dergestalt, daß, wenn man von demselben, auf AB die gerade Linie MP unter einen gewissen gegebenen Winkel zieht, der Punkt P diese gerade Linie AB dergestalt theilet, daß die Verhältniß des Recktangels aus den beyden Theilen AP, PB zu dem Quadrate der Linie PM, einer gegebenen Verhältniß gleich ist.

§. 731.

Auflösung.

Es sey DAB der Winkel, welchen die von dem Punkt M auf AB gezogene Linie PM mit AB einschließen soll. Die ganze Länge der gegebenen Linie AB sey a, und die Verhältniß, der die Verhältniß des Rechtangels aus AP und PB, zu dem Quadrate der Linie PM, gleich seyn soll, Fig. 73. sey $mm : nn$, oder die Verhältniß, welche das Quadrat der Linie m zu dem Quadrat der Linie n hat. Ferner sey $PM = y$, $AP = x$, so wird nach den Bedingungen der Aufgabe

$$AP \times PB : PM^2 = m^2 : n^2$$

Bedienet man sich nun der Buchstaben, so wird

$$x(a - x) : y^2 = m^2 : n^2$$

folglich ist $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(ax - x^2)$

die Gleichung, welche den Ort des Punkts M bestimt.

§. 731.

Anmerkung.

Um den Ort aller dieser Punkte M kennen zu lernen, wollen wir die Gleichung etwas genauer untersuchen.

Nun ist erstlich $y = \mp \frac{n}{m}\sqrt{(ax - xx)}$.

Wenn man dahero der Linie x einen gewissen bestimmten Werth beylegt, so findet man allezeit zwey Punkte auf der geraden Linie, welche mit AB den gege-

gegebenen Winkel einschließt, und diese liegen auf verschiedenen Seiten der Linie AB.

2) Wenn man $x = o$ setzet, so wird $y = \mp \frac{n}{m} \sqrt{(ao - o^2)} = \mp o$. Folglich geht die Linie, in der alle die Punkte M liegen, durch A.

3) So lange x kleiner, als a, so bekomt y allezeit zwey wirkliche Werthe, welche einander gleich sind, und man findet allezeit zwey Punkte, die wie M der Aufgabe ein Genüge leisten.

4) Sobald aber $x = a$, so wird $y = \frac{n}{m} \sqrt{(a^2 - a^2)} = \mp o$. Hieraus folgt denn ferner, daß auch diese krumme Linie durch den andern Endpunkt B der geraden Linie AB geht.

5) Nimt man aber x größer, als a an, als wenn man $x = a + b$ setzet, so wird $y = \mp \frac{n}{m} \sqrt{(a + ab - a^2 - 2ab - b^2)}$, oder $y = \mp \frac{n}{m} \sqrt{(- ab - b^2)}$. Weil also die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ ist, so ist der Werth der Größe y imaginär, folglich findet man in diesem Falle keinen Punkt M, der die verlangte Eigenschaften hat.

6) Eben dieses geschieht auch, wenn x negativ, oder auf der andern Seite von A genommen wird. Die Linie also, in der alle die Punkte liegen, welche zur Auflösung der Aufgabe geschickt sind, ist

eine

eine krumme Linie, welche in einen endlichen Raum eingeschlossen ist, und durch beyde Punkte A und B geht.

§. 732.

Alle diese Punkte M lassen sich aber auf folgende Art geometrisch finden. Man theile die Linie AB in C in zwey gleiche Theile, und ziehe durch C die Linie CE mit AD parrallel. Ferner nehme man die Linie CE dergestalt, daß die Verhältniß der Linie AC zu der Linie CE der Verhältniß $m : n$ gleich sey. Wenn dieses geschehen, so Fig. 74. suche man zu AB und 2CE die dritte proportional Linie, und nehme auf der verlängerten Linie AD die Linie AF, welche dieser gefundenen dritten proportional Linie zu AB und 2CE gleich ist, und ziehe durch F die Linie FK mit AB parrallel.

Nunmehro schneide man auf der Linie FK die Linien FG, FH, FI ꝛc. ab, und nehme von A nach D zu, auf der Linie AD, die Linien $Ag = FG$, $Ah = FH$, $Ai = FI$ ꝛc. Von den Punkten G, H, I ꝛc. ziehe man durch A die gerade Linien GA, HA, IA ꝛc. und von B durch die Punkte g, h, i ꝛc. die Linien Bg, Bh, Bi, welche die vorigen in M″, M′, M ꝛc. durchschneiden, so sind die Punkte M″, M′, M in der verlangten krummen Linie.

§. 733.

Um dieses zu beweisen, ziehe man von M die Linie MP mit AD parrallel, so sind die Triangel ABi,

AB*i*, PBM einander ähnlich, und es ist AB: A*i* = BP: PM.

Ferner sind auch die Triangel IFA, APM einander ähnlich, folglich ist auch FI: FA = AP: PM. Weil aber FI = A*i* nach der Construction, und man setzt diese Verhältnisse zusammen, daß ist, man multiplicirt die Glieder in einander, so wird

AB: FA = BP. AP: PM²

folglich auch AB²: FA. AB = BP. AP: PM²

Es ist aber AB: 2CE = 2CE: FA

folglich ist FA. AB = 4CE²

und da AB = 2CA

so wird AB² = 4CA²

Setzt man gleiches vor gleichen in der letzten Proportion, so wird

$4AC^2 : 4CE^2 = BP.\ AP : PM^2$

oder $AC^2 : CE^2 = AP.\ BP : PM^2$

Setzt man nun AB = a, AP = x, PM = y, so wird BP = $a - x$, und weil nach der Construction AC: CE = m: n, so ist

$m^2 : n^2 = x(a - x) : y^2$

folglich $y^2 = \frac{n}{m^2}(ax - x^2)$

Wie es die Bedingungen der Aufgabe verlangen.

Diese Linie, deren Beschreibung hier eben gezeigt worden, wird die Ellipse genent, und die Gleichung $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(ax - x^2)$ heist die Gleichung, welche die Natur derselben ausdrückt.

§. 736.

§. 734.

Aufgabe.

Es werden zwey gerade Linien MN, PQ gegeben, welche sich in A durchschneiden. Eine gerade Linie DE, deren Länge gegeben ist, und unveränderlich bleibt, bewegt sich zwischen den Schenkeln des Winkels um A dergestalt, daß die äußerste Punkte D, E, beständig in diesen Schenkeln bleiben. Man verlangt die Linie zu bestimmen, welche ein gewisser Punkt C, der in dieser Linie DE angenommen wird, während der Bewegung der Linie DE, beschreibt. Fig. 76.

§. 735.

Auflösung.

Weil die Länge der Linie DE und der Punkt C auf derselben gegeben wird, so wird auch die Entfernung des Punkts C von D und E gegeben. Es sey also CE = a, und CD = b, und der Winkel QAN = A.

Wenn man nun die Linie wissen will, welche der Punkt C beschreibt, so muß man nothwendig bestimmen, wie weit ein jeder Punkt derselben von der Linie MN, und der Linie PQ entfernt ist. Man ziehe also die Linie CB mit PQ, und CG mit MN parrallel, so wird der Punkt C bestimt, wenn man die Länge der Linie CB, und der Linie CG weiß, und ein jeder Punkt der krummen Linie, welche der Punkt C beschreibt, wird bekant,

wenn

wenn man zu jeder angenommenen Linie AB = CG die Länge der Linie BC weiß.

Es sey also AB = x, BC = y. Von C ziehe man auf MN die Linie CH perpendikulär, so sind in dem Triangel CBH alle Winkel bekant. Denn CBH ist dem gegebenen Winkel QAN gleich, und da der Winkel bey H ein rechter Winkel ist, so ist auch der Winkel MCH bekant. Es wird also die Verhältniß der Seiten dieses Triangels gegeben, und es ist ist

BC: BH = Rad: Cos. A = 1: Cos. A

folglich da BC = y, so wird BH = y Cos. A.

Weil ferner die Triangel GEC, DBC einander ähnlich sind, weil BC mit AE parrallel ist, so ist (Euc. 6. 2.) DC: DB = CE: CG oder AB, folglich b: BD = a: x, folglich ist $BD = \frac{bx}{a}$.

Es ist also $BD - BH = DH = \frac{bx}{a} - y$. Cos. A, und in dem rechtwinklichten Triangel BCH, ist $CH^2 = BC^2 - BH^2$, oder $CH^2 = yy - y^2$. Cos. A^2, folglich da 1 — Cos. A^2 = Sin. A^2, so wird

$CH^2 = y^2$. Sin. A^2.

Der Triangel CDH ist aber auch ein rechtwinklichter, folglich ist auch $CH^2 = CD^2 - DH^2$, oder $CH^2 = bb - \left(\frac{bx}{a} - y \text{ Cos. A}\right)^2$

oder

oder $CH^2 = bb - \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{2bxy\,\text{Cos.A}}{a} - y^2\text{Cos.A}^2$

folglich erhält man

$y^2\text{Sin.A}^2 = bb - \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{2bxy.\text{Cos.A}}{a} - y^2\text{Cos.A}^2$

und

$y^2\text{Sin.A}^2 + y^2\text{Cos.A}^2 = bb - \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{2bxy.\text{Cos.A}}{a}$

Es ist aber beständig Sin. A^2 + Cos. A^2 = (Rad.)^2 und da der Radius hier 1 angenommen worden, so wird

y^2 (Sin. A^2 + Cos. A^2) = y^2,

folglich erhält man

$y = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{2bxy.\text{ Cos. A}}{a}$

und $y^2 - \frac{2bxy.\text{ Cos. A}}{a} = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$

Aus dieser Gleichung läst sich nun von jeder angenommenen Länge der Linie x, die Länge der Linie y bestimmen, und da diese wieder die Entfernung eines jeden Punkts C in der krummen Linie bestimt, so ist es leicht, alle Punkte der krummen Linie zu finden, welche der Punkt C beschreibt.

§. 736.

Anmerkung.

Wenn man nach der aritmetischen Art diese Gleichung auflöset, so wird

$y = \frac{+bx\,\text{Cos. A} \mp b\sqrt{(a^2 + x^2\,\text{Cos. A}^2 - x^2)}}{a}$

Sobald man also 1) der Linie x einen gewissen Werth beylegt, so findet man allezeit zwey Punkte in der krummen Linie, davon der eine durch die Gleichung

$$y = \frac{+bx \text{ Cos. A} + b\sqrt{(a^2 + x^2 \text{ Cos. A}^2 - x^2)}}{a}$$

und der andre durch

$$y = \frac{+bx \text{ Cos. A} - b\sqrt{(a^2 + x^2 \text{ Cos. A}^2 - x^2)}}{a}$$

bestimt wird.

2) Man setze $x = +a$, so wird

$$y = \frac{+bx \text{ Cos. A} + b\sqrt{(a^2 + x^3 \text{ Cos. A}^2 - a^2)}}{a}$$

und

$$y = \frac{+bx \text{ Cos. A} - b\sqrt{(a^2 + x^2 \text{ Cos. A}^2 - a^2)}}{a}$$

oder der eine Werth von y ist $\frac{2bx \text{ Cos. A}}{a}$, und der andre $\frac{bx \text{ Cos. A} - bx \text{ Cos. A}}{a} = o$.

Wenn man also die Linie $x = AB$ so groß an-
Fig 75. nimt, als a, so wird ein Punkt der krummen Linie, in der Linie MN in B und der andere, der Figur nach, oberhalb MN, in C fallen.

3) Nimt man aber $x = -a$ oder auf der Linie MN, die Linie $AB' = a$ von A nach M zu, so wird der eine Werth von

$$y = \frac{-bx \text{ Cos. A} + b\sqrt{(a^2 + x^2 \text{ Cos. A}^2 - a^2)}}{a}$$

oder

oder $y = \frac{-bx \text{ Cos. A} + bx \text{ Cos. A}}{a} = o$

und der andre Werth von

$y = \frac{-bx \text{ Cos. A} - b\sqrt{(a^2 + x^2 \text{ Cos. A}^2 - a^2)}}{a}$

oder $y = -\frac{2bx \text{ Cos. A.}}{a}$

Folglich geht daselbst die krumme Linie durch den Punkt B und weiter nach unten zu fort, so, daß wenn man B′C′, unterhalb $MN = \frac{2bx \text{ Cos. A}}{a}$ nimt, der Punkt C′ in der krummen Linie ist.

4) Setzt man hingegen $x = o$, so wird der eine Werth von $y = +b$, und der andre $-b$. Folglich wenn man auf PQ, ober und unterhalb des Punkts A, die Linien AF, AF′ so groß, als b annimt, so geht die krumme Linie sowohl durch den Punkt F, als auch durch den Punkt F′.

5) Nimt man aber $x = \frac{a}{\sqrt{(1 - \text{Cos. A}^2)}}$ oder $x = \frac{a}{\text{Sin. A}}$, so wird $a^2 + x^2 \text{ Cos. A}^2 - x^2 = o$, folglich sind alsdenn alle beyde Werthe von $y = \frac{b \text{ Cos. A}}{\sqrt{(1 - \text{Cos. A}^2)}}$, folglich wenn man in der Entfernung $AK = \frac{a}{\sqrt{(1 - \text{Cos. A}^2)}}$ eine gerade Linie mit PQ parallel zieht, und darauf $y = \frac{b \text{ Cos A}}{\sqrt{(1 - \text{Cos. A}^2)}}$ nimt, so werden daselbst zwey Punkte der krummen

Linie zusammen fallen, oder die durch K mit PQ parrallel gezogene gerade Linie wird, die krumme Linie, welche der Punkt C beschreibt, berühren.

Eben dieses geschiht auch, wenn man $x = \frac{-a}{\sqrt{(1-\text{Cos.A}^2)}}$ sezt. Denn werden beyde Werthe von $y = -\frac{b\,\text{Cos. A}}{\sqrt{(1-\text{Cos. A}^2)}}$ seyn, und wenn man $\text{AK}' = \frac{a}{\sqrt{(1-\text{Cos. A}^2)}}$ nimt, und durch K eine gerade Linie parrallel mit PQ zieht, so wird dieselbe auch die krumme Linie berühren.

6) Nimt man aber x größer, als $\frac{a}{\sqrt{(1-\text{Cos.A}^2)}} = \frac{a}{\text{Sin. A}}$, z.E. wenn man $x = \frac{a}{\sqrt{(1-\text{Cos.A}^2)}} + c = \frac{a}{\text{Sin. A}} + c$, und in der Gleichung am Anfange dieses Sphen, Sin. A^2 vor $1 - \text{Cos.}\,\text{A}^2$ sezet, so, daß man

$$y = +\frac{bx\,\text{Cos. A} \mp b\sqrt{(a^2 - x^2\,\text{Sin. A}^2)}}{a}$$

bekomt, so wird

$$y = +\frac{ba\,\text{Cos. A}}{a\,\text{Sin. A}} + \frac{b\,\text{Cos. A}.c}{a} \mp \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - a^2 - 2ac\,\text{Sin. A} - c^2\,\text{Sin. A}^2)}$$

oder

$$y = +\frac{ba\text{Cot. A} + bc.\text{Cos. A} \mp b\sqrt{(-2ac\text{Sin. A} - c^2\text{Sin. A}^2)}}{a}$$

Eben

Eben diesen Werth von y bekomt man auch, wenn man $x = -\frac{a}{\text{Sin. A}}$ setzet.

Weil nun die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ ist, so folgt daraus, daß der Werth von y unmöglich ist, und wenn man x größer, als $\mp\frac{a}{\sqrt{(1-\text{Cos.A}^2)}} = \mp\frac{a}{\text{Sin. A}}$ annimt, man keine Fig. 76.

Punkte mehr findet, welche zu der krummen Linie gehören. Folglich ist die krumme Linie, die der Punkt C beschreibt, eine solche, welche in sich selbst zurück geht, und ohngefehr die Figur hat, wie (Fig. 76.)

§. 737.

Bis hieher ist aber der Begrif von der krummen Linie noch immer etwas dunkel. Um dieselbe noch genauer kennen zu lernen, nehme man auf AN die Linie $AK = \frac{a}{\text{Sin. A}}$, und ziehe durch K die Linie KL parrallel mit AQ, und nehme $KL = \frac{b.\ \text{Cos. A}}{\text{Sin. A}}$, so wird die Linie KL die krumme Linie in L berühren. (§. 736. No. 5). Und eben so, wenn man auch $AK = -\frac{a}{\text{Sin. A}}$ und $K'L' = -\frac{b.\ \text{Cos. A}}{\text{Sin. A}}$ nimt, so berührt die Linie K'L' auch die krumme Linie in L' (§. 736. No. 5.)

Man ziehe nunmehro die Linie L'L, so geht dieselbe durch A, und da in dem Triangel AKL die Linie AK, der Winkel AKL = MAQ, und KL bekant sind, so ist auch die Linie AL bekant, welche der Linie AL gleich ist, weil beyde Triangel AKL, AK'L' bekant sind.

Diese Linie AL nenne man c, und ziehe von einen Punkt C in der krummen Linie auf AN die Linie CB mit AQ parrallel, so, daß sie AL in R durchschneidet, und setze AR = z, RC = u.

Weil nun die Triangel AKL, ABR einander ähnlich sind, so wird

AK: KL = AB: BR,

oder $\frac{a}{\text{Sin. A}} : \frac{b. \text{Cos. A}}{\text{Sin. A}} = x : BR$, folglich $BR = \frac{bx \text{ Cos. A.}}{a}$. Ferner AL: AK = AR: AB,

oder

$c : \frac{a}{\text{Sin. A}} = AR : x$, folglich $AR = \frac{cx. \text{ Sin. A.}}{a}$

Es ist also $BC = y = BR + RC$, oder $y = u + \frac{bx. \text{ Cos. A}}{a}$, und $x = AR \times \frac{a}{c. \text{ Sin. A}}$

oder $x = \frac{az}{c. \text{Sin. A}}$ folglich ist $y = u + \frac{bz \text{ Cos. A.}}{c. \text{ Sin. A}}$

Setzt man nun diese Werthe in der Gleichung, (§. 735.) und schreibt daselbst alle Glieder auf einer Seite, so wird

$y^2 =$

$$y^2 = u^2 + \frac{2buz \text{ Cof. A}}{c. \text{ Sin. A}} + \frac{b^2z^2 \text{ Cof. A}^2}{c^2. \text{ Sin. A}^2}$$
$$-\frac{2bxy.\text{Cof.A}}{a} = -\frac{2buz.\text{Cof.A}}{c. \text{ Sin. A}} - \frac{2b^2z^2.\text{Cof.A}^2}{c^2. \text{ Sin. A}^2} \Big\} = o$$
$$-\ b^2 = -\ b^2$$
$$+\frac{b^2x^2}{a^2} = +\frac{b^2z^2}{c^2.\text{Sin. A}^2}$$

Es ist also

$$u^2 - b^2 - \frac{b^2z^2.\text{Cof. A}^2}{c^2. \text{ Sin. A}^2} + \frac{b^2z^2}{c^2.\text{Sin. A}^2} = o$$

und da $1 - \text{Cof. A}^2 = \text{Sin. A}^2$, so bekomt man

$$u^2 - b^2 + \frac{b^2z^2.\text{ Sin. A}^2}{c^2. \text{ Sin. A}^2} = o$$

folglich $u^2 = \frac{b^2}{c^2}(c^2 - z^2)$.

§. 738.

Diese Gleichung zeigt also diese krumme Linie eben so gut an, als die erste. (§. 735.) Denn wenn man auf der Linie AL nach Gefallen eine gerade Linie AR annimt, und dieselbe z nent, und durch den Punkt R eine gerade Linie RC parralel bis an die krumme Linie in C zieht, so bekomt man aus dieser Gleichung die Linie RC, oder u, und man weiß den Abstand eines jeden Punkts C von der geraden Linie AL.

Nent man ferner die Linie LR, t, so wird $AR = z = AL - RL$, oder $z = c - t$,

und wenn man diesen Werth von z in der Gleichung 737. setzet, so bekomt man

$$u^2 = \frac{b^2}{c^2}(cc - t^2 + 2ct - c^2), \text{ oder}$$

$$u^2 = \frac{bb}{cc}(2ct - tt)$$

Diese Gleichung ist aber der Gleichung (§. 730.) vollkommen ähnlich, nur daß hier $2c$, das ist, was dort a, und $\frac{bb}{cc}$ das, was dort $\frac{nn}{mm}$, und t das bedeutet, was dort x anzeigte. Folglich kann auch diese Linie eben so geometrisch beschrieben werden, als dort gezeigt worden, und man siehet leicht, daß die Linie, welche der Punkt C in dieser Aufgabe beschreibt, auch eine Ellipse ist.

§. 739.

Aufgabe.

Man soll über der gegebenen geraden Linie AB einen Triangel beschreiben, der so beschaffen ist, daß die Summe der beyden übrigen Seiten so groß ist, als eine gewisse gegebene gerade Linie MN.

§. 740.

Auflösung.

Es sey ABC der verlangte Triangel, und MN $= a$ die gerade Linie, der die Summe der beyden
Fig. 77. Seiten AC und CB gleich seyn soll. Weil nun von den Seiten AC und BC keine besonders bestimt

ist,

ist, so ist offenbar, daß man dieselben nach Gefallen annehmen kann, wenn sie nur so beschaffen sind, daß beyde zusammengenommen, der Linie MN $= a$ gleich sind. Geometrisch also kann diese Aufgabe auf unendliche Arten construirt werden. Man theile nemlich die Linie MN in P willkührlich, und beschreibe aus A mit der Entfernung MP, und aus B mit der Entfernung NP Zirkelbogen, welche sich in C durchschneiden, so ist ABC der verlangte Triangel.

Da man die Linie MN nach Gefallen theilen kann, so ist offenbar, daß man nach dieser Methode verschiedene Triangel bekomt, und in jeden hat der Punkt C eine andre Lage. Man will aber eine Gleichung haben, welche den Ort des Punkts C vor einen jeden Fall bestimt, und dieses kann auf folgende Art geschehen.

Man ziehe die Linie CD auf AB perpendikulär, und setze AD $= x$, CD $= y$. Ist nun AB $= b$, so wird BD $= b - x$.

Die beyde Triangel ADC, DCB sind aber rechtwinklicht, folglich ist

$$AC^2 = AD^2 + DC^2, \text{ und}$$
$$BC^2 = BD^2 + DC^2$$

oder $AC^2 = x^2 + y^2$

$BC^2 = b^2 - 2bx + xx + yy.$

Hieraus wird $AC = \mp \sqrt{(x^2 + y^2)}$

und $BC = \mp \sqrt{(b^2 - 2bx + xx + yy)}$

da nun $AC + BC = MN = a$ gleich seyn soll, so wird

$a = +\sqrt{(x^2+y^2)} \mp \sqrt{(b^2-2bx+xx+yy)}$,

folglich

$a - \sqrt{(x^2+y^2)} = \sqrt{(b^2-2bx+x^2+y^2)}$

und wenn man quadrirt

$a^2 - 2a\sqrt{(x^2+y^2)} + x^2 + y^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$,

und das wegläßt, was sich aufhebet

$a^2 - 2a\sqrt{(x^2+y^2)} = b^2 - 2bx$,

folglich $a^2 - b^2 + 2bx = 2a\sqrt{(x^2+y^2)}$

Man setze $a^2 - b^2 = c^2$, und quadrire, so wird

$c^4 + 4bc^2x + 4b^2x^2 = 4a^2x^2 + 4a^2y^2$,

und

$4a^2y^2 = c^4 + 4bc^2x + 4(b^2 - a^2)x^2$

oder $4a^2y^2 = c^4 + 4bc^2x - 4c^2x^2$.

§. 741.

Anmerkung.

Diese Gleichung bestimt also den Ort des Punkts C in jedem Falle, durch die Größe der Linien AD und DC, wenn AD willkührlich angenommen wird. Um aber den Ort des Punkts C, oder die krumme Linie, in der jeder Punkt C liegt, genauer kennen zu lernen, setze man

1) $x = 0$, so wird $y^2 = \frac{c^4}{4a^2}$ und

$$y = \mp \frac{c^2}{2a} = \mp \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

Wen man dahero in A die gerade Linien AQ und AR perpendikulär aufrichtet, und sie so groß an-

annimt, als die dritte proportional Linie zu $2a$, $a + b$, und $a - b$, so geht die krumme Linie durch Q und R.

2) Setzt man hingegen $x = b$, so wird $4a^2y^2 = c^4 + 4c^2b^2 - 4c^2b^2$, oder wieder $y^2 = \frac{c^4}{4a^2}$, und $y = \mp \frac{c^2}{2a} = \mp \frac{a^2 - b^2}{2a}$. Folglich wenn man in B auch die Linien Bq und Br perpendikulär aufrichtet, und dieselben so groß macht, als die vierte proportional Linie zu $2a$, $a + b$, $a - b$, so geht die krumme Linie auch durch die Punkte q und r.

3) Setzt man hingegen $y = o$, so wird $o = c^4 + 4bc^2x - 4c^2x^2$, oder $x^2 - bx = +\frac{c^2}{4}$, und dahero $x = \frac{1}{2}b \mp \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2)}$, $= \frac{b \mp \sqrt{(b^2 + c^2)}}{2}$, oder $x = \frac{b \mp a}{2}$, weil $b^2 + c^2 = a^2$ ist. Nimt man daher AE $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$ auf der verlängerten Linie AB, so geht die krumme Linie, welche den Ort des Punkts C bestimt, durch E, und wenn man auch AF $= \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$ nimt, so geht auch diese krumme Linie durch F.

4) Aus der Gleichung §. 740. findet man überhaupt $y = \mp \frac{1}{2a} \sqrt{(c^4 + 4bc^2x - c^2x^2}$ man mag daher auf der Linie AB einen Punkt D nach Gefallen annehmen, und durch denselben eine Linie Cc perpendikulär auf AB ziehen, so findet man

man in derselben allezeit zwey Punkte, C, c, die die Aufgabe auflösen, und davon der eine auf der einen, der andre auf der andern Seite von AB liegt.

5) In diese Gleichung hat y allezeit zwey wirkliche Werthe, so lange x nicht größer ist, als $\frac{a+b}{2}$ oder $\frac{b-a}{2}$. Setzt man aber x größer, so wird die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ, und folglich der Werth von y imaginär.

Aus diesen Betrachtungen folgt denn, daß die krumme Linie in einen gewissen Raum eingeschlossen ist, und ohngefehr die Figur hat, wie (Fig. 77.) gezeichnet.

6) *Um aber diese krumme Linie genauer kennen zu lernen*, setze man $x = z - \left(\frac{a-b}{2}\right)$ und diesen Werth in der vorigen Gleichung, so wird

$$4a^2y^2 = c^4 + 4bc^2z - 2(a-b)bc^2 - 4c^2z^2 + 4c^2(a-b)z - \left(\frac{a^2-2ab+b^2}{4}\right)4c^2$$

oder $4a^2y^2 = 4ac^2z - 4c^2z^2$,

oder $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(az - z^2)$.

Aus dieser Gleichung sieht man, daß die krumme Linie in welcher der Punkt C liegt, eine Ellipse ist. (§. 732.)

§. 742.

§. 742.

Aufgabe.

Es wird die Grundlinie eines Triangels, und die Differenz der beyden übrigen Seiten gegeben; man soll den Punkt finden, wo die Spitze, des der Grundlinie gegen über liegenden Winkels, hinfällt.

§. 743.

Auflösung.

Es sey die gegebene Grundlinie $= a$, und d die Differenz der beyden übrigen Seiten. Man soll also einen Triangel ABC beschreiben, der so beschaffen ist, daß $AB = a$, und $AC - CB = d$ ist. In dieser Absicht ziehe man von dem Punkt C, der die Spitze des Winkels ist, welcher der Grundlinie AB gegen über liegt, auf AB einer perpendikulär Linie CD, und setze $AD = x$, $DC = y$, so wird $DB = a - x$. Und der Punkt C wird völlig bestimt, sobald man die Linien x und y weiß. Fig 78

Durch die Linie DC wird aber der Triangel in zwey rechtwinklichte Triangel ADC, DCB getheilet, und es ist $AC = \sqrt{(AD^2 + DC^2)}$, und $BC = \sqrt{(BD^2 + DC^2)}$, und wenn wir diese Linien durch Buchstaben ausdrücken, so wird $AC = \sqrt{(x^2 + y^2)}$
und $BC = \sqrt{((a - x)^2 + y^2)}$.
Es ist also nach der vorausgesetzten Bedingung
$\sqrt{(x^2 + y^2)} - \sqrt{((a - x)^2 + y^2)} = d$
folglich $\sqrt{(x^2 + y^2)} - d = \sqrt{((a - x)^2 + y^2)}$

und

und wenn man auf beyden Seiten quadrirt,

$$x^2 + y^2 - 2dV(x^2 + y^2) + d^2 = a^2 - 2ax + x^2 + y^2$$

folglich wenn auf beyden Seiten $x^2 + y^2$ weggenommen wird

$$-2dV(x^2 + y^2) + d^2 = a^2 - 2ax$$

folglich $4d^2(x^2 + y^2) = (a^2 - d^2 - 2ax)^2$

Man setze $a^2 - d^2 = c^2$, so wird

$4d^2x^2 + 4d^2y^2 = c^4 - 4ac^2x + 4a^2x^2$

und $4d^2y^2 = c^4 - 4ac^2x + (4a^2 - 4d^2)x^2$

oder $4d^2y^2 = c^4 - 4ac^2x + 4c^2x^2$.

§. 744.

Anmerkung.

Es sind also wieder verschiedene Punkte, welche diese Aufgabe auflösen, und dieselben liegen alle in einer gewissen krummen Linie, deren Natur wir nunmehro etwas genauer untersuchen wollen. In dieser Absicht setze man

1) $x = o$, so wird $4d^2y^2 = c^4$, folglich $y^2 = \mp \frac{c^2}{2d}$. Wenn man also in den Punkt A eine gerade Linie AE perpendikulär aufrichtet, und auf derselben die Linien AE, A*e* abschneidet, so, daß jede $= \frac{c^2}{2d}$ ist, so geht die krumme Linie durch die Punkte E, *e*.

2) Setzt man hingegen $y = o$, so wird $c^4 - 4ac^2x^2 + 4c^2x^2 = o$, oder $x^2 - ax = -\frac{c^2}{4}$, und $x = +\frac{a}{2} \mp V\left(\frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{4}\right)$, oder

$x =$

$$x = \frac{a \mp \sqrt{(a^2 - c^2)}}{2} = \frac{a \mp d}{2}.$$

Wenn man dahero AB in F in zwey gleiche Theile theilet, und GF = FH = $\frac{1}{2}d$ annimt, so geht die krumme Linie durch die Punkte G und H.

3) Nimt man hingegen x größer, als $\frac{a}{2} - \frac{d}{2}$, oder kleiner, als $\frac{a}{2} + \frac{d}{2}$, so wird der Werth von y imaginär. Man setze nemlich $x = \frac{1}{2}a \pm z$) so wird $ax = \frac{1}{2}a^2 \pm az$, und $x^2 = \frac{1}{4}a^2 \pm az + z^2$, folglich verwandelt sich die Gleichung $4d^2y^2 = c^2(c^2 - 4ax + 4x^2)$ in diese $4d^2y^2 = c^2(c^2 - 2a^2 \mp 4az + a^2 \pm 4az + 4z^2$, oder

$4d^2y^2 = c^2(a^2 - d^2 - 2a^2 \mp 4az + a^2 \pm 4az + 4z^2)$

oder $4d^2y^2 = c^2(4zz - dd)$

Und in dieser Gleichung ist y allezeit unmöglich, wenn z kleiner, als $\frac{1}{2}d$, es mag z positiv, oder negativ seyn. Folglich wenn man auf der Linie AB von G bis H, wo man will, gerade Linien perpendikulär aufrichtet, so wird keine von denselben der krummen Linie begegnen.

4) Nimt man aber x größer an, als $\frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}d$, so findet man allezeit zwey wirkliche Werthe vor die Linie y, und dieses geschiehet auch beständig, wenn x negativ angenommen wird.

§. 745.

Wenn man alle Punkte dieser Linie geometrisch finden will, so darf man nur aus A mit einer willkühr- Fig. 79.

kührlichen Eröfnung des Zirkels, $u = AM$, einen Zirkel beschreiben, und aus B, mit der Eröfnung $u - d = BM$, auch einen Zirkel. Wenn sich nun diese Zirkel in M und N durchschneiden, so sind die Durchschnittspunkte in dieser Linie, welche auch die Hyperbel genennt wird. Man kann aber auch aus B mit der Entfernung $BM' = AM = u$ einen Zirkel, und aus A mit der Entfernung $AM' = BM = u - d$ einen andern Zirkel beschreiben: durchschneiden sich nun diese Zirkel in M' und N' so sind ebenfalls diese Punkte in der Hyperbel. Diese Linie wird also die Gestalt haben, welche (Fig. 79.) anzeigt.

§. 746.

Man setze $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d + z = AD$, in der Gleichung (§. 745.) so verwandelt sich dieselbe in diese $d^2y^2 = c^2(dz + z^2)$,

oder $d^2y^2 = (dz + z^2)$

und diese Gleichung drückt die Natur der Hyperbel eben so gut aus, als die Gleichung (§. 745.) nur daß der Punkt C dadurch bestimt wird, daß man die Verhältniß der Linie CD zu $= HD$ anzeigt, in dem der Punkt H, dergestalt zwischen A und B genommen wird, daß $HB = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d$ ist. Man

Fig. 78.

würde eben diese Gleichung gleich anfänglich gefunden haben, wenn man den Punkt C auf diese Art bestimt hätte. Denn es ist einerley, ob man den Punkt C durch die Verhältniß der Linie AD zu DC, oder durch die Verhältniß einer andern

gege-

gegebenen Linie, auf der Linie AB z. E. HD zu CD bestimt.

§. 747.

Setzt man hingegen $x = \frac{1}{2}a + z$, das ist, wollte man den Ort des Punkts C dergestalt bestimmen, daß man eine Gleichung zwischen CD und FD suchte, indem der Punkt F so angenommen worden, daß derselbe die Linie AB in zwey gleiche Theile theilet, so würde sich die Gleichung (§. 743.) in diese

$$4d^2y^2 = c^2(4z^2 - dd)$$

oder $y^2 = \frac{c^2}{d^2}(z^2 - \frac{1}{4}dd)$

verwandeln, und auch diese Gleichung zeigt eine Hyperbel an. Hier ist aber $GF = \frac{1}{2}d$, folglich wenn man $\frac{1}{2}d = GF = p$, und $\frac{c}{2} = q$ setzet, Fig. 78.

so wird $yy = \frac{q^2}{p^2}(zz - pp)$ eine Gleichung,

welche die Hyperbel so ausdrückt, daß man jeden Punkt in derselben, durch die Verhältniß der Linie CD zu DF bestimt.

§. 748.

Aufgabe.

Es wird der Winkel BAF, und auf dem Schenkel AF desselben ein Punkt P gegeben. Man soll innerhalb den Schenkeln dieses Winkels zwey gerade Linien BD, PD ziehen, dergestalt daß BD allezeit parallel ist mit AF, und PD von Fig. 80.

dem Punkt P ausgehet, und diese beyde Linien sollen eine solche Verhältniß gegen einander haben, welche der gegebenen Verhältniß $a : b$ gleich ist.

§. 749.

Auflösung.

Man setze, D sey der Punkt, der so beschaffen, daß BD: DP $= a : b$ ist. Man ziehe die Linie DC mit AB parallel, und DE auf AF perpendikulär. Es ist also der Winkel DCP dem Winkel BAF gleich, und da der Punkt P auf der Linie AF gegeben, folglich dessen Entfernung von A bekant ist, so wird der Punkt D völlig bestimt seyn, sobald man die Linien PC und CD, oder auch, wenn man die Entfernung des Punkts C von A, und des Punkts D von C, weiß.

Man setze $AP = c$, $PC = x$, und $CD = y$, so wird $AC = BD = c - x$, weil die Figur ABDC ein Parallellogram ist. Weil nun in dem Triangel CDE der Winkel DCE bekannt, und der Winkel DEC ein rechter Winkel ist, so ist der dritte Winkel bekannt, folglich die Verhältniß der Seiten durch die Verhältniß der Sinus der gegen überstehenden Winkel gegeben. Dahero setze man CD: CE $= a : d$.

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist also BD: DP $= a : b = c - x$; DP, folglich wird

$$DP = \frac{bc - bx}{a}$$

Ferner ist CD: CE $= a : d = y$: CE, folglich

lich ist $CE = \frac{dy}{a}$, und dahero $EP = CP - CE = x - \frac{dy}{a} = \frac{ax - dy}{a}$.

Es sind aber beyde Triangel CED, DEP rechtwinklicht, folglich ist $DE^2 = DC^2 - CE^2 = DP^2 - PE^2$. Setzt man nun hier die gefundene Werthe, so wird

$$\frac{y^2 - d^2y^2}{a^2} = \frac{b^2c^2 - 2b^2cx + b^2x^2}{a^2} - \frac{a^2x^2 + 2adxy - d^2y^2}{a^2}$$

Läst man auf beyden Seiten $\frac{d^2y^2}{a^2}$ weg, und dividirt die Glieder gehörig, so bekomt man

$$y^2 = \frac{2dxy}{a} + \frac{b^2c^2 - 2b^2cx + (b^2 - a^2)x^2}{aa}.$$

Aus dieser Gleichung findet man also vor jeden angenommenen Werth von x, den dazu gehörigen Werth von y, oder man bestimt hieraus den Ort des Punkts D, welcher wieder in einer gewissen krummen Linie liegen wird.

§. 750.

Anmerkung.

Es ist eben nicht nöthig, daß man den Ort des Punkts D dadurch bestimt, daß man die Linie DC mit AB parrallel zieht, und hernach die Linien PC, CD ausfindig macht. Der Ort des Punkts D wird eben so gut bestimt werden, wenn man auf einer jeden andern Linie, die mit einer von den gegebenen Linien AF oder AC einen gegebenen

Winkel einschließt, in einer gewissen Entfernung von A einen Punkt annimt, und die Entfernung des Punkts D von diesem Punkte angiebt. Z. E. man ziehe durch P eine gerade Linie PM auf AB perpendikulär, so wird dieselbe in Q auch perpendikulär auf CD seyn. Weil nun der Winkel bey A und die Linie PA gegeben sind, so sind in dem rechtwinklichten Triangel APM alle Seiten bekannt, und es kann der Punkt D auch dadurch bestimt werden, daß man eine Gleichung angiebt, welche die Verbindung der Linie DQ mit PQ und andern bekannten Linien ausdrückt. Diese aber findet man auf diese Art.

§. 751.

Man setze PQ = z, und QD = u, und da in dem Triangel DCE die Verhältniß der Seite DC: DE bekannt ist, so sey DC: DE = a: f. Weil nun die Triangel DCE, PCQ einander ähnlich sind, (denn der Winkel DCE ist in beyden gemeinschaftlich, und die Winkel DEC, PQC sind rechte Winkel, folglich ist auch der Winkel CDE dem Winkel QPC gleich,) so sind die Seiten, welche gleichen Winkeln gegen über liegen, proportional, folglich ist

$$DC : CE = PC : CQ$$

oder weil $DC : CE = a : d$, und $PC = x$ ist

$$a : d = x : CQ, \text{ folglich } CQ = \frac{dx}{a}.$$

Ferner ist

$$PC : QP = CD : DE$$

oder

$$x ; z = a : f$$

folg-

folglich $x = \frac{az}{f}$.

Weil nun DC = DQ + CQ, so wird hieraus, wenn man vor diese Linien die gehörige Werthe setzt,

$y = u + \frac{dx}{a}$, oder $y = u + \frac{dz}{f}$.

Diese gefundene Werthe von x und y setze man in der Gleichung (§. 749.) so verwandelt sich dieselbe in diese

$$u^2 + \frac{2duz}{f} + \frac{d^2z^2}{f^2} = \frac{2duz}{f} + \frac{2d^2z^2}{f^2} + \frac{b^2c^2}{aa} - \frac{2bbcz}{af} + \frac{(bb - a^2)zz}{ff}$$

und wenn man das wegläst, was sich aufhebt, so bekomt man

$$uu = \frac{bbcc}{aa} - \frac{2bbcz}{af} + \frac{(dd - aa + bb)zz}{ff}$$

und diese Gleichung bestimt den Ort des Punkts D in Absicht auf die Linie PM, deren Lage in Ansehung der Linie AF gegeben ist.

§. 752.

Diese Gleichung ist etwas einfacher, als die Gleichung, wodurch der Ort des Punkts D (§. 749.) bestimt wurde, und hat viel ähnliches mit derjenigen, welche wir (§. 743.) bey Gelegenheit einer andern Aufgabe gefunden. Man kann also versuchen, ob sich dieselbe völlig auf die Form der dortigen Gleichung bringen läst, und wenn dieses ange-

hen sollte, so wird ohne Zweifel, diese Gleichung hier auch eben die krumme Linie ausdrücken, welche die im dortigen Syphen gefundene Gleichung bestimt. Ehe man aber weiter gehet, muß man vorhero untersuchen, ob die Aufgabe nicht verschiedene besondere Fälle hat, und daß dieses so ist, kann man leicht gewahr werden, wenn man den Coefficienten von zz untersucht; denn es kann $dd - aa + bb$ entweder eine positive, oder negative Größe, oder auch nichts seyn. Dahero hat die Aufgabe drey Fälle, die wir nach und nach untersuchen wollen.

§. 753.

Der erste Fall ist demnach, wenn $dd - aa + bb$ eine positive Größe ist, und diese kann durch folgenden Satz abgekürzt werden: Es ist nemlich $DC : CE = a : d$, folglich $DC^2 : CE^2 = a^2 : d^2$, und $DC^2 : DC^2 - CE^2 = a^2 : a^2 - d^2$, oder da $DC^2 - CE^2 = DE^2$, so wird $DC^2 : DE^2 = a^2 : f^2 = a^2 : a^2 - d^2$, folglich ist $a^2 - d^2 = ff$. Dadurch wird die vorige Gleichung in

$$uu = \frac{bbcc}{aa} - \frac{2bbcz}{af} + \frac{(bb - ff)zz}{ff}$$

verwandelt.

§. 754.

Um nun zu finden, ob die krumme Linie, in der sich der Punkt D befindet, in diesem Falle die Linie PM durchschneidet, und in welchen Punkten dieses geschiehet, setze man $u = o$, so wird

$bb -$

$$\left(\frac{bb-ff}{ff}\right)zz - \frac{2bbcz}{af} + \frac{bbcc}{aa} = o$$

oder $zz - \frac{2bbcfz}{a(bb-ff)} = -\frac{bbccff}{aa(bb-ff)}$

nimt man hieraus die Wurzel, so wird

$$z = \frac{bbcf}{a(bb-ff)} \mp \frac{bcf^2}{a(bb-ff)}$$

Man nehme also auf der verlängerten Linie PQ die Linie $PK = \frac{bbcf}{a(bb-ff)}$, und ziehe davon einmal die Linie $KG = \frac{bcf^2}{a(bb-ff)}$ ab, und addire hernach die Linie $KH = \frac{bcff}{a(bb-ff)}$, so geht die krumme Linie durch die Punkte G und H. Fig. 81.

§. 755.

Man nehme ferner die Linie $PL = 2PK$, so wird $PL = \frac{2bbcf}{a(bb-ff)}$ und $HG = 2(PK - PG) = \frac{2bcf^2}{a(bb-ff)}$. Man setze nunmehro $\frac{2bbcf}{a(bb-ff)} = A$, und $\frac{2bcf^2}{a(bb-ff)} = D$, so wird $\frac{2bbc}{a} = \frac{A(bb-ff)}{f}$, und $\frac{bbcc}{aa} = \frac{D^2(bb-ff)^2}{4f^4}$.

Und die Gleichung (§. 753.) verwandelt sich in diese

$$uu = \frac{D^2(bb-ff)^2}{4f^4} - \frac{A(bb-ff)z}{ff} + \frac{(bb-ff)zz}{ff}$$

oder $\frac{4f^4u^2}{(bb-ff)^2} = D^2 - \frac{4Affz}{(bb-ff)} + \frac{4ffzz}{(bb-ff)}$.

Man setze ferner $A^2 - D^2 = C^2$, so wird

$C^2 = \frac{4b^4c^2f^2 - 4b^2c^2f^4}{aa(bb-ff)^2} = \frac{4b^2c^2f^2}{aa(bb-ff)}$

folglich $\frac{ff}{(bb-ff)} = \frac{C^2aa}{4b^2c^2}$. Setzt man nun diesen Werth wieder in der vorigen Gleichung auf der einen Seite, so wird

$\frac{4f^4uu}{(bb-ff)^2} = D^2 - \frac{AC^2aaz}{b^2c^2} + \frac{C^2aazz}{b^2c^2}$.

Es ist aber $D^2 = \frac{4b^2c^2f^4}{aa(bb-ff)^2} = \frac{C^4aa}{4b^2c^2}$, folglich ist auch

$\frac{4f^4uu}{(bb-ff)^2} = \frac{C^4aa}{4b^2c^2} - \frac{AC^2aaz}{b^2c^2} + \frac{C^2aazz}{bbcc}$

und wenn man überall mit $\frac{aa}{4b^2c^2}$ dividirt, so erhält man

$\frac{4.4.b^2c^2f^4.uu}{aa(bb-ff)^2} = C^4 - 4AC^2z + C^2zz$

oder $4D^2uu = C^4 - 4AC^2z + C^2zz$.

Diese Gleichung hat aber mit der (§. 743.) gefundenen einerley Form, und dahero ist die krumme Linie, in der jeder Punkt D liegt, in diesem Falle, wenn nemlich $dd - aa + bb$ eine positive Grösse ist, eine **Hyperbel.**

§. 756.

§. 756.

Man setze nunmehro den zweiten Fall, nemlich daß $dd - aa + bb = o$ ist. So verwandelt sich die Gleichung (§. 749.) in diese

$$uu = \frac{bbcc}{aa} - \frac{2bbcz}{af}$$

Um nun wieder die Punkte zu finden, wo in diesem Falle die krumme Linie, die Linie PM durchschneidet, setze man $u = o$, so wird

$$\frac{bbcc}{aa} - \frac{2bbcz}{af} = o$$

folglich $z = \frac{cf}{2a}$

Nimt man dahero auf PM die Linie $PO = \frac{cf}{2a}$ so wird die krumme Linie durch O gehen. Und wenn man $OQ = t$ setzt, so wird $PQ = PO - OQ = \frac{cf}{2a} - t = z$, und der Punkt D wird in Absicht auf die Linien CQ, QD durch diese Gleichung Fig. 80.

$$uu = \frac{2bbct}{af}$$

bestimt, welche aus der obigen entsteht, wenn man darin vor z den Werth $\frac{cf}{2a} - t$ setzet. Setzt man nun $\frac{2bbc}{af} = p$, so wird $uu = pt$. Eine Gleichung, welche mit der Gleichung §. 725. einerley Form hat, und dahero wird in diesem Falle der Ort des Punkts D durch eine Parabel bestimt,

deren Beschreibung nach der (§. 527.) gezeigten Methode auch hier angebracht werden kann.

§. 757.

Der dritte Fall ist endlich, wenn $dd - aa + bb$, oder $bb - ff$ (§ 753.) eine negative Größe ist, und in diesem Falle wird die Gleichung, wodurch der Ort des Punkts D bestimt wird

$$uu = \frac{bbcc}{aa} - \frac{2bbcz}{af} - \frac{(ff-bb)zz}{ff}$$

Setzt man hier auch $u = o$ um die Punkte zu finden, wo die krumme Linie die Linie PM durchschneidet, so wird

$$o = \frac{bbcc}{aa} - \frac{2bbcz}{af} - \frac{(ff-bb)zz}{ff}$$

folglich $z^2 + \frac{2bbcf}{a(ff-bb)} = + \frac{bbcff}{aa(ff-bb)}$

und $z = \frac{-bbcf}{a(ff-bb)} \mp \frac{bcf^2}{a(ff-bb)}$

Setzt man nun wieder $-\frac{2bbcf}{a(ff-bb)} = A$, $\frac{2bcf^2}{a(ff-bb)} = B$; $C^2 = B^2 - A^2 = \frac{4b^2c^2f^2}{a^2(ff-bb)}$, und verfährt übrigens wie (§. 755.) so wird $4B^2uu = C^4 - 4C^2Az - 4C^2zz$ eine Gleichung, welche mit der (§. 740.) einerley Gestalt hat, und demnach anzeiget, daß der Punkt D in diesem Falle in einer Ellipse ist.

§. 758.

§. 758.

Diese Beispiele werden hinlänglich zeigen, wie man mit den Gleichungen, die am Ende einer unbestimten Aufgabe, vorkommen, umgehen muß, um alle die verschiedenen Fälle zu bestimmen, in denen dieselbe möglich, oder nicht möglich ist. Bishero waren die letzten Gleichungen noch so beschaffen, daß man den Werth der einen unbekannten Größe durch die andre unbekannte, und den gegebenen, ausdrückte, so, daß man vor jeden angenommenen Werth der einen, den Werth der andern sogleich angeben konnte. Man begreift aber leicht, daß auch solche Aufgaben vorkommen können, in denen dieses nicht allezeit angeht, und dahero verdienen die unbestimte Gleichungen eine etwas genauere Untersuchung.

Zehnter Abschnitt.

Von den Funktzionen und ihrer Verwandlung.

§. 759.

Erklärung.

Ein jeder algebraischer Ausdruck, in dem gewisse veränderliche Größen vorkommen, die unter sich, und, mit andern gegebenen, oder bekannten Größen,

Größen, es sey auf welche Art es wolle, verbunden sind, heißt eine Funktzion dieser veränderlichen Größen.

§. 760.

Anmerkung.

So sind $a + bx$, $2a^2 + 3x^3$, $ab^2 + 7c^2x^3 + 5dx^5$, $3a^2cd - 7fx^3 + 15x^7$, $\frac{a + bx}{ax^2 \mp \sqrt{(ax - x^3)}}$ ꝛc. Funktzions der veränderlichen Größe x.

$\frac{}{b^2x + \sqrt{ax}}$

Ferner sind diese algebraische Ausdrücke ax^2y, $bx^3 - 2xy$, $cxy - 3dx^4y + fx^7y^3$, $a^2x^2y^2 - \sqrt[3]{(x^3 + 2abxy)}$ ꝛc. Funktzions der beyden veränderlichen Größen x und y.

Und auf eben die Art sind $ax^3 + x^2y^3z$, $cxy^2z - b^2xz + a^2 - dx^2y^3z^3$, $axz \mp \sqrt{(b^3zy - cz^5x)}$ Funktzions dreyer veränderlichen Größen, x, y und z, und eben so verhält es sich mit den andern algebraischen Ausdrücken.

§. 761.

Wenn daher gesagt wird, U ist eine Funktzion von x, oder eine Funktzion von x und y, oder eine Funktzion von x, y und z, und mehreren Grössen, so ist dieses blos eine Abkürzung, und bedeutet allemahl, daß die Größe U durch einen algebraischen Ausdruck bestimt wird, in dem die Größe x, oder die Größen x und y, oder die Größen x, y,

z ꝛc.

z ꝛc. vorkommen, die übrigens mit einander, und mit andern bekannten und gegebenen Größen, als Zahlen, Linien, Bogen, Winkel ꝛc. auf eine algebraische Art verbunden seyn können. Wenn man anzeigen will, daß U eine Funktzion von gewissen Größen ist, so muß man vorher sich über das Zeichen erklären, wodurch man dieses andeuten will. Gesetzt also, man wählte das Zeichen φ, um das Wort Funktzion auszudrücken, so bedeutet $U = \varphi(x)$ nicht daß U, der Größe φ multiplicirt durch x, gleich ist, sondern, es bedeutet, daß U eine Funktzion von der veränderlichen Größe x ist. Diejenige Größen, davon U eine Funktzion seyn soll, pflegt man gern in ( ) einzuschließen, und die Deutlichkeit erfordert auch diese Vorsicht.

§. 762.

Wenn also, nach dieser Bedeutung des Buchstaben φ, der Ausdruck vorkomt, $U = \varphi(xy)$, so bedeutet dieses nicht etwa blos eine Gleichung, sondern unzählige Gleichungen, und diese müssen so beschaffen seyn, daß in jedem Gliede, in dem diese unbekannte und veränderliche Größen vorkommen können, beständig xy und die Dignitäten dieses Products, nicht aber blos x oder y allein, oder verschiedene Dignitäten von x und y vorkommen. Um dieses noch deutlicher zu machen, setze man $xy = z$, so werden in allen den Gleichungen, darin man sich nur z auf eine gewisse Art mit andern bekannten Größen verbunden vorstellen kann, entweder z allein, oder auch die Dignitäten von z vorkommen. Wenn

dahe-

dahero $U = a + bz$, oder $U = az^2 + bz^5$, oder $U = az^2 + 2b\sqrt[3]{bz^3} + cz^5$, oder $U = \frac{az^m + b(z + z^2)^n}{cz(a + bz^2)^p}$ ꝛc. so sind dieses alles Funktions von z oder xy.

Eben so, wenn $U = \varphi(ax - by)$, so müssen in allen den Gliedern der Gleichungen, die diese Funktion vorstellt, die unbekannte Größen enthalten, nicht blos x oder y allein, oder verschiedene Dignitäten von x, sondern allezeit $ax - by$ und die verschiedene Dignitäten dieser Größe vorkommen. Dergleichen Funktions sind z. E.

$$U = A + ax - by, \text{ oder}$$
$$U = A + B(ax - by)^2 + C(ax - by)^5,$$
$$\text{oder } U = \frac{Aax - Aby + B(ax - by)^2}{C(ax - by)^2}$$
$$\text{oder } U = \frac{A + B\sqrt{(ax - by)} - C(ax - by)^2}{D(\sqrt[3]{ax - bx}) + E(ax - by)^3}$$

und was dergleichen Fälle mehr sind. Diese Schlüsse lassen sich nun leicht weiter ausdehnen, und man begreift leicht, wie die Ausdrücke beschaffen seyn müssen, welche durch diese Bezeichnung gegeben werden, als $U = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, $U = \varphi\left(\frac{ax + bx}{y}\right)$, $U = \varphi(ax + by - cz)$, $U = \varphi(x\sqrt{(ay + bz)})$ $U = \varphi\left(\frac{x^2}{\sqrt{(ay + bz)}}\right)$, $U = \varphi\left(\frac{x^m + by^n}{z^p}\right)$ und was man sich dergleichen unzählige Fälle mehr gedenken kann.

§. 763.

§. 763.

Es ist übrigens offenbar, daß die Funktzions veränderlicher Größen, selbst veränderliche Größen sind, das ist, verschiedene Werthe bekommen, nachdem man den darinnen vorkommenden Größen verschiedene Werthe beylegt. Der Hauptunterschied der verschiedenen Funktionen, die man sich gedenken kann, bestehet besonders in der Art, wie die darin vorkommende veränderliche Größen unter sich selbst und mit den gegebenen Größen verbunden sind, dabey denn alle algebraische Operations, als die Addition, Subtraction, Division, Ausziehung der Wurzeln ꝛc. vorkommen können. Zuweilen können dieselben auch von gewissen Veränderungen abhängen, welche die Algebra nicht mit aller erforderlichen Genauigkeit und Schärfe zu leisten, im Stande ist: z. E. wenn die veränderliche Größen, als Zirkel, Bogen, Logaritmen, ꝛc. vorkommen, die man nicht genau angeben kann, und die, wenn ich mich dieses Ausdrucks bedienen darf, die Kräfte der Algebra übersteigen, und dahero auch schon seit langer Zeit als transzendente Größen betrachtet worden sind.

§. 764.

Man könnte dahero die Funktzions in **algebraische** und **transzendente** und die ersten wieder in rationelle und irrationelle eintheilen. Rationelle, algebraische Funktzions würden alsdenn diejenigen seyn, in denen keine Wurzelzeichen vorkommen, welche sich auf die veränderliche Größen beziehen, und irrationelle, diejenigen, in denen auch Wurzelzeichen bey

den

den veränderlichen Größen anzutreffen sind. Nach dieser Eintheilung würden

$$ax,\ ax^2 - cy^2,\ \frac{ax^3 - 2cx^4}{a - x},$$

$abx^2z - c^2xy^2z^3$, $a + bx + cxy + dx^2y^2$ ꝛc. lauter rationelle algebraische Funktzions, hingegen $az - x^2\sqrt{(a^2 - xy)}$, $ax^3 - 2\sqrt{xy} + \sqrt[3]{ax^2} - x^3z^3y^5$ irrationelle, algebraische Funktzions, und a Sin. x, $ay + b$ Tang. x, a Log. $y + b$ Sin. $x + c$ Tang. $(x - y)$ transzendente Funktzions seyn.

§. 765.

Alle Funktzions kann man wieder in ganze und gebrochne Funktzions eintheilen. Ganze Funktzions sind diejenigen, in denen bey den veränderlichen Größen keine negative Exponenten vorkommen, und die auch nicht Glieder enthalten, welche algebraische Brüche sind. In den gebrochnen Funktzions aber, können bey den veränderlichen Größen, sowohl negative Exponenten, als auch Glieder vorkommen, welche Brüche sind. Die beständige und gegebene Größen, ändern die Funktzion nicht, wenn auch dieselben ganze, oder gebrochne algebraische Größen sind. Alle algebraische, rationelle ganze Funktzions einer veränderlichen Größe x, können dahero keine andre, als diese Form

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots\ldots \omega x^m$$

oder diese

$$\alpha x^m + \beta x^{m-1} + \gamma x^{m-2} \ldots\ldots 0$$

haben. Und wenn man die Glieder in den gebroch-

brochnen Funktzionen, alle auf einerley Nenner bringt, so stellt

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots kx^m}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots \omega x^n}$$

alle gebrochne Funktzions vor, und dabey ändern die unveränderliche Größen, a, b, α, β ꝛc. die Funktzion nicht, sie mögen beschaffen seyn, wie sie wollen.

§. 766.

Erklärung.

Wenn U eine Funktzion von einer oder mehreren veränderlichen Größen x, y, z ꝛc. ist, so ist dieselbe entweder dergestalt mit diesen Größen verbunden, daß sie sich durch die bisher gegebene Regeln von denselben nicht absondern läst, das ist, daß sich keine Gleichung finden läst, in der U auf der einen Seite allein, und alle die übrigen veränderliche Größen auf der andern Seite in einer gewissen Verbindung vorkommen, und wenn dieser Fall sich ereignet, so heist U eine verwickelte Funktzion von x, y, z ꝛc. (Functio implicita ipsius x ꝛc.) Kann man aber durch die gewöhnlichen und bekannten algebraische Operations, als die Ausziehung der Wurzeln, oder auf eine andre Art, die Größe U von den andern absondern, so, daß dieselbe durch eine Gleichung bestimt wird, in der die Größen, x, y, ꝛc. alle auf einer Seite sind, und U auf der andern, so ist die Funktzion entwickelt, und U selbst heist alsdenn eine entwickelte, abgesonderte, oder auseinander gesetzte Funktzion; (Functio explicita).

§. 767.

Anmerkung.

Gesetzt, es wäre $U^2 = 2axU - bx^3$, so ist U mit x verwickelt, indessen kann man aus dieser Gleichung die Wurzel ausziehen, und man bekomt $U = ax \mp \sqrt{(a^2x^2 - bx^3)}$, und U ist nunmehro eine entwickelte Funktion von x. Hingegen ist in dieser Gleichung $U^5 - 2a^2U^4x^2 + 5abU^3x^5 - 6b^2x^7U = 5cx^3$ die Größe U eine verwickelte Funktion von x, weil sich die Größe U nicht von x absondern läst, und dieses rühret blos von der Unvollständigkeit der Auflösungskunst her, denn wenn man alle Gleichungen auflösen könnte, so würde man auch jede Funktion entwickeln können.

§. 768.

Weil eine jede Funktion U, veränderlicher Größen, durch eine Gleichung gegeben wird, so hat dieselbe soviel Werthe, als der höchste Exponent derselben Einheiten hat, und diese sind entweder alle wirklich, oder nur einige, und einige davon sind imaginär. Dahero kann man die Funktions auch in einförmige, und vielförmige eintheilen. Alle rationelle einförmige Funktions einer veränderlichen Größe x sind aber in der allgemeinen Formel §. 765. enthalten, so, daß wenn U eine solche Funktion ist,

$$U = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{ꝛc. } kx^n}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{ꝛc. } \omega x^m}$$

ist, und a, b ꝛc. α, β ꝛc. nach den verschiedenen

Um-

Umständen verschiedene, positive und negative Werthe haben können.

Wenn hingegen P, Q, R, S, T ꝛc. lauter einförmige Funktzions von x, bedeuten, so wird

$$U^2 + PU + Q = o$$

eine zweyförmige,

$$U^3 + PU^2 + QU + R = o$$

eine dreyförmige,

$$U^4 + PU^3 + QU^2 + RU + S = o$$

eine vierförmige,

$$U^5 + PU^4 + QU^3 + RU^2 + SU + T = o$$

eine fünförmige Funktzion von x seyn.

Eben so, wenn A, B, C, D ꝛc. lauter einförmige Funktzions von x, y, z ꝛc. bedeuten, so würden

$$U^2 + AU + B = o$$

$$U^3 + AU^2 + BU + C = o$$

$$U^4 + AU^3 + BU^2 + CU + D = o$$

ꝛc. die zwey, drey, vier ꝛc. förmige Funktzions von x, y, z ꝛc. auf eine ganz allgemeine Art ausdrücken. Die Ursach davon ist leicht einzusehen. Denn wenn man die Funktzions durch die Auflösung der Gleichungen entwickeln könnte, so würde U soviel Werthe bekommen, als der höchste Exponent der Größe U Einheiten hat, dabey es denn auch öfters geschehen kann, daß einige Werthe von U blos wirklich, und die andern imaginär sind.

§. 769.

Erklärung.

Man theilet ferner die Funktzions in gleichartige oder Homogene, und in ungleichartige, oder Hetero-

gene ein. Eine homogene Funktzion ist diejenige, wenn die veränderliche Größen, welche in den einzelnen Gliedern derselben vorkommen, überall einerley Dimension ausmachen. Eine heterogene Funktzion ist aber diejenige, wenn die veränderliche Grössen in den einzelnen Gliedern derselben, nicht überall einerley Dimensions ausmachen.

§. 770.

Anmerkung.

Man sagt aber, daß eine jede veränderliche Größe, eine Dimension, das Quadrat einer jeden, oder das Produckt aus zweyen veränderlichen Grössen in einander, zwey Dimensions, der Cubus aus einer jeden, oder das Produckt aus dreyen, drey Dimensions ꝛc. ausmachen. Auf die unveränderliche Größen, oder diejenigen, welche bekannt und gegeben sind, siehet man bey der Bestimmung der Dimensions der Funktzions nicht, sondern betrachtet dieselben so, als wenn sie alle 1 wären.

Also sind in den Formeln αy, βz eine Dimension, in ay^2, βyz, γz^2 ꝛc. zwey Dimensions, in ay^3, $\beta y^2 z$, $\gamma y z^2$, δz^3 ꝛc. drey Dimensions, in ay^4, $\beta y^3 z$, $\gamma y^2 z^2$, $\delta y z^3$, εz^4 ꝛc. vier Dimensions, und so ist es in den andern Fällen auch.

§. 771.

Diese Formel $\alpha y^4 + \beta x y^3 + \gamma x^2 y^2 + \delta x^3 y + \varepsilon x^4$ stellt also eine homogene Funktzion zweyer veränderlichen Größen x und y von der vierten Dimension, $\alpha y^3 x z + \beta y^2 x^2 z + \gamma x^3 y z + \delta x^5$

$+ \delta x^5 + \varepsilon x z^4 + \xi z^5$ eine homogene Funktzion von fünf Dimensions vor. Um überhaupt zu wissen, von welcher Dimension eine homogene Funktion ist, setze man vor y, z ꝛc. blos x, so verwandelt sich die Funktzion in einem algebraischen Ausdruck, in der nur die Dignitäten einer vernälichen Größe x vorkommen, und diese Dignität derselben zeigt die Dimension der Funktzion an. Um z. E. zu erfahren, was dieser Ausdruck $\frac{ay^2 + bxx}{\alpha y + \beta x}$ vor eine Funktion ist, setze man x vor y, so wird dieselbe in $\frac{ax^2 + bx^2}{\alpha x + \beta x}$, oder in $\frac{(a+b)x^2}{(\alpha+\beta)x} = \frac{(a+b)x}{\alpha+\beta}$ verwandelt, folglich ist der gegebene Ausdruck eine algebraische homogene Funktzion von einer Dimension. Ueberhaupt ist eine Funktzion, welche durch einen algebraischen Bruch gegeben wird, homogen, wenn im Zähler und Nenner einerley Dimensions vorkommen, wenn auch gleich die Dimensions im Zehler von den Dimensionen im Nenner verschieden sind. So ist z. E. $\frac{y^5 + x^5}{y^2 x}$ eine homogene Funktzion von zwey Dimensions. Allein dieser Ausdruck $\frac{xy^2 + \beta x^2}{ay^5 + \beta x^3 y^2}$ ist eine homogene Funktzion von — 3 Dimensions. Denn wenn man x vor y setzet, so verwandelt sich dieselbe in $\frac{\alpha x^2 + \beta x^2}{(ax^5 + bx^5} = \frac{(\alpha+\beta)x^{-3}}{(a+b)}$. Und so ist es in andern Fällen.

§. 772.

Die heterogene Funktzions theilet man wieder in verschiedene Ordnungen ein, und die höchste Dimension bestimt die Ordnung derselben. So ist $\alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2 + \delta y + \varepsilon x + \xi$ die Formel aller heterogenen Funktzions zweyer veränderlichen Größen von der zweiten Ordnung, $\alpha y^3 + \beta yx^2 + \gamma x^2 y + \delta x^3 + \varepsilon y^2 + \xi xy + \eta x^2 + \theta y + \nu x + \lambda$ die allgemeine Formel aller heterogenen Funktzions zweyer veränderlicher Größen von der dritten Ordnung und so weiter.

§. 773.

Eine jede Funktzion verwandelt sich übrigens allezeit in eine Gleichung von einem gewissen Grade, wenn man einer oder mehrern von den veränlichen Größen, welche darinnen vorkommen, einen bestimten Werth beylegt, und es läst sich dahero auf die Funktzions alles dasjenige anwenden, was in den siebenten Abschnitt von den Gleichungen gelehrt worden. So ist z. E. die Funktzion $y = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon = y$ eine Gleichung, wenn man $y = A$ setzet, und $\alpha x^3 y + \beta xy^2 + \gamma = y^3 + 2by$ eine Gleichung, wenn man y einen willkührlichen Werth, z. E. $y = a$ beyleget, und eben so ist es auch bey den übrigen.

§. 774.

Lehrsatz.

Wenn Z eine Funktzion einer veränderlichen Größe x ist, welche in Form einer ganzen algebrai-

gebraischen Größe ausgedrücke wird, so findet man alle Factores derselben, wenn man $Z = o$ setzet, und aus der Gleichung, welche dadurch entsteht, die Wurzel heraus zu wickeln sucht. Eine jede Wurzel giebt alsdenn einen Factor der Funktzion Z.

§. 775.

Beweis.

Weil Z eine Funktzion der Größe x ist, und in Form einer ganzen allgebraischen Größe gegeben wird, so ist die allgemeine Form einer solchen Funktzion entweder

1) $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{ꝛc.}\ O = Z$

oder

2) $Z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ꝛc.}$

wo A; B, C ꝛc. lauter bekannte und gegebene Größen bedeuten. Setzet man nun im ersten Falle $Z = o$, und dividirt alle Glieder durch A, so wird

$$x^m + \frac{Bx^{m-1}}{A} + \frac{Cx^{m-2}}{A} + \frac{Dx^{m-3}}{A} + \text{ꝛc.} \ldots\ldots \frac{O}{A} = o.$$

Sind nun a, b, c, d ꝛc. die Wurzeln dieser Gleichung, deren Anzahl m ist, so wird

$$x^m + \frac{Bx^{m-1}}{A} + \frac{Cx^{m-2}}{A} + \frac{Dx^{m-3}}{A} + \text{ꝛc.} \ldots\ldots \frac{O}{A} = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \times \text{ꝛc.}$$

(§. 512.) folglich ist $x - a$ ein Divisor, $x - q$ ein anderer, $x - c$ wieder ein Divisor, und so weiter ꝛc. der Gleichung

$$x^m + \frac{Bx^{m-1}}{A} + \frac{Cx^{m-2}}{A} + \text{ꝛc.} \frac{O}{A} = o$$

Und die ganze Funktzion Z läst sich in das Produckt aus folgenden Factoren auflösen, so, daß $\frac{Z}{A} = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ꝛc. und

$$Z = A(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\text{ꝛc.}$$

3) Ist hingegen $Z = A + Bx + Cx^2 +$ ꝛc. Ox^m, und man dividirt durch A, so wird auch

$$\frac{Z}{A} = 1 + \frac{Bx}{A} + \frac{Cx^2}{A} + \frac{Dx^3}{A} + \text{ꝛc.} \frac{Ox^m}{A}$$

folglich wenn man $\frac{Z}{A} = o$ seßet,

$$o = 1 + \frac{Bx}{A} + \frac{Cx}{A} + \text{ꝛc.} Ox^m.$$

Die Divisores dieser Gleichung können nun keine andre Form haben, als diese

$1 + \frac{\alpha x}{a}$, $1 + \frac{\beta x}{b}$, $1 + \frac{\gamma x}{c}$, $1 + \frac{\delta x}{d}$ ꝛc. (§. 645.)

folglich wird

$$1 + \frac{Bx}{A} + \frac{Cx^2}{A} + \frac{Dx^3}{A} \ldots \frac{Ox^m}{A} = \left(1 + \frac{\alpha x}{a}\right)\left(1 + \frac{\beta x}{b}\right)\left(1 + \frac{\gamma x}{c}\right)\left(1 + \frac{\delta x}{d}\right)\text{ꝛc.}$$

folglich wird auch

$$\frac{Z}{A} = \left(1 + \frac{\alpha x}{a}\right)\left(1 + \frac{\beta x}{b}\right)\left(1 + \frac{\gamma x}{c}\right)\left(1 + \frac{\delta x}{d}\right)\text{ꝛc.}$$

oder

$$Z = A\left(1 + \frac{\beta x}{a}\right)\left(1 + \frac{\beta x}{b}\right)\left(1 + \frac{\gamma x}{c}\right)\left(1 + \frac{\delta x}{d}\right)$$

W. Z. E.

§. 776.

§. 776.

Zusatz.

Wenn man daher in der Gleichung, $x = a$, oder $x = b$, oder $x = c$, oder im zweiten Falle $x = -\frac{a}{\alpha}$, oder $x = -\frac{b}{\beta}$ ꝛc. setzet, so wird die ganze Gleichung verschwinden, oder $= o$ werden.

§. 777.

2. Zusatz.

Die Wurzeln der Gleichung (§. 775.) sind nun entweder alle wirklich, oder nur einige, die andern imaginär, oder es sind alle unmöglich. Da nun zwey Factores allezeit ein wirkliches Produckt geben, (§. 653.) so kann man eine jede Funktzion in ihre einfache wirkliche und gedoppelte wirkliche Faktores auflösen, sobald man voraus setzt, daß die Auflösung der Gleichungen gegeben ist.

§. 778.

Lehrsatz.

Wenn U eine homogene Funktzion zweyer veränderlichen Größen x und y von n Dimensions ist, und man setzt $x = yz$, so verwandelt sich dieselbe in ein Produckt aus der veränderlichen Größe y^n in eine gewisse Funktzion der Größe z.

§. 779.

Beweis.

Weil U eine homogene Funktzion von x und y ist, so ist die Summe der Exponenten der Grös-

sen x und y in allen Gliedern, der Zahl n gleich. Setzt man dahero $x = yz$, so wird in jedem Gliede die Größe y^n seyn, und die ganze Funktion ist also das Product aus y^n in die Funktion der Größe z.

§. 780.

Anmerkung.

Wenn $U = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3$, und man setzet $x = yz$, so wird $U = \alpha y^3 z^3 + \beta y^3 z^2 + \gamma y^3 z + \delta y^3$, oder $U = y^3(\alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z + \delta)$.

Wenn $U = \frac{\alpha x + \beta y}{x^2 + yy}$, und man setzet $x = yz$, so wird $U = \frac{\alpha yz + \beta y}{y^2 z^2 + yy} = \frac{(\alpha z + \beta)y}{(z^2+1)yy}$ $(= \frac{\alpha z + \beta}{z^2 + 1} y^{-1}$.

Dieses gilt auch von den irrationalen Funktionen, wenn nemlich $U = \frac{x + \sqrt{(x^2 + y^2}}{y\sqrt{(x^3 + y^3)}}$ und man setzt $x = yz$, so wird

$U = \frac{yz + \sqrt{(y^2z^2 + y^2)}}{y\sqrt{(y^3z^3 + y^2)}}$, oder

$U = \frac{y + y\sqrt{(zz + 1)}}{yy\sqrt{(yz^3 + y)}} = \frac{y(1 + \sqrt{zz + 1})}{y^{\frac{5}{2}}\sqrt{(z^3 + 1)}}$

$= \frac{(1 + \sqrt{(zz + 1)}\, y^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{(z^3 + 1)}}$

§. 781.

§. 781.

Lehrsatz.

Wenn U eine entwickelte homogene Funktzion zweyer veränderlichen Größen x und y ist, welche in Form einer ganzen algebraischen Größe gegeben wird, so läst sich dieselbe in soviel einfache Factores, welche die Form $\alpha x + \beta y$ haben, auflösen, als die Funktzion Dimensions hat.

§. 782.

Beweis.

Weil U eine homogene Funktzion von x und y ist, die entwickelt, und in Form einer ganzen algebraischen Größe gegeben wird, so wird sie diese Form haben,

$$U = Ax^m + Bx^{m-1}y + Cx^{m-2}y^2 + Dx^{m-3}y^3 \ldots Oy^m.$$

Man setze nunmehro $x = yz$, so wird diese in

$$U = y^m(Az^m + Bz^{m-1} + Cz^{m-2} + Dz^{m-3} + \ldots O$$

verwandelt. Sind nun $z + a$, $z + b$, $z + c$, $z + d$ &c. die Divisores der Gleichung

$$z^m + \frac{Bz^{m-1}}{A} + \frac{Cz^{m-2}}{A} + \ldots \frac{O}{A} = o,$$

so wird $Az^m + Bz^{m-1} + Cz^{m-2} \ldots O = A(z + a)(z + b)(z + c)(z + d)$ &c. und dahero $Z = Ay^m(z + a)(z + b)(z + c)(z + d)$ &c. Und folglich ist hiervon $yz\sqrt[m]{A} + ay\sqrt[m]{A}$ ein Factor. Setzt man nun $\sqrt[m]{A} = \alpha$, und

und $a\sqrt[m]{A} = \beta$, so hat dieser Factor die Form $\alpha yz + \beta y$, und wenn man wieder vor z, dessen Werth $\frac{x}{y}$ setzet, so verwandelt sich dieser Factor in $\alpha x + \beta y$, eben dieses läst sich bey den übrigen anwenden, denn der andre Factor wird $yz\sqrt[m]{A} + yb\sqrt[m]{A}$, und wenn man wieder $\sqrt[m]{A} = \alpha'$, und $b\sqrt[m]{A} = \beta'$ setzet, so wird derselbe $\alpha' yz + \beta' y = \alpha' x + \beta' y$. Und eben so verhält es sich mit den übrigen. Dahero hat auch dieser Satz seine Richtigkeit.

§. 783.

Anmerkung.

Alle homogene Funktzions zweyer veränderlichen Größen von zwey Dimensions, als $ax^2 + bxy + cy^2$ haben also zwey Faktores von der Form $\alpha x + \beta y$: alle homogene Funktzions zweyer veranderlichen Größen von drey Dimensions, und die in der algemeinen Formel $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ enthalten sind, haben drey Factores von dieser Form, und so weiter. Diese Eigenschaft der homogenen Funktzions zweyer veränderlichen Größen läst sich aber nicht auf die homogene Funktzions, dreyer und mehrerer veränderlichen Größen anwenden. So kann man z. E. die allgemeine Formel einer homogenen Funktzion dreyer veränderlichen Grösen x, y, z von der zweiten Dimension, nemlich $ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2$ nicht

in

in allen Fällen durch das Produckt $(\alpha x + \beta y + \gamma z) \times (\delta x + \varepsilon y + \xi z)$ ausdrücken, vielweniger die homogenen Funktzions von höhern Dimensionen dreier und mehrerer veränderlichen Größen.

§. 784.

Diese Lehrsätze von der Verwandlung der Funktzionen sind in der ganzen Auflösungskunst von der äußersten Wichtigkeit, und auf denselben, und auf noch einigen andern beruhen alle die Kunstgriffe, durch deren glückliche Anwendung die grösten Analysten bey den schwersten Aufgaben, sich den Weg zur Auflösung gebahnet. Man kann sich also nicht genug in der Verwandlung der Funktzionen üben, besonders da diese Materie noch eben nicht völlig ausgearbeitet ist, und man sich dahero selbst verschiedene Regeln erfinden muß, deren man sich in vorkommenden Fällen bedienen kann. Inzwischen hat man auch einige allgemeine und sehr brauchbare Methoden vor einige Arten von Funktzions, und bey denen will ich mich etwas aufhalten. Die rationelle gebrochne Funktzions gehören besonders in dieser Klasse, und verdienen alle Aufmerksamkeit. Ich werde dahero die Regeln, deren man sich bedienen kann, um sie zu verwandeln, in dieser Aufgabe vortragen.

§. 785.

Aufgabe.

Es sollen N, D, M lauter ganze und rationelle Funktzions einer veränderlichen Größe x bedeuten; die Funktzion N soll aber von einer niedrigern

Dimen-

Dimension seyn, als die Funktzion D. Ferner soll $M \times P = D$ seyn, es wird nunmehro verlangt, die wahre und reine gebrochne Funktzion $\frac{N}{D}$ in zwey andre Funktzions zu zerfällen, welche $\frac{X}{M}$ und $\frac{Y}{P}$, und so beschaffen sind, das $\frac{N}{D} = \frac{X}{M} + \frac{Y}{P}$, und X, Y auch ganze rationelle Funktzions der veränderlichen Größe x sind.

§. 786.

Vorbereitung.

Weil $\frac{N}{D}$ eine wahre gebrochne Funktzion seyn soll, so müssen der Zähler N und der Nenner D weiter keinen gemeinschaftlichen algebraischen Divisor haben; Denn sonst könnte man diesen Bruch in einen andern verwandeln, indem man Zehler und Nenner durch diesen gemeinschaftlichen Divisor dividirt.

Nun soll $\frac{N}{D} = \frac{X}{M} + \frac{Y}{P}$ seyn, folglich wird $\frac{N}{D} = \frac{PX + MY.}{M.P.}$ Da nun $D = MP$, so muß $N = PX + MY$ seyn, und also ist $X = \frac{N - MY,}{P}$ und $Y = \frac{N - PX.}{P}$

Es wird ferner verlangt, daß X und Y ganze rationelle Funktzions seyn sollen, folglich muß sich

N —

$N - MY$ durch P, und $N - PX$, durch M, so dividiren lassen, daß nichts übrig bleibt. Wenn dieses aber soll geschehen können, so müssen die Funktzions M und P keinen gemeinschaftlichen Divisor haben. Denn gesetzt, d wäre der gemeinschaftliche Divisor von M und P, so, daß $\frac{M}{d} = Q$, und $\frac{P}{d} = R$ wäre, wo Q und R Funktzions sind, welche keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, so würde $M = dQ$, und $P = dR$ seyn. Wenn man nun vor M und P diese Werthe substituirt, so wird $X = \frac{N - d.QY}{d.R}$, und $Y = \frac{N - d.R.X}{d.Q}$.

Sollen nun nach der Voraussetzung X ganze Funktzions seyn, so muß sich N durch d R dividiren lassen, folglich müssen N und d. R, oder P einen gemeinschaftlichen Divisor haben, welches aber den zum Grunde gelegten Bedingungen in der Aufgabe geradesweges widerspricht.

Es folgt also hieraus, daß die Aufgabe nur alsdenn statt findet, wenn M und P solche Funktzions sind, welche keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, und wenn man diese Bedingung noch zu den in der Aufgabe selbst gegebenen hinzusetzt, so wird man die Auflösung folgendergestalt vernehmen können.

§. 787.

§. 787.

Auflösung.

Weil N, D, M, P, X, Y, lauter ganze entwickelte Funktzions seyn sollen, und die Dimension in der Funktzion N nicht so groß seyn soll, als in der Funktzion D, so wird der Exponent der höchsten Dignität von X in dem Zähler N aufs höchste $m - 1$ seyn können, wenn der Exponent der höchsten Dignität von x in dem Nenner m ist. Ferner, weil D das Produckt aus den beyden Funktzionen P und M ist, so muß der Exponent der höchsten Dignität von x in der Funktzion M, nebst den Exponenten der höchsten Dignität von x in der Funktzion P zusammengenommen, so groß seyn, als der Exponent m der höchsten Dignität von x in der Funktzion D. Man setze dahero

$N = \mathfrak{A}x^{m-1} + \mathfrak{B}x^{m-2} + \mathfrak{C}x^{m-3} + \mathfrak{D}x^{m-4} \ldots\ldots \mathfrak{Z}.$

$M = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots\ldots K$

$P = ax^\mu + bx^{\mu-1} + cx^{\mu-2} \ldots\ldots k$

so wird $D = (Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \text{&c.})(ax^\mu + bx^{\mu-1} + cx^{\mu-2} \ldots\ldots k)$,

und dabey ist zu merken, daß $n + \mu = m$ ist.

Will man nun X aus der Formel $X = N - M.Y$ haben, so setze man

$Y = \alpha x^{\mu-1} + \beta x^{\mu-2} + \gamma x^{\mu-3} + \delta x^{\mu-4} + \varepsilon x^{\mu-5} \ldots\ldots \omega x^{\mu-m}$, so wird hieraus

$MY =$

$$MY = A\alpha x^{n+\mu-1} + \left.\begin{matrix} B\alpha \\ +A\beta \end{matrix}\right\} x^{n+\mu-2}$$
$$+C\alpha x^{n+\mu-3} + D\alpha x^{n+\mu-4} + \text{ꝛc.}$$
$$+B\beta \quad +C\beta$$
$$+A\gamma \quad +B\gamma$$
$$+A\delta$$

oder da $n + \mu = m$ ist,

$$MY = A\alpha x^{m-1} + B\alpha x^{m-2} + C\alpha x^{m-3} + D\alpha x^{m-4} + \text{ꝛc.}$$
$$+A\beta \quad +B\alpha \quad +C\beta$$
$$+A\gamma \quad +B\gamma$$
$$+A\delta$$

und also

$$N - MY = \mathfrak{A}x^{m-1} + \mathfrak{B}x^{m-2} + \mathfrak{C}x^{m-3} + Dx^{m-4} + \text{ꝛc.}$$
$$-A\alpha \quad -B\alpha \quad -C\alpha \quad -D\alpha$$
$$-A\beta \quad -B\beta \quad -C\beta$$
$$-A\gamma \quad -B\gamma$$
$$-A\delta$$

Dieser letztere Ausdruck muß sich nun mit $P = ax^{\mu} + bx^{\mu-1} + cx^{\mu-2} + dx^{\mu-3} + \text{ꝛc.}$ so dividiren lassen, daß nichts übrig bleibt, oder der Quotient X eine ganze algebraische Funktzion ist, und da der Quotient, wenn er durch den Divisor multiplicirt wird, nothwendig den Dividendus wieder hervor bringen muß, so muß die Summe der höchsten Exponenten von x, in X und P so groß, als $m - 1$ seyn. Aus dieser Ursach setze man

$$X = A'x^{m-\mu-1} + B'x^{m-\mu-2} +$$
$$C'x^{m-\mu-3} + D'x^{m-\mu-4} + \text{ꝛc.} \ldots O,$$

Um nun die Funktzion X zu wissen, komt es blos

darauf an, daß man die Coefficienten, A′, B′, C′, ꝛc. bestimt. Dieses geschieht aber leicht dadurch, daß PX = N — MY ist. Multiplicirt man daher die Funktions P und X ineinander, so wird

$$\begin{array}{llll} A'ax^{m-1} & +B'ax^{m-2} & +C'ax^{m-3} & +D'ax^{m-4}+\text{ꝛc.} = \\ & +A'b & +B'b & +C'b \\ & & +A'c & +B'c \\ & & & +A'd \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{A}x^{m-1} & +\mathfrak{B}x^{m-2} & +\mathfrak{C}x^{m-3} & +\mathfrak{D}x^{m-4}+\text{ꝛc.} \\ -A\alpha & -B\alpha & -C\alpha & -D\alpha \\ & -A\beta & -B\beta & -C\beta \\ & & -A\gamma & -B\gamma \\ & & & -A\delta \end{array}$$

und in jedem Theile dieser Gleichung ist die Anzahl der Coefficienten = m, denn eben so groß ist die Anzahl der Glieder.

In der Funktion aber, die vor X angenommen worden, ist die Anzahl der Coefficienten A′, B′ ꝛc. der Zahl $m - \mu$ gleich, und in der Funktion, welche vor Y angenommen, ist die Anzahl der Coefficienten, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ꝛc. $= \mu$. Diese Coefficienten α, β ꝛc. sind aber auch willkührlich angenommen worden, und müssen ebenfalls noch bestimt werden. Weil aber die Anzahl μ derselben, nebst der Anzahl $m - \mu$ der Coefficienten, A′, B′, C′, ꝛc. der Zahl m gleich ist, (denn $m - \mu + \mu = m$) so muß man dazu auch m Gleichungen haben.

Vergleicht man aber die Glieder der letzten Gleichung, so bekomt man

A′a

$$A'a = \mathfrak{A} - A\alpha$$
$$B'a + A'b = \mathfrak{B} - B\alpha - A\beta$$
$$C'a + B'b + A'c = \mathfrak{C} - C\alpha - B\beta - A\gamma$$

und so weiter, und da diese Gleichungen alle vom ersten Grade sind, und ihre Anzahl auch so groß ist, als die Zahl m, so kann man durch Hülfe derselben, alle die Coefficienten A', B', C', D' ꝛc. α, β, γ, δ ꝛc. aus den andern gegebenen und bekannten Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ꝛc. A, B, C ꝛc. a, b, c ꝛc. bestimmen, und wenn dieses geschehen, so hat man die Funktzions X und Y.

Will man Y durch die Formel $\frac{N - PX}{M} = Y$ bestimmen, so verfährt man auf eine ähnliche Art.

§. 788.

Anmerkung.

Wenn man die rationellen Brüche in andre zerfällen will, so muß man nothwendig die Factores des Nenners zuerst zu bekommen suchen, welches nach (§. 774.) geschehen kann, und dabey setze ich voraus, daß Zähler und Nenner keine gemeinschaftliche Factores oder Divisors haben. Und wenn alsdenn dieses geschehen, so kann man dieselbe nach der vorigen Aufgabe in zwey andre zerfällen. Dabey muß man aber wieder anmerken, daß diese Factores entweder alle wirklich, oder alle imaginär, oder einige wirklich, und die andern imaginär seyn können. Diese Factores sind nun wieder entweder alle verschieden, oder einige, oder öfters sind auch alle einander gleich. Diese besondre Fälle werden

sich am besten durch Beyspiele auseinander setzen lassen.

§. 789.

1. Exempel.

Man soll den Bruch $\frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$ in zwey andre zerfällen. Nun läst sich der Nenner sehr leicht in zwey Factores zerfällen, welche $x^2 - 1$ und x sind. Vergleicht man nun dieselben mit der vorigen Formel (§. 787.) so kann man $M = x^2 - 1$ und $P = x$ setzen. Man nehme also $X = A'x + B'$, und $Y = \alpha$, so wird

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - x} = \frac{A'x + B'}{x^2 - 1} + \frac{\alpha}{x}.$$

Es muß dahero $x^2 + 1 = A'x^2 + B'x + \alpha x^2 - \alpha$ seyn. Vergleicht man die Glieder, so wird $A' + \alpha = 1$; $B' = 0$ und $-\alpha = 1$. Dadurch findet man $A' = 2$, und demnach ist $X = 2x$, und $Y = -1$. Der gegebene Bruch wird nunmehro dergestalt zerfällt, daß

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - x} = \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x} \text{ ist.}$$

§. 790.

2. Exempel

Wenn der Bruch $\frac{x^2 - 8}{4x^5 - 27x^3 + 18x}$ gegeben wird, so hat der Nenner zwey Factores, $x^3 - 6x$, und $4x^3 - 3$. Wenn man nun diese Größen mit der allgemeinen Formel (§. 787.) ver-

gleicht,

gleicht, so wird $N = x^2 - 8$, $M = x^3 - 6x$, $P = 4x^2 - 3$, folglich ist $n = 3$, $\mu = 2$, $n + \mu = m = 5$. Man muß demnach $Y = \alpha x + \beta$ und $X = A'x^2 + B'x + C'$ annehmen. Hieraus aber wird $N - MY$, oder $x^2 - 8 - \alpha x^4 + 6\alpha x^2 - \beta x^3 + 6\beta x = 4A'x^4 - 3A'x^2 + 4B'x^3 - 3B'x + 4C'x^2 - 3C' = PX$. Aus der Vergleichung dieser Glieder bekomt man also

$$\left.\begin{array}{l} -\alpha = 4A' \\ -\beta = 4B' \\ +6\beta = -3B' \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} 1 + 6\alpha = 4C' - 3A' \\ -8 = -3C \end{array}\right|$$

Hieraus wird $C' = \frac{8}{3}$, $B' = -2\beta$, und $4B' = -8\beta$. Es muß dahero $-\beta = -8\beta'$, oder $(8 - 1)\beta = o$ seyn. Es wird also hieraus auch $\beta = o$, folglich auch $B' = o$. Ferner ist $A = -\frac{\alpha}{4}$, folglich $1 + 6\alpha = \frac{4.8}{3} + \frac{3}{4}\alpha$, und dahero $\alpha = \frac{116}{63}$, $A' = -\frac{29.}{63}$

Der gegebene Bruch wird dahero dergestallt zerfällt, daß

$$\frac{x^2 - 8}{4x^5 - 27x^3 + 18x} = \frac{116x}{63(4x^2 - 3)} - \frac{\left(\frac{29x^2}{63} + \frac{8}{3}\right)}{x^3 - 6x}$$

§. 791.

3. Exempel.

Es sey der Bruch $\frac{11x^3 - 7x^2 + 1}{(4x^2 - 1)(x^3 + 2x - 1)}$ in zwey andre zu verwandeln. Vergleicht man denselben mit der allgemeinen Formel, so wird $N = 11x^3 - 7x^2 + 1$, $M = 4x^2 - 1$, $P = x^3 + 2x - 1$, folglich wird $n = 2$, $\mu = 3$, und $n + \mu = m = 5$. Man muß also $Y = ax^2 + bx + c$, und $X = Ax + B$ annehmen, so daß

$$\frac{11x^3 - 7x^2 + 1}{(4x^2 - 1)(x^3 + 2x - 1)} = \frac{Ax + B}{4x^2 - 1} + \frac{ax^2 + bx + c}{x^3 + 2x - 1}$$

wird. Es muß also

$$Ax^4 + Bx^3 + 2Ax^2 + 2Bx - B = 11x^3 - 7x^2 + 1$$
$$4ax^4 + 4bx^3 + 4cx^2 - Ax - c$$
$$- ax^2 - bx$$

seyn. Vergleicht man nun die Glieder, so wird

$$\begin{array}{l|l} A + 4a = 0 & 2B - A - b = 0 \\ B + 4b = 11 & -B - c = +1 \\ 2A + 4c - a = -7 & \end{array}$$

Hieraus wird

$$A = -4a$$
$$B = 11 - 4b$$
$$A = -\frac{7 + a - 4c}{2}$$
$$B = \frac{A + b}{2}$$
$$-B = 1 + c$$

Aus diesen Gleichungen bekomt man aufs neue

$-4a$

$$-4a = -\frac{7 + a}{2} - 4c$$

und $a = \frac{7 + 4c}{9}$

Ferner ist $\frac{A + b}{2} = -1 - c$, folglich $A = -2 - 2c - b$, oder $-4a = -2 - 2c - b$, und also $a = \frac{2 + 2c}{4} + \frac{b}{4}$. Aus diesen beyden Werthen von a bekomt man

$$\frac{7 + 4c}{9} = \frac{2 + 2c}{4} + \frac{b}{4}$$

folglich $28 + 16c = 18 + 18c + 9b$

und hieraus $c = \frac{10 - 9b}{2}$

Ferner ist auch $11 - 4b = -1 - c$

folglich $c = 4b - 12$.

Demnach wird $4b - 12 = \frac{10 - 9b}{2}$

oder $17b = 34$,

folglich ist $b = 2$, $c = -4$, $a = -1$ | $A = +4$, $B = +3$.

Und dahero ist

$$\frac{11x^3 - 7x^2 + 1}{(4x^2 - 1)(x^3 + 2x - 1)} = \frac{4x + 3}{4x^2 - 1} - \frac{(x^2 - 2x + 4)}{x^3 + 2x - 1}$$

, und wenn man diese addirt, so wird man sich leicht von der Richtigkeit der Operation überzeugen.

§. 792.

Wenn man die Funktzion $\frac{N}{M.P}$ auf diese Art in die beyde Funktzions $\frac{X}{M}$ und $\frac{Y}{P}$ zertheilet hat, so kann man weiter gehen, und jede von diesen Funktzions $\frac{X}{M}$ und $\frac{Y}{P}$ wieder in andre zerfällen, und mit denen aufs neue gefundenen eben wieder so verfahren. Dabey muß man aber folgende Fälle untersuchen.

1) Wenn die gebrochne Funktzion $\frac{N}{D}$ gegeben wird, so hat der Nenner D entweder lauter wirkliche Factores, welche alle verschieden sind, so, daß $D = (ax+b)(cx+d)(ex+f)(gx+h)$ ꝛc. und denn läst sich nach und nach die Funktzion $\frac{N}{D}$ in soviel einzelne Brüche zerfällen, als D Factores hat, und es wird $\frac{N}{D} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d} + \frac{C}{ex+f} + \frac{D}{gx+h}$ ꝛc. wo A, B, C ꝛc. lauter gegebene und bekannte Größen sind, wovon man sich leicht durch das vorhergehende überzeugen kann.

2) Hat aber der Nenner D zwar lauter wirkliche Factores, allein einige sind einander gleich, die andern sind aber alle verschieden, so, daß

$$\frac{N}{D} = \frac{N}{(ax+b)(cx+d)\text{ ꝛc.} \times (px+q)^m (rx+f)^n \text{ ꝛc.}}$$

so

so kann man diese Funktzion dergestalt zerfällen, daß $N = \frac{X}{(ax+b)(cx+d)\,\&c.} + \frac{Y}{(px+q)^m} +$ $\frac{Z}{(rx+f)^n} + \&c.$ ist, wo X, Y, Z Funktzions von x sind.

Hat aber in der gebrochnen Funktzion $\frac{N}{D}$ der Nenner D, wirkliche Factores die verschieden, wirkliche Factores die einander gleich, und imaginäre Factores, davon zwey und zwey den doppelten wirklichen Factor $((px+q)^2 + rr)$ geben, so, daß $D = (ax+b)(cx+d)\,\&c. \times (\alpha x+\beta)^m (\gamma x+\delta)^n \times \&c. ((px+q)^2+rr)^t \times \&c.$ ist, so kann man den Bruch $\frac{N}{D}$ in andre zerfällen, so daß $\frac{N}{D} = \frac{X}{(ax+b)(cx+d)\times\&c.} + \frac{Y}{(\alpha x+\beta)^m} + \frac{U}{(\gamma x+\delta)^n} + \&c. + \frac{Z}{((px+q)^2+rr)^t} +$ &c. ist, wo X, Y, U, Z &c. lauter Funktzions von x bedeuten.

§. 793.

Um dahero bey der Zerfällung der gebrochnen Funktzion $\frac{N}{D}$ in andre, soweit fortzugehen, als man will, muß man auf eine Methode bedacht seyn, die Funktzions $\frac{X}{(px+q)^m}$ und $\frac{X}{((px+q)^2+rr)^m}$ in andre zu zerfällen, indem man voraussetzt, daß

diese Brüche wahre Brüche sind, und der höchste Exponent in X kleiner ist, als m.

§. 794.
Aufgabe.

Wenn die Funktzion $\frac{X}{(px+q)^m}$ gegeben wird, und X hat diese Form $\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \text{ꝛc.} \ldots\ldots n$, so, daß n kleiner ist, als m, dieselbe in andre gebrochne Funktzions zu zerfällen.

§. 795.
Auflösung.

Man setze $px + q = z$, so wird $x = \frac{z - q}{p}$.

Diesen Werth von x setze man in der Funktzion X, so wird

$$\alpha x^n = \frac{\alpha z^n}{p^n} - \frac{n.\alpha q z^{n-1}}{1\ p^n} + \frac{n.n-1.}{1.2}\cdot\frac{\alpha q^2 z^{n-2}}{p^n} - \text{ꝛc.}$$

$$\beta x^{n-1} = + \frac{\beta z^{n-1}}{p^{n-1}} - \frac{n-1.}{1}\cdot\frac{\beta.q.z^{n-2}}{p^{n-1}} + \text{ꝛc.}$$

$$\gamma x^{n-2} = + \frac{\gamma z^{n-2}}{p^{n-2}} - \text{ꝛc.}$$

ꝛc. ꝛc.

Der Fortgang ist hierinnen leicht zu sehen. Der Kürze wegen setze man aber

$$A = \frac{\alpha}{p^n}$$

$$B = \frac{\beta}{p^{n-1}} - \frac{n.\alpha.q}{p^n}$$

C =

$$C = \frac{\gamma}{p^{n-2}} - \frac{(n-1)\beta . q}{1 . p^{n-1}} + \frac{n . n-1 \; \alpha \; q^2}{1 . 2 . p^n}$$

$$D = \frac{\delta}{p^{n-3}} - \frac{n-2 . \gamma . q}{p^{n-2}} + \frac{n-1 . n-2 . \beta q^2}{1 . 2 . p^{n-1}} - \frac{n . n-1 . n-2 . \alpha q^3}{1 . 2 . 3 \; p^n}$$

und so weiter, so wird

$$\frac{X}{(px+q)^m} = \frac{Az^n}{z^m} + \frac{Bz^{n-1}}{z^m} + \frac{Cz^{n-2}}{z^m} + \frac{Dz^{n-3}}{z^m} + \text{ꝛc.}$$

oder

$$\frac{X}{(px+q)^m} = \frac{A}{z^{m-n}} + \frac{B}{z^{m-n+1}} + \frac{C}{z^{m-n+2}} + \frac{D}{z^{m-n+3}} + \text{ꝛc.} \; \frac{K}{z^m}$$

setzt man nun wieder vor z dessen Werth $px + q$ so wird

$$\frac{X}{(px+q)^m} = \frac{A}{(px+q)^{m-n}} + \frac{B}{(px+q)^{m-n+1}} + \frac{C}{(px+q)^{m-n+2}} + \text{ꝛc. . . . .} \frac{K}{(px+q^m}$$

und hier sind die Werthe der Buchstaben A, B, C ꝛc. vermittelst den Coefficienten der Glieder in der Funktzion X bekannt.

§. 796.

Zusatz.

Wenn die Funktzion $\frac{X}{((px+q)^2+rr)^m}$ gegeben wird, wo X eben die Form $\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \text{ꝛc.}$

$+$ ꝛc. hat, so läst sich dieselbe nach (§. 787.) in zwey andre Funktzions zertheilen, so, daß

$$\frac{X}{((px+q)^2+rr)^m} = \frac{U}{(px+q+r\sqrt{-1})^m}$$

$$\frac{Y}{(px+q-r\sqrt{-1})^n}$$ ist. Eine iede davon hat die Form, welche wir in der vorigen Aufgabe betrachtet haben, und kann also nach eben der dortgezeigten Methode abgehandelt werden. Man setze nemlich $q+r\sqrt{-1}=a$, und $q-r\sqrt{-1}=b$, so wird

$$\frac{X}{((px+q)^2+rr)^m} = \frac{U}{(px+a)^m} + \frac{Y}{(px+b)^m}$$

setzet man dahero $px+a=z$, und $px+b=u$, so kann man jeden von den Brüchen $\frac{U}{(px+a)^m}$ und $\frac{Y}{(px+b)^m}$ nach den vorigen §phen in andre zerfällen. Und auf diese Art kann man eine jede rationelle wahre gebroche Funktzion $\frac{N}{D}$ in soviel andre zerfällen, als man will.

§. 797.

Außer diese Art, die gebrochne Funktzions zu zerfällen, giebt es noch einige andre Methoden, deren man sich in vielen Fällen mit Nutzen bedienen kann, nemlich die Funktzions, welche in Form eines algebraischen Bruchs gegeben werden, in unendliche Reihen zu verwandeln, und dabey komt es vornehmlich auf folgendes an.

§. 798.

§. 798.

Aufgabe.

Eine jede gebrochne algebraische rationelle Funktzion, welche diese Form hat

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + cx^4 + \text{ꝛc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{ꝛc.}}$$

in eine unendliche Reihe zu verwandeln.

§. 799.

Auflösung.

Man weiß, daß wenn man den Quotienten durch den Divisor multiplicirt, man allezeit den Dividendus wieder hervorbringt. Um also diese gebrochne Funktzion in eine unendliche Reihe zu verwandeln, nehme man an

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ꝛc.}$$

sey der Quotient, welcher entsteht, wenn man $a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{ꝛc.}$ durch $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{ꝛc.}$ dividirt. Multiplicirt man nun den angenommenen Quotienten durch den Divisor, so bekomt man

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{ꝛc.} =}{\begin{array}{l} A\alpha + B\alpha x + C\alpha x^2 + D\alpha x^3 + E\alpha x^4 + \text{ꝛc.} \\ \quad + A\alpha + B\beta + C\beta + D\beta x^4 \\ \qquad + A\gamma + B\gamma + C\gamma \\ \qquad\quad + A\delta + B\delta \\ \qquad\qquad + A\varepsilon \end{array}}$$

und hier ist der Fortgang sehr leicht zu sehen. Diese durch die Multiplication entstandene Reihe muß

nun

nun dem Dividendo gleich seyn. Dieses kann aber nicht anders geschehen, als wenn

$A\alpha = a$
$B\alpha + A\beta = b$
$C\alpha + B\beta + A\gamma = c$
$D\alpha + C\beta + B\gamma + A\delta = d$
$E\alpha + D\beta + C\gamma + B\delta + A\varepsilon = e$
&c. &c. &c. &c. &c. &c.

ist. Hieraus wird aber ferner

$$A = \frac{a}{\alpha}$$

$$B = \frac{b - A\beta}{\alpha}$$

$$C = \frac{c - B\beta - A\gamma}{\alpha}$$

$$D = \frac{d - C\beta - B\gamma - A\delta}{\alpha}$$

$$E = \frac{e - D\beta - C\gamma - B\delta - A\varepsilon}{\alpha}$$

&c. &c.

Nachdem man auf diese Art die Coefficienten A, B, C, D &c. der Glieder des angenommenen Quotienten bestimt, so hat man die unendliche Reihe, die so beschaffen ist, daß

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{&c.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{&c.}} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{&c.}$$

§. 800.

Anmerkung.

Wenn man hier auf den Fortgang der Coefficienten, A, B, C &c. acht hat, so wird man leicht gewahr,

gewahr, daß ein jeder durch die vorhergehenden bestimt wird. Z. E. der Coefficient C wird durch A und B, und die gegebene Größen, α, β und γ bestimt. Weil man dahero bey dergleichen unendlichen Reihen auf die vorhergehende Glieder zurück gehen muß, so pflegt man dieselben zurückgehende Reihen, (Series recurrentes) zu nennen

§. 801.

Um aber die allgemeine Formel auf einige besondre Fälle anzuwenden, wollen wir den Bruch $\frac{a}{\alpha + \beta x}$ nehmen. Vergleicht man denselben mit der allgemeinen Formel, so werden b, c ꝛc. γ, δ ꝛc. alle $= o$. Setzt man dahero, daß $\frac{a}{\alpha+\beta x} = A + Bx + Cx^2 +$ ꝛc. so wird

$A = \frac{a}{\alpha}$ | $C = +\frac{a\beta^2}{\alpha^3}$ | $E = +\frac{a\beta^4}{\alpha^5}$

$B = -\frac{a\beta}{\alpha^2}$ | $D = -\frac{\alpha\beta^2}{\alpha^4}$ | $F = -\frac{\alpha\beta^5}{\alpha^6}$

und so weiter, und es wird

$$\frac{a}{\alpha + \beta x} = \frac{a}{\alpha} - \frac{a\beta x}{\alpha^2} + \frac{a\beta^2 x^2}{\alpha^3} - \frac{a\beta^3 x^3}{\alpha^4} + \frac{a\beta^4 x^4}{\alpha^5} -$$ ꝛc.

Hier können a, α, β, x auch willkührliche Zahlen bedeuten. So setze man z. E. $a = 1$, $\beta = -1$, $\alpha = 3$, $x = 1$, so wird

$$\frac{a}{\alpha+\beta x} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729}$$ ꝛc.

setzt

setzt man $\alpha = 4$, und behält das übrige, so wird

$$\frac{1}{4-1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \text{&c.}$$

Setzt man $\alpha = 5$, und behält das übrige, so wird

$$\frac{1}{5-1} = \frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \text{&c.}$$

und so kann man weiter gehen.

§. 802.

Bey diesen Reihen wird man leicht gewahr, daß, je weiter man dieselben fortsetzt, je kleiner die Glieder derselben werden. Hat man sie endlich bis auf eine ziemliche Anzahl von Gliedern fortgeführt, so werden die letzten Glieder so klein, daß man dieselben, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, weglassen kann. *Eine solche Reihe nähert sich also beständig dem wahren Werth des Bruchs, dem dieselbe gleich ist, wenn sie ins unendliche fortgeführt wird.* Auf diese Art komt diese Reihe, wenn man diese Glieder nimt,

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5}$$

oder die Summe derselben, schon $\frac{1}{3}$ ziemlich nahe, nimt man aber noch einige Glieder mehr, als

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{4^7} + \frac{1}{4^8}$$

so komt die Summe dieser Glieder dem Bruch $\frac{1}{3}$ noch näher, und so geht es immer weiter fort. Dergleichen Reihen, welche sich dem Werth einer gewissen

wissen Größe beständig nähern, werden convergirende Reihen genent. (Series convergentes.)

§. 803.

Es giebt aber auch Reihen, welche sich von dem wahren Werthe destomehr entfernen, je weiter man sie fortführt. Man setze z. E. in dem vorigen Exempel, $a = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, so wird

$$\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} = 1-2+4-8+16-32+64-128 \text{ &c.}$$

diese Reihe weicht immer mehr und mehr von dem wahren Werth des Bruchs $\frac{1}{3}$ ab, je weiter sie fortgeführt wird. Dahero nennt man auch dergleichen Reihen abweichende Reihen, Series diuergentes. Sie haben nicht den geringsten Nutzen, und aus dieser Ursach muß man dieselbe zu vermeiden suchen.

§. 804.

Aufgabe.

Wenn die Größen x und y dergestalt voneinander abhangen, daß

$$ay^m + by^{m+1} + cy^{m+2} + dy^{m+3} + \text{&c.}$$
$$= \alpha x^m + \beta x^{m+1} + \gamma x^{m+2} + \delta x^{m+3}$$

wo die Buchstaben a, b, c, d &c. α, β, γ, δ &c. bekannte und unveränderliche Größen bedeuten; den Werth der veränderlichen Größe x durch eine unendliche Reihe auszudrücken, welche nach den Potenzen der Größe y fortgeht.

§. 805.

Auflösung.

Man setze $x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \text{&c.}$ oder welches einerley ist, $x = y(A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \text{&c.}$ so wird

$$x^m = y^n(A + By + Cy^2 + Dy^3 + \text{&c.})^m$$

Es sey ferner $(A + By + Cy^2 + \text{&c.})^m = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}y^2 + \mathfrak{D}y^3 + \text{&c.}$

$$(A + By + Cy^2 + \text{&c.})^{m+1} = \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'y + \mathfrak{C}'y^2 + \mathfrak{D}'y^3 + \text{&c.}$$

$$(A + By + Cy^2 + \text{&c.})^{m+2} = \mathfrak{A}'' + \mathfrak{B}''y + \mathfrak{C}''y^2 + \mathfrak{D}''y^3 + \text{&c.}$$

$$(A + By + Cy^2 + \text{&c.})^{m+3} = \mathfrak{A}''' + \mathfrak{B}'''y + \mathfrak{C}'''y^2 + \mathfrak{D}'''y^3 + \text{&c.}$$

und auf eine ähnliche Art gehe man weiter. Diese verschiedene Dignitäten von x setze man in der Reihe (§. 804.) so bekomt man

$$\alpha x^m = y^m(\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\alpha y + \mathfrak{C}\alpha y^2 + \mathfrak{D}\alpha y^3 + \mathfrak{E}\alpha y^4 + \text{&c.}$$

$$\beta x^{m+1} = y^{m+1}(\beta\mathfrak{A}' + \beta\mathfrak{B}'y + \beta\mathfrak{C}'y^2 + \beta\mathfrak{D}'y^3 + \text{&c.}$$

$$\gamma x^{m+2} = y^{m+2}(\gamma\mathfrak{A}'' + \gamma\mathfrak{B}''y + \gamma\mathfrak{C}''y^2 + \text{&c.}$$

$$\delta x^{m+3} = y^{m+3}(\delta\mathfrak{A}''' + \delta\mathfrak{B}'''y + \text{&c.}$$

$$\varepsilon x^{m+4} = y^{m+4}(\varepsilon\mathfrak{A}^{IV} + \text{&c.}$$

Diese Reihe muß eben der Reihe $ay^m + by^{m+1} + cy^{m+2} + dy^{m+3} + \text{&c.}$ gleich seyn, und man bekomt

$$y^m(a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 + \text{&c.}) =$$

$$y^m(\mathfrak{A}\alpha + \alpha\mathfrak{B}y + \alpha\mathfrak{C}y^2 + \alpha\mathfrak{D}y^3 + \alpha\mathfrak{E}y^4 + \alpha\mathfrak{F}y^5 + \text{&c.}$$
$$+ \beta\mathfrak{A}'y + \beta\mathfrak{B}'y^2 + \beta\mathfrak{C}'y^3 + \beta\mathfrak{D}'y^4 + \beta\mathfrak{E}'y^5$$
$$+ \gamma\mathfrak{A}''y^2$$

$$+\gamma\mathfrak{A}''y^2+\gamma\mathfrak{B}''y^3+\gamma\mathfrak{C}''y^4+\gamma\mathfrak{D}''y^5$$
$$+\delta\mathfrak{A}'''y^3+\delta\mathfrak{B}'''y^4+\delta\mathfrak{C}'''y^5$$
$$+\varepsilon\mathfrak{A}^{IV}y^4+\varepsilon\mathfrak{B}^{IV}y^5$$
$$+\zeta\mathfrak{A}^{V}y^5$$

Weil nun beyde Reihen einerley seyn müssen, und man vergleicht die Coefficienten von einerlei Dignität von y, so wird

$\mathfrak{A}\alpha = a$
$\mathfrak{B}\alpha+\beta\mathfrak{A}'=b$
$\mathfrak{C}\alpha+\beta\mathfrak{B}'+\gamma\mathfrak{A}''=c$
$\mathfrak{D}\alpha+\beta\mathfrak{C}'+\gamma\mathfrak{B}''+\delta\mathfrak{A}'''=d$
$\mathfrak{E}\alpha+\beta\mathfrak{D}'+\gamma\mathfrak{C}''+\delta\mathfrak{B}'''+\varepsilon\mathfrak{A}^{IV}=e$
$\mathfrak{F}\alpha+\beta\mathfrak{E}'+\gamma\mathfrak{D}''+\delta\mathfrak{C}'''+\varepsilon\mathfrak{B}^{IV}+\zeta\mathfrak{A}^{V}=f$

und so gehen diese Gleichungen ohne Ende fort, und das Gesetz, welches bey denselben statt findet, fällt aufs deutlichste in die Augen.

§. 806.

Weil $(A+By+Cy^2+\text{ꝛc.})^{m+1} = (A+By+Cy^2+\text{ꝛc.})^m \times (A+By+Cy^2+\text{ꝛc.})$ und $(A+By+Cy^2+\text{ꝛc.})^m = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}y+\mathfrak{C}y^2+\text{ꝛc.}$ so wird

$(A+By+Cy^2\ \text{ꝛc.})^{m+1} = (\mathfrak{A}+\mathfrak{B}y+\mathfrak{C}y^2+\text{ꝛc.})(A+By+Cy^2+Dy^3+\text{ꝛc.})$

Da aber $(A+By+Cy^2+\text{ꝛc.})^{m+1} = \mathfrak{A}'+\mathfrak{B}'y+\mathfrak{C}'y^2+\mathfrak{D}'y^3$, so wird auch

$\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}'y+\mathfrak{C}'y^2+\mathfrak{D}'y^3+\text{ꝛc.} =$
$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}y+\mathfrak{C}y+\text{ꝛc.}) \times (A+By+Cy^2+\text{ꝛc.})$

Multiplicirt man nun wirklich, so bekomt man

$$\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'y + \mathfrak{C}'y^2 + \mathfrak{D}'y^3 + \mathfrak{E}'y^4 + \text{ꝛc.} =$$

$$\begin{array}{l} A\mathfrak{A} + B\mathfrak{A}y + C\mathfrak{A}y^2 + D\mathfrak{A}y^3 + E\mathfrak{A}y^4 + \text{ꝛc.} \\ \quad + A\mathfrak{B}y + B\mathfrak{B}y^2 + C\mathfrak{B}y^3 + D\mathfrak{B}y^4 + \cdot \\ \qquad + A\mathfrak{C}y^2 + B\mathfrak{C}y^3 + C\mathfrak{C}y^4 + \cdot \\ \qquad\qquad + A\mathfrak{D}y^3 + B\mathfrak{D}y^4 + \cdot \\ \qquad\qquad\qquad + A\mathfrak{E}y^4 + \cdot \end{array}$$

Vergleicht man dahero wieder die Glieder miteinander, so wird

$$\mathfrak{A}' = A\mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{B}' = A\mathfrak{B} + B\mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{C}' = A\mathfrak{C} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{D}' = A\mathfrak{D} + B\mathfrak{C} + C\mathfrak{B} + D\mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{E}' = A\mathfrak{E} + B\mathfrak{D} + C\mathfrak{C} + D\mathfrak{B} + EA$$

und so gehen diese Gleichungen auf eine ähnliche Art fort. Auf eben diese Art, weil $(A + By + Cy^2 + \text{ꝛc.})^{m+2} = (A + By + Cy^2 + \text{ꝛc.})^{m+1}$ $(A + By + \text{ꝛc.}) = (\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'y + \mathfrak{C}'y^2 + \mathfrak{D}'y^3 \text{ ꝛc.}) \times (A + By + Cy^2 + Dy^3 + \text{ꝛc.})$ ist, bekomt man

$$\mathfrak{A}'' = A\mathfrak{A}'$$
$$\mathfrak{B}'' = A\mathfrak{B}' + B\mathfrak{A}'$$
$$\mathfrak{C}'' = A\mathfrak{C}' + B\mathfrak{B}' + C\mathfrak{A}'$$
$$\mathfrak{D}'' = A\mathfrak{D}' + B\mathfrak{C}' + C\mathfrak{C}' + D\mathfrak{A}'$$
$$E'' = A\mathfrak{E}' + B\mathfrak{D}' + C\mathfrak{C}' + D\mathfrak{B}' + E\mathfrak{A}'$$
$$\text{ꝛc.} \qquad\qquad \text{ꝛc.}$$

Man kann ferner so mit allen den übrigen Reihen, so (§. 805.) angenommen worden, verfahren, und wenn man dieses thut, so erhält man

$$\mathfrak{A}''' = A\mathfrak{A}''$$
$$\mathfrak{B}''' = A\mathfrak{B}'' + B\mathfrak{A}''$$

$\mathfrak{C}'''$

$$\mathfrak{C}''' = A\mathfrak{C}'' + B\mathfrak{B}'' + C\mathfrak{A}''$$
$$\mathfrak{D}''' = A\mathfrak{D}'' + B\mathfrak{C}'' + C\mathfrak{B}'' + D\mathfrak{A}''$$
$$\mathfrak{E}''' = A\mathfrak{E}'' + B\mathfrak{D}'' + C\mathfrak{C}'' + D\mathfrak{B}'' + E\mathfrak{A}''$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$
$$\mathfrak{A}^{IV} = A\mathfrak{A}'''$$
$$\mathfrak{B}^{IV} = A\mathfrak{B}''' + B\mathfrak{A}'''$$
$$\mathfrak{C}^{IV} = A\mathfrak{C}''' + B\mathfrak{B}''' + C\mathfrak{A}'''$$
$$\mathfrak{D}^{IV} = A\mathfrak{D}''' + B\mathfrak{C}''' + C\mathfrak{B}''' + D\mathfrak{A}'''$$
$$\mathfrak{E}^{IV} = A\mathfrak{E}''' + B\mathfrak{D}''' + C\mathfrak{C}''' + D\mathfrak{B}''' + E\mathfrak{A}'''$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$

Man siehet hieraus aufs deutlichste, wie man weiter fortgehen muß, und daß die folgende Buchstaben beständig von den vorhergehenden abhangen. Hat man davon unn soviel bestimt, als es nöthig ist, so bekomt man aus den Gleichungen am Ende des 605 Syhen folgende Werthe

$$\mathfrak{A} = \frac{a}{\alpha}$$
$$\mathfrak{B} = \frac{b - \beta\mathfrak{A}'}{\alpha}$$
$$\mathfrak{C} = \frac{c - \beta\mathfrak{B}' - \gamma\mathfrak{A}''}{\alpha}$$
$$\mathfrak{D} = \frac{d - \beta\mathfrak{C}' - \gamma\mathfrak{B}'' - \delta\mathfrak{A}'''}{\alpha}$$
$$\mathfrak{E} = \frac{e - \beta\mathfrak{D}' - \gamma\mathfrak{C}''' - \delta\mathfrak{B}''' - \varepsilon\mathfrak{A}^{IV}}{\alpha}$$

&c. und so ferner die übrigen willkührlich angenommene Coefficienten.

§. 807.

Weil zu Anfang angenommen worden, daß

$$(A + By + Cy^2 + \text{&c.})^m = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}y^2$$

$\mathfrak{C}y^2 + \mathfrak{D}y^2 +$ ꝛc. so wird nach (§. 535.)

$\mathfrak{A} = A^m$

$\mathfrak{B} = \frac{m.\ B\mathfrak{A}}{A}$

$\mathfrak{C} = \frac{(m-1)\,B\mathfrak{B} + 2m\,C\mathfrak{A}}{2A}$

$\mathfrak{D} = \frac{(m-2)B\mathfrak{C} + (2m-1)C\mathfrak{B} + 3mD\mathfrak{A}}{3A}$

$\mathfrak{E} = \frac{(m-3)B\mathfrak{D} + (2m-2)C\mathfrak{C} + (3m-1)D\mathfrak{B} + 4mE\mathfrak{A}}{4A}$

und so weiter. Hieraus aber bekomt man ferner

$A = \mathfrak{A}^{\frac{1}{m}}$

$B = \frac{A\mathfrak{B}}{m\mathfrak{A}}$

$C = \frac{2A\mathfrak{C} - (m-1)B\mathfrak{B}}{2m\mathfrak{A}}$

$D = \frac{3A\mathfrak{D} - (m-2)B\mathfrak{C} - (2m-1)C\mathfrak{B}}{3m\mathfrak{A}}$

$E = \frac{4A\mathfrak{E} - (m-3)B\mathfrak{D} - (2m-2)C\mathfrak{C} - (3m-1)D\mathfrak{B}}{4m\mathfrak{A}}$

und nach diesem Gesetz, welches sehr deutlich in die Augen fällt, gehen die Coefficienten F ꝛc. weiter fort. Eine geringe Untersuchung zeigt ferner, daß allemal der folgende, durch die vorhergehenden bestimt wird. Hat man aber in vorkommenden Fällen diese Buchstaben A, B, C ꝛc. nach diesen Regeln bestimt, so bekomt man den Werth von x aus der Reihe

$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 +$ ꝛc.

§. 808.

§. 808.

Anmerkung.

Um diese allgemeine Formeln auf einige besondre Fälle anzuwenden, setze man, es sey die Reihe

$ay = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{ꝛc.}$

gegeben, und man wollte den Werth von x durch eine andre Reihe bestimmen; so nehme man

$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \text{ꝛc.}$

Hält man diese Reihe gegen die allgemeine, (§. 804.) so wird

$a = a$, $b = c$, $c = o$, $d = o$, und alle die übrigen $= o$. Der Exponent m aber wird 1.

Ferner wird $\mathfrak{A} = A$, $\mathfrak{B} = B$, $\mathfrak{C} = C$ und so weiter, folglich

$\mathfrak{A}' = A^2$
$\mathfrak{B}' = 2AB$
$\mathfrak{C}' = 2AC + B^2$
$\mathfrak{D}' = 2AD + 2BC$
$\mathfrak{E}' = 2AE + 2BD + C^2$
$\mathfrak{F}' = 2AF + 2BE + 2CD$
$\mathfrak{G}' = 2AG + 2BF + 2CE + DD$

und so weiter. Ferner

$A\mathfrak{A}' = A^3$
$A\mathfrak{B}' = 2A^2B$
$A\mathfrak{C}' = 2A^2C + AB^2$
$A\mathfrak{D}' = 2A^2D + 2ABC$
$A\mathfrak{E}' = 2A^2E + 2ABD + AC^2$
$A\mathfrak{F}' = 2A^2F + 2ABE + 2ACD$
$A\mathfrak{G}' = 2A^2G + 2ABF + 2ACE + AD^2$
$A\mathfrak{H}' = 2A^2H + 2ABG + 2ACF + 2ADE$

ꝛc. ꝛc.

$$\mathfrak{BA}' = A^2B$$
$$\mathfrak{BB}' = 2AB^2$$
$$\mathfrak{BC}' = 2ABC + B^3$$
$$\mathfrak{BD}' = 2ABD + 2B^2C$$
$$\mathfrak{BE}' = 2ABE + 2B^2D + BC^2$$
$$\mathfrak{BF}' = 2ABF + 2B^2E + 2BCD$$
$$\mathfrak{BG}' = 2ABG + 2B^2F + 2BCE + BD^2$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$
$$\mathfrak{CA}' = A^2C$$
$$\mathfrak{CB}' = 2ACB$$
$$\mathfrak{CC}' = 2AC^2 + CB^2$$
$$\mathfrak{CD} = 2ACD + 2BC^2$$
$$\mathfrak{CE}' = 2ACE + 2BCD + C^3$$
$$\mathfrak{CF}' = 2ACF + 2BCE + 2C^2D$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$
$$\mathfrak{DA}' = DA^2$$
$$\mathfrak{DB}' = 2ABD$$
$$\mathfrak{DC}' = 2ACD + B^2D$$
$$\mathfrak{DD}' = 2AD^2 + 2BCD$$
$$\mathfrak{DE}' = 2ADE + 2BD^2 + C^2D$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$
$$\mathfrak{EA}' = EA^2$$
$$\mathfrak{EB}' = 2ABE$$
$$\mathfrak{EC}' = 2ACE + B^2E$$
$$\mathfrak{ED}' = 2ADE + 2BCE$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$
$$\mathfrak{FA}' = FA^2$$
$$\mathfrak{FB}' = 2ABF$$
$$\mathfrak{FC}' = ACF + B^2F$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$

$GA' = GA^2$
$GB, = 2ABG$
&c. &c.
$HA' = HA^2$
Hieraus bekomt man also
$A'' = A^3$
$B'' = 3A^2B$
$C'' = 3A^2C + 3AB^2$
$D'' = 3A^2D + 6ABC + B^3$
$E'' = 3A^2E + 6ABD + BAC^2 + 3B^2C$
$F'' = 3A^2F + 6ABE + 6ACD + 3B^2D + 3BC^2$
&c. &c.
Ferner ist
$AA'' = A^4$
$AB'' = 3A^3B$
$AC'' = 3A^3C + 3A^2B^2$
$AD'' = 3A^3D + 6A^2BC + AB^3$
$AE'' = 3A^3E + 6A^2BD + 3A^2C^2 + 3AB^2C$
$AF'' = 3A^3F + 6A^2BE + 6A^2CD + 3AB^2D + 3ABC^2$
&c. &c.
$BA'' = A^3B$
$BB'' = 3A^2BB$
$BC'' = 3A^2BC + 3AB^3$
$BD'' = 3A^2BD + 6AB^2C + B^4$
$BE'' = 3A^2BE + 6AB^2D + 3ABC^2 + 3B^3C$
&c. &c.
$CA'' = A^3C$
$CB'' = 3A^2BC$
$CC'' = 3A^2C^2 + 3AB^2C$
$CD'' = 3A^2CD + 6ABC^2 + B^3C$
&c. &c.

$D\mathfrak{A}'' = A^3D$
$D\mathfrak{B}'' = 3A^2BD$
$D\mathfrak{C}'' = 3A^2CD + 3AB^2D$
&c. &c.
$E\mathfrak{A}'' = A^3E$
$E\mathfrak{B}'' = 3A^2BE$
&c. &c.
$F\mathfrak{A}'' = A^3F$

und so weiter. Hieraus wird

$\mathfrak{A}''' = A^4$
$\mathfrak{B}''' = 4A^3B$
$\mathfrak{C}''' = 4A^3C + 6A^2B^2$
$\mathfrak{D}''' = 4A^3D + 12A^2BC + 4AB^3$
$\mathfrak{E}''' = 4A^3E + 12A^2CD + 6A^2C^2 + 12AB^2C + B^4$
&c. &c.

Ferner

$A\mathfrak{A}''' = A^5$
$A\mathfrak{B}''' = 4A^4B$
$A\mathfrak{C}''' = 4A^4C + 6A^3B^2$
$A\mathfrak{D}''' = 4A^4D + 12A^3BC + 4A^2B^3$
$A\mathfrak{E}''' = 4A^4E + 12A^3BD + 6A^3C^2 + 12A^2B^2C + AB^4$
&c. &c.
$B\mathfrak{A}''' = A^4B$
$B\mathfrak{B}''' = 4A^3B^2$
$B\mathfrak{C}''' = 4A^3BC + 6A^2B^3$
$B\mathfrak{D}''' = 4A^3BD + 12A^2B^2C + 4AB^4$
&c. &c.

$C\mathfrak{A}'''$

$$\mathfrak{C}\mathfrak{A}''' = A^4C$$
$$\mathfrak{C}\mathfrak{B}''' = 4A^3BC$$
$$\mathfrak{C}\mathfrak{C}''' = 4A^3C^2 + 6A^2B^2C$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$
$$\mathfrak{D}\mathfrak{A}''' = A^4D \quad \Big| \quad \mathfrak{E}\mathfrak{A}''' = A^4E$$
$$\mathfrak{D}\mathfrak{B}''' = 4A^4BD$$

Hieraus wird denn wieder

$$\mathfrak{A}^{IV} = A^5$$
$$\mathfrak{B}^{IV} = 5A^4B$$
$$\mathfrak{C}^{IV} = 5A^4C + 10A^3B^2$$
$$\mathfrak{D}^{IV} = 5A^4D + 20A^3BC + 10A^2B^3$$
$$\mathfrak{E}^{IV} = 5A^4E + 20A^3BD + 30A^2B^2C + 10A^3C^2 + 5AB^4$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$

Weiter

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{IV} = A^6$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{IV} = 5A^5B$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{C}^{IV} = 5A^5C + 10A^4B^2$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{D}^{IV} = 5A^5D + 20A^4BC + 10A^3B^3$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$
$$\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{IV} = A^5B$$
$$\mathfrak{B}\mathfrak{B}^{IV} = 5A^4B^2$$
$$\mathfrak{B}\mathfrak{C}^{IV} = 5A^4B\mathfrak{C} + 10^4AB^3$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$
$$\mathfrak{C}\mathfrak{A}^{IV} = A^5C$$
$$\mathfrak{C}\mathfrak{B}^{IV} = 5A^4BC$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$
$$\mathfrak{D}\mathfrak{A}^{IV} = A^5D$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$

Also

$\mathfrak{A}^V = A^6$

$\mathfrak{B}^V = 6A^5B$

$\mathfrak{C}^V = 6A^5C + 15A^4B^2$

$\mathfrak{D}^V = 6A^5D + 30A^4BC + 20A^3B^3$

&c. &c.

$A\mathfrak{A}^V = A^7$

$A\mathfrak{B}^V = 6A^6B$

$A\mathfrak{C}^V = 6A^6C + 15A^5B^2$

&c. &c.

$B\mathfrak{A}^V = A^6B$

$B\mathfrak{B}^V = 6A^5B^2$

&c. &c.

$C\mathfrak{A}^V = A^6C$

&c. &c.

folglich

$\mathfrak{A}^{VI} = A^7$

$\mathfrak{B}^{VI} = 7A^6B$

$C^{VI} = 7A^6C + 21A^5B^2$

&c. &c.

$A\mathfrak{A}^{VI} = A^8$

$A\mathfrak{B}^{VI} = 7A^7B$

&c. &c.

folglich $\mathfrak{A}^{VII} = A^8$

$\mathfrak{B}^{VII} = 8A^7B$

&c. &c.

Endlich $\mathfrak{A}^{VIII} = A^9$

Hieraus wird endlich

$A = \mathfrak{A} = \frac{a}{\alpha}$

$B = \mathfrak{B} = -\frac{\beta A^2}{\alpha}$

C=

$$C = \mathfrak{C} = -\frac{2\beta AB - \gamma A^3}{\alpha}$$

$$D = \mathfrak{D} = -\frac{2\beta AC - \beta B^2 - 3\gamma A^2 B - \delta A^4}{\alpha}$$

$$E = \mathfrak{E} = -\frac{2\beta AD - 2\beta BC - 3\gamma A^2 C - 3\gamma AB^2 - 4\delta A^3 B - \varepsilon A^5}{\alpha}$$

$$F = \mathfrak{F} = -\frac{2\beta AE - 2\beta BD - \beta C^2 - 3\gamma A^2 D - 6\gamma ABC - \gamma B^3 - 4\delta A^3 C - 6\delta A^2 B^2 - \varepsilon A^4 B - \xi A^6}{\alpha}$$

$$G = \mathfrak{G} = -\frac{2\beta AF - 2\beta BE - 2\beta CD - 3\gamma A^2 E - 6\gamma ABD - 3\gamma AC^2 - 3\gamma B^2 C - 4\delta A^3 D - 12\delta A^2 BC - 4\delta AB^3 - 5\varepsilon A^4 C - 10\varepsilon A^3 B^2 - 6\xi A^5 B - \eta A^7}{\alpha}$$

$$H = \mathfrak{H} = -\frac{2\beta AG - 2\beta BF - 2\beta CE - \beta DD - 3\gamma A^2 F - 6\gamma ABE - 6\gamma ACD - 3\gamma B^2 D - 3\gamma BC^2 - 4\delta A^3 E - 12\delta A^2 BD - 6\delta A^2 C^2 - 2\delta AB^2 C - \delta B^4 - 5\varepsilon A^4 D - 20\varepsilon A^3 BC - 10\varepsilon A^2 B^3 - 6\xi A^5 C - 15\xi A^4 B^2 - 7\eta A^6 B - \theta A^8}{\alpha}$$

§. 809.

Gesetzt, es wäre $ay = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{ꝛc.}$ und man will x durch eine Reihe bestim-

stimmen, so muß man erstlich α herüber bringen so, daß

$ay - \alpha = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$ ꝛc.

wird. Alsdenn setze man $ay - \alpha = z$, so wird $z = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 +$ ꝛc. und nehme $x = Az + Bz^2 + Dz^3 + Ez^4$ ꝛc. an, und verfahre nach dem vorhergehenden, so wird man den Werth von von x ebenfalls bekommen.

§. 810.

Wäre hingegen $ay^m = \alpha x + \beta x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 +$ ꝛc. so setze man hier $y^m = z$, so, daß $y = \sqrt[m]{z}$, und $az = \alpha x + \beta x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 +$ ꝛc. wird, alsdenn nehme man wieder $x = Az + Bz^2 + Dz^3 +$ ꝛc. und bestimme die Coefficienten nach dem vorhergehenden, so wird man den Werth von x durch die unendliche Reihe ausgedrückt bekommen.

§. 811.

Auf eine ähnliche Art verfährt man, wenn man diese Reihe hat

$ay = \alpha x^2 + \beta x^3 + \gamma x^4 + \delta x^5 +$ ꝛc.

man setzt nemlich $y = z^2$, damit man

$az^2 = \alpha x^2 + \beta x^3 + \gamma x^4 + \delta x^5 +$ ꝛc.

erhält. Nimt man alsdenn wieder $x = Az + Bz^2 + Cz^3 +$ ꝛc. an, so kann man nach dem vorhergehenden wieder diese Coefficienten bestimmen, und den Werth von x durch z, und hernach durch y erhalten.

§. 812.

Und überhaupt, wenn man $ay^m = \alpha + \beta x^n + \gamma x^{n+p} + \delta x^{n+q} + \varepsilon x^{n+r} + \text{ꝛc.}$ hat, in der n, p, q, r ganze positive Zahlen sind, so bringt man α auf die andre Seite, und setzt alsdenn $ay^m - \alpha = z^n$, damit man diese Reihe bekomt $z^n = \beta x^n + \gamma x^{n+p} + \delta x^{n+q} + \varepsilon x^{n+r} + \text{ꝛc.}$ und beobachtet wieder die vorhin gegebene Regeln, so wird man seinen Endzweck erreichen.

§. 813.

Diese Formeln enthalten die Lehre von der Umkehrung der Reihen, (de Reversione Serierum) und sind von der gröſten Wichtigkeit. Dieses ist auch die Ursach, warum ich dabey so weitläuftig gewesen bin, und eine ziemliche Anzahl von Coefficienten bestimt habe. Es kam hier hauptsächlich darauf an, ein geschicktes Gesetz ausfindig zu machen, nachdem die Coefficienten der neuen Reihe bestimt werden konnten, und dessen man sich in der Ausübung mit einiger Bequemlichkeit bedienen konte, ohne seine Geduld gar zu sehr zu ermüden. Das, was ich angegeben, scheint das Beste zu seyn, und man kann mit geringer Mühe soviel Coefficienten der neuen angenommenen Reihe $x = Ay + By^2 + Cy^3 + \text{ꝛc.}$ bestimmen, als man will. Sind besonders die Buchstaben, a, b, c ꝛc. α, β, γ, δ ꝛc. Zahlen, so geht die ganze Rechnung sehr geschwinde, und die Coefficienten A, B, C ꝛc. werden so ziemlich einfach ausgedrückt, und man kann

in

in den meisten Fällen mit einigen wenigen zurechte kommen.

Eilfter Abschnitt.

Von der geometrischen Construktion der Funktzions.

§. 814.

Aufgabe.

Eine gegebene Funktzion y einer veränderlichen Größe x geometrisch zu construiren.

§. 815.

Vorbereitung.

Die Funktzion y der veränderlichen Größe x mag beschaffen seyn, wie sie will, und entwickelt oder noch verwickelt seyn, so komt es bey der Auflösung dieser Aufgabe blos darauf an, jeden angenommenen Werth, den die Größe y nach der Beschaffenheit der Funktzion bekomt, wenn man der Größe x einen gewissen Werth beylegt, durch solche Größen zu bestimmen, welche in der Geometrie bekannt sind. Es kommen aber in der Geometrie verschiedene Größen, als gerade Linien, Winkel, Flächen, Zirkelbogen ꝛc. vor, und unter diesen muß man diejenigen aussuchen, welche dieses auf die bequemste Art bewerkstelli-

stelligen können. Die gerade Linien verdienen vor allen übrigen den Vorzug, und nach diesen folgen, der Leichtigkeit der Beschreibung wegen, die Zirkelbogen.

§. 816.

Die gerade Linie ist aber besonders geschickt, eine jede veränderliche Größe vorzustellen. Denn da eine veränderliche Größe von nichts anfangen, und sowohl positiv, als negativ, beständig größer werden kann, so kann man dieselben folgender gestalt sehr bequem durch eine gerade Linie anzeigen. Man ziehe nehmlich in einer Fläche nach Gefallen eine gerade Linie MN, die, wenns erfordert wird, soweit verlängert werden kann, als man es vor gut befindet. Auf derselben nehme man nach Willkühr einen Punkt A an, so wird dadurch die gerade Linie MN in zwey Theile getheilet, welche einander der Lage nach gerade entgegen gesetzt sind. Gesetzt nun, der Buchstabe x bedeutet eine veränderliche Größe von einer gewissen Art (§. 705.) die entweder positiv, oder negativ seyn kann, und die auf einer gewissen Art aus einer Einheit U entsteht, welche mit derselben homogen ist: So nehme man eine gerade Linie A an, und betrachte dieselbe auch als Eins. (1) Wenn nun x sich zu der Einheit U verhält, wie die Zahl m zu 1, und positiv ist, und man nimt auf der geraden MN von A nach N zu eine gerade Linie AP dergestalt an, daß $AP : CD \text{ (oder } 1) = m : 1 = x : U$, so wird AP die Größe x vollkommen ausdrücken. Fig. 82.

Hat man aber vorausgesetzt, daß man diejenige Linien, welche die Größe x ausdrücken, wenn dieselbe positiv ist, von A nach N zu auf der Linie MN abschneidet; und man will die Größe x, wenn dieselbe negativ ist, auch vorstellen, so muß man die Linie AQ, welche dieselbe ausdrücken soll, auf der andern Seite von A, nemlich von A nach M zu, abschneiden, und umgekehrt. Fig. 82.

§. 817.

Wenn man auf diese Art den Werth der Grösse x durch die gerade Linien ausdrückt, die man von A an, auf der Linie MN abschneidet, so komt es ferner darauf an, den Werth der Größe y auf eine solche Art vorzustellen, daß man denselben sogleich findet, wenn man nur den Werth der Grösse x weis. Weil aber der Zusammenhang der Größe y mit der Größe x durch eine Funktzion gegeben wird, so bekomt y allezeit entweder nur einen oder verschiedene Werthe, nachdem die Funktzion beschaffen ist, und diese müssen alle zugleich so ausgedrückt werden, daß man vor jeden angenommenen Werth der Größe x, gleich alle die dazu gehörige Werthe der Größe y übersehen kann. Dieses wird aber am besten auf folgende Art geschehen können.

§. 818.

Auflösung.

Man ziehe eine gerade Linie MN, und nehme auf derselben einen Punkt A nach Gefallen, und von diesem an, nehme man auf der geraden Linie MN alle diejenigen Werthe, welche man der verän- Fig. 83.

der-

änderlichen Größe x beylegt, und zwar, wenn man die positiven Werthe von A nach N zu nimt, so nehme man die negativen Werthe von A nach M zu, und umgekehrt.

Durch A ziehe man eine andre gerade Linie CD, welche die Linie MN unter einen gewissen Winkel DAN durchschneidet. Gesetzt nun, indem man $x = AP = + a$ in der Funktzion setzet, bekäme die Größe y folgende Werthe, $+ b$, $+ c$, $- d$, $- f$ ꝛc. so ziehe man durch P eine gerade Linie parrallel mit CD, und nehme auf derselben von P an die gehörigen Werthe welche die Größe y bekomt, und zwar mit der Bedingung, daß man alle die positiven Werthe auf dieser Linie von P nach der Gegend D zu aufträget, die negativen aber auf eben dieser Linie von P nach C zu herunter legt; oder umgekehrt, daß man alle positive Werthe von y, von P nach C zu und alle negative Werthe von P nach D zu, nimt. Da nun hier y die Werthe $+ b$, $+ c$ hat, wenn $x = AP$, so nehme man $PQ = b$, $PR = c$, und da auch y die Werthe $- d$, $- f$ bekomt, wenn $x = AP$, so nehme man $PS = - d$, und $PT = - f$.

Eben so wenn man der Größe x einen andern Werth AP, beylegt, und y bekomt aus der Funktzion dadurch die Werthe $+ b'$, $+ c'$, $- d'$, $- f'$ ꝛc. so ziehe man wieder durch P' eine gerade Linie parrallel mit CD, und nehme darauf $P'Q' = + b'$, $P'R' = + c'$, $P'S' = - d'$, $P'T' = - f'$ ꝛc.

Wenn man nun bey allen möglichen Werthen die man der Linie x beyleget, auf eben die Art verfähret, und die Werthe von y gehörig aufträget, so ist offenbar, daß alle die Punkte, welche die Werthe von y bestimmen, in einer gewissen krummen Linie liegen müssen, und diese Linie wird alsdenn die Funktion y gehörig vorstellen.

§. 819.

Man wird also die Funktion y der veränderlichen Größe x construiren, wenn man über der angenommenen geraden Linie MN eine gewisse Linie beschreibt, die in den meisten Fällen eine krumme Linie seyn wird, und so beschaffen ist, daß, wenn man durch A eine gerade Linie CD, und durch die Punkte P, P′, P″ mit derselben parrallel Linien zieht, welche die krumme Linie in den Punkten Q, R, S, T ꝛc. Q′, R′, S′, T′ ꝛc. Q″, R″, S″, T″ ꝛc. durchschneiden, die Linien PQ, PR die positiven, und PS, PT die negativen Werthe sind, welche die Größe y bekomt, wenn man in der Funktion $x = +$ AP setzet, und daß P′Q′, P′R′ ꝛc. die positiven und P′S′, P′T′ ꝛc. die negativen Werthe sind, welche y bekomt, wenn man $x =$ AP′ setzet, und so weiter. Ferner, daß wenn man auf der andern Seite von A nach M zu, durch die Punkte p, p' ꝛc. gerade Linien mit CD parrallel zieht, welche die krumme Linie in q, r, s, t ꝛc. q', r', s', t' ꝛc. durchschneiden, die Linien pq, pr die positive Werthe sind, welche y bekomt, wenn man $x = -$ Ap setzet, und ps, pt die

die negativen Werthe der Größe y sind, wenn $x = -Ap$ ist, und eben so, daß $p'q'$, $p'r'$ die positiven, $p's'$, $p't'$ ꝛc. die negativen Werthe sind, welche y bekomt, wenn man in der Funktzion, durch welche der Zusammenhang der beyden Größen x und y angezeigt wird, $x = -Ap$ setzet.

§. 820.

Anmerkung.

Es fehlet aber sehr viel, daß man eine jede krumme Linie gleichsam mit einen Zuge, wie den Zirkel in der Geometrie, beschreiben könnte, daß man vielmehr seine Zuflucht zu andern Methoden nehmen muß, durch Hülfe deren man wenigstens im Stande ist, soviel Punkte der krummen Linie, welche eine gegebene Funktzion vorstellen soll, zu finden, daß man dadurch den Fortgang derselben übersehen kann. Dieses kann nun entweder durch Hülfe der geraden Linien und des Zirkels geschehen, oder man drückt nach einer festgesetzten Einheit, alle die bekannten Größen in der Funktzion durch Zahlen aus, und sucht alsdenn vor jeden in Zahlen angenommenen Werth der Größe x, die dazu gehörige Werthe der Größe y, nachdem die Natur der Funktzion dieselben angiebt, und zwar verfährt man dabey, wie bey der Auflösung der Gleichungen gezeigt worden, und diese Werthe der Größe y werden ebenfalls in Zahlen ausgedrückt seyn. Hernach verfährt man, wie in der Auflösung gezeigt worden. Ehe ich aber diese Methode durch Beispiele erläutere,

werde ich einige Benennungen erklären, die man der Kürze wegen angenommen hat.

§. 821.

Erklärung.

Die Linie MN auf der die Werthe der Größe x genommen werden, heist die Grundlinie oder Basis, oder auch die Linie der Abszissen, auch zuweilen die Axe. (Linea abscissarum vel directrix)

Der Punkt A von dem die Werthe der Größe x an gerechnet werden, wird der Anfangspunkt der Abszissen genennt.

Die Abszissen selbst sind aber diejenigen Theile der Linie MN, welche von dem Punkt A an abgeschnitten werden, um die Werthe der Größe x anzuzeigen.

Die Linien PQ, PR, PS, PT ꝛc. welche zwischen der Grundlinie und einem Punkt, als Q oder R ꝛc. in der krummen Linie, eingeschlossen, und mit der durch A gezogenen Linie CD parrallel sind, heißen Ordinaten oder Applikaten (ordinatim applicatæ). Die Linie CD aber, mit der dieselben parrallel sind, heist die Seite (Latus).

Die Abszissen und Ordinaten zusammengenommen, heißen aber coordinirte Linien, (Coordinatæ).

Die Winkel DAN, oder DAM, oder CAN, oder CAM werden aber die coordinaten Winkel genennt, und zwar sind DAN, DAM die Winkel

kel der positiven, und CAN, CAM die Winkel der negativen Ordinaten.

§. 822.

Anmerkung.

Um nunmehro die Aufgabe §. 814. durch einige Beyspiele zu erläutern, nehme man diese Funktion von x,

$$y = ax + x^2$$

welche man geometrisch beschreiben soll. Hier komt die Größe a vor, welche unveränderlich bleibet, und die man als die Einheit ansehen kann.

Diese unveränderliche Größe a, ist nun, nachdem die Aufgabe beschaffen ist, welche zu dieser Funktion führet, entweder selbst eine Linie oder eine andre Größe. Im ersten Falle sey die Größe a der Linie AB (Fig. 84.) gleich. Ist aber a eine andre Größe, die aus einer gewissen Einheit entsteht, welche U ist, so, daß $a : U = m : 1$, wo m eine gewisse Zahl bedeutet, so nehme man die Linie CD vor die Einheit an, und alsdenn suche man eine andre Linie AB, die so beschaffen ist, daß $1 : m = CD : AB$ ist, so wird AB diese Größe vorstellen.

Jetzt aber wollen wir annehmen, die Größe a sey der Linie AB gleich. Man ziehe die Linie MN, und nehme auf derselben den Punkt A zum Anfangspunkt der Abszissen an, und setze ein vor allemahl fest, daß man auf der Linie MN von A nach N zu die positiven Werthe von x nehmen Fig. 84.

will, und daß von A nach M zu die negativen Werthe der Größe x abgeschnitten werden sollen.

Durch A ziehe man die Linie CD, welche mit MN eine beliebigen Winkel einschließt, und mit dieser sollen die Ordinaten parrallel laufen, und zwar sollen alle positive Ordinaten in der Figur oberhalb MN, die negativen aber alle unterhalb fallen.

Nachdem dieses geschehen, gebe man der Abszisse x nach und nach verschiedene Werthe, und berechne nach dieser Voraussetzung die Werthe der Ordinate y, indem man $a = AB = 1$ setzet, so ist, wenn

$x = 0$ die Ordinate $y = 0$
$x = +\frac{1}{2}a$ " " $y = \frac{3}{4}$
$x = +1$ " " $y = 2$
$x = \frac{3}{2}$ " " $y = +\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$
$x = 2$ " " $y = +6$

und so gehe man weiter fort. Hierauf setze man x nach und nach verschiedenen negativen Größen gleich, und berechne darnach wieder die Werthe von y, so ist, wenn

$x = -\frac{1}{4}$ " " " $y = -\frac{3}{16}$
$x = -\frac{1}{2}$ " " " $y = -\frac{1}{4}$
$x = -\frac{3}{4}$ " " " $y = -\frac{3}{16}$
$x = -1$ " " " $y = 0$
$x = -\frac{3}{2}$ " " " $y = +\frac{3}{4}$
$x = -2$ " " " $y = +2$
&c. &c.

und so gehe man mit der Berechnung weiter fort.

Hat

Hat man endlich eine hinlängliche Anzahl Ordinaten gefunden, so nehme man auf der Linie MN von A nach N zu die Linie

$$AP = \frac{1}{2}\,AB$$
$$AP' = 1\,AB$$
$$AP'' = \frac{3}{2}\,AB$$
$$AP''' = 2\,AB$$

ꝛc. und ziehe durch die Punkte P, P′ ꝛc. gerade Linien mit CD parallel, und oberhalb MN fallen, darauf nehme man die Linie

$$Pp = \frac{3}{4}\,AB$$
$$P'p' = 2\,AB$$
$$P''P'' = 3\frac{3}{4}\,AB$$
$$P'''P''' = 6\,AB$$

und so weiter. Vor die negativen Abszissen nehme man von A nach M zu die Linien

$$AQ = -\frac{1}{4}\,AB$$
$$AQ' = -\frac{1}{2}\,AB$$
$$AQ'' = -\frac{3}{4}\,AB$$
$$AQ''' = -1\,AB$$
$$AQ^{IV} = -\frac{3}{2}\,AB$$
$$AQ^{V} = -2$$

ꝛc. und ziehe durch alle diese Punkte Q, Q′ ꝛc. wieder gerade Linien mit CD parrallel, und nehme alsdenn unterhalb MN die negativen Applikaten, nemlich

$$Qq = -\frac{3}{10}\,AB$$
$$Q'q' = -\frac{1}{4}\,AB$$
$$Q''q'' = -\frac{3}{10}\,AB$$
$$Q'''q''' = 0.$$

Und hernach wieder oberhalb MN diejenigen Applikaten, welche positiv werden, als

$$Q^{IV}q^{IV} = +\tfrac{3}{4}AB$$
$$Q^{V}q^{V} = +2AB$$

und so weiter. Hierauf ziehe man alle die gefundene Punkte p, p' ꝛc. q, q' ꝛc. zusammen, so ergiebt sich alsdenn der Zug der krummen Linie, welche diese Funktzion $y = ax + xx$ vorstellt, soweit als man die Punkte bestimt hat, ziemlich genau.

§. 813.

Wenn die Funktzion, durch die y gegeben wird, verwickelt ist, so kann man vorhero versuchen, ob sich dieselbe entwickeln, oder in andre einfache Funktzions auflösen läst, die wenn sie in einander multiplicirt werden die gegebene Funktzion wieder hervorbringen. Gesetzt man wollte die krumme Linie beschreiben, welche diese Funktzion

$$y^4 - 96yy - x^4 + 100x^2 = 0$$

ausdrückt, so kann man diese Funktzion, welche verwickelt ist, auseinander setzen, das ist, nach der bekannten Methode diese Gleichung auflösen, und denn bekomt man vier Werthe von y, welche sind

1) $y = +\sqrt{(48 + \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$
2) $y = +\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$
3) $y = -\sqrt{(48 + \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$
4) $y = -\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$

Wenn man nun nach Anleitung dieser Wurzeln die krumme Linie beschreiben will, welche die gegebene Funktzion vorstellen soll, so ziehe man wieder die Linie MN, und durch den Punkt A in derselben

die

die Linie CD und bestimme vor jeden angenommenen Werth der Abszissen x den Werth der dazu gehörigen Ordinaten, deren Anzahl allezeit vier seyn wird. Ehe wir aber dieses thun, wollen wir die Wurzeln etwas genauer untersuchen, und da sieht man gleich, daß die krumme Linie, welche die Funktion vorstellt, die Linie MN in vier Punkten schneiden kann, und wenn man $y = o$ setzet. so werden diese vier Werthe

$$\mp V(48 \mp V(x^4 - 100x^2 + 2304)) = o$$

diese Punkte anzeigen, in denen dieses geschiehet. Multiplicirt man aber, so bekomt man

$$x^4 - 100x^2 = o.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung zeigen demnach die Abszissen an, wo die krumme Linie die Linie MN durchschneidet, und diese sind

$$x = +0$$
$$x = -0$$
$$x = +10$$
$$x = -10$$

und weiter durchschneidet die krumme Linie die Linie MN nicht.

Wenn man diese Wurzeln weiter untersucht, so wird man gewahr, daß die Ordinaten y in gewissen Fällen imaginär werden können, und dieses geschiehet, wenn

$$x^4 - 100x^2 + 2304$$

eine negative Größe ist.

Außerdem aber werden auch die beyde Ordinaten

1) $y = +\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100x^2 + 2304)})}$
2) $y = -\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100x^2 + 2304)})}$
imaginär, sobald als die Abszisse x dergestalt angenommen wird, daß $\sqrt{(x^4 - 100x^2 + 2304)}$ größer ist, als 48.

Wenn man nunmehro die Werthe von y vor jeden angenommenen Werth der Abszisse x berechnet, so erhält man vor die beyde Wurzeln
1) $y = +\sqrt{(48 + \sqrt{(x^4 - 100x^2 + 2304)})}$
2) $y = +\sqrt{(48 + \sqrt{(x^4 - 100x^2 + 2304)})}$
Wenn die Applikate

$x = \mp 0 \cdot y = \mp\sqrt{(48 + \sqrt{2304})} = 9{,}798 -$
$x = \mp 1 \cdot y = \mp\sqrt{(48 + \sqrt{2205})} = 9{,}744 +$
$x = \mp 2 \cdot y = \mp\sqrt{(48 + \sqrt{1920})} = 9{,}582 +$
$x = \mp 3 \cdot y = \mp\sqrt{(48 + \sqrt{1485})} = 9{,}302 +$
$x = \mp 4 \cdot y = \mp\sqrt{(48 + \sqrt{960})} = 8{,}887 +$
$x = \mp 5 \cdot y = \mp\sqrt{(48 + \sqrt{429})} = 8{,}289 +$
$x = \mp 6 \cdot y = \mp\sqrt{(48 + 0)} = 6{,}928 +$
$x = \mp 7 \cdot y = \mp\sqrt{(48 + \sqrt{-195})} =$ imaginär,
$x = \mp 8 \cdot y = \mp\sqrt{(48 + 0)} = 6{,}928 +$
$x = \mp 9 \cdot y = \mp\sqrt{(48 + \sqrt{765})} = 8{,}698 +$
$x = \mp 10 \cdot y = \mp\sqrt{(48 + \sqrt{2304})} = 9{,}798 +$
$x = \mp 11 \cdot y = \mp\sqrt{(48 + \sqrt{4845})} = 10{,}845 +$
$x = \mp 12 \cdot y = \mp\sqrt{(48 + \sqrt{8640})} = 11{,}856 +$
&c. &c.

und vor die beyde Wurzeln
1) $y = +\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100x^2 + 2304)})}$
2) $y = -\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100x^2 + 2304)})}$
Wenn die Applicate

$x =$

$x = \mp 0$	$y = \mp \sqrt{(48 - \sqrt{2304})} = \mp 0$
$x = \mp 1$	$y = \mp \sqrt{(48 - \sqrt{2205})} = \mp 021$
$x = \mp 2$	$y = \mp \sqrt{(48 - \sqrt{1920})} = \mp 2{,}045$
$x = \mp 3$	$y = \mp \sqrt{(48 - \sqrt{1485})} = \mp 3{,}076$
$x = \mp 4$	$y = \mp \sqrt{(48 - \sqrt{960})} = \mp 4{,}125$
$x = \mp 5$	$y = \mp \sqrt{(48 - \sqrt{429})} = \mp 5{,}224$
$x = \mp 6$	$y = \mp \sqrt{(48 - 0)} = \mp 6{,}928$
$x = \mp 7$	$y = \mp \sqrt{(48 - \sqrt{-195})} =$ imaginär
$x = \mp 8$	$y = \mp \sqrt{(48 - 0)} = \mp 6{,}929$
$x = \mp 9$	$y = \mp \sqrt{(48 - \sqrt{765})} = \mp 4{,}510$
$x = \mp 10$	$y = \mp \sqrt{(48 - \sqrt{2304})} = 0$
$x = \mp 11$	$y = \mp \sqrt{(48 - \sqrt{4845})} =$ imaginär,

und wenn man x noch Größer annimt, so werden alle übrige Applicaten auch imaginär.

Nunmehro ziehe man zwey Linien MN, CD durch A unter einen gewissen Winkel, oder in diesem Punkt perpendikulär aufeinander, und indem man AB (Fig. 84.) als die Einheit betrachtet, nehme Fig. 87 man von A nach N zu die Linien

$Aa = 1$	$Ap = 4$
$Af = 2$	$Au = 5$
$Ak = 3$	$Ao = 6$

und ziehe durch alle diese Punkte gerade Linien parallel mit CD, und nehme alsdenn

$AC = +9{,}798$	$km = +9{,}302$
$AD = -9{,}798$	$ko = -9{,}302$
$ac = +9{,}744$	$pr = +8{,}887$
$ae = -9{,}744$	$pt = -8{,}887$
$fh = +9{,}582$	$uy = +8{,}289$
$fi = -9{,}582$	$uz = -8{,}289$

ꝛc. und so weiter aus der ersten Tabelle. Aus der zweiten aber

$ab =$

$ab = +1{,}021$	$kl = +3{,}076$
$ad = -1{,}021$	$kn = -3{,}076$
$fg = +2{,}045$	$pq = +4{,}125$
$fg' = -2{,}045$	$pn = -4{,}125$
&c.	&c.

und so auch auf der andern Seite von A nach M zu. Zieht man endlich alle diese Punkte zusammen, so entstehet ohngefehr die Figur, welche man in der Tafel sieht, und davon ein Theil die Gestalt einer Achte (8) hat.

§. 814.

Auf eben diese Art verfährt man auch in andern Fällen; und um die Natur der krummen Lienien kennen zu lernen, muß man auf die Natur der Funktion acht haben, davon die krumme Lienie gleichsam eine sinnliche Abbildung ist. In dieser Absicht wollen wir verschiedene Funktions durchgehen, und da zeigen sich zuerst die einförmige Funktions von x, und es entsteht die Frage, wie die krumme Lienien beschaffen seyn werden, welche dieselbe ausdrücken.

Wenn aber P einen algebraischen rationellen Ausdruck bedeutet, in dem keine Wurzelzeichen vorkommen, welche die Größe x angehen, kurz, wenn P eine einförmige Funktion von x, oder

$$P = \frac{a + bx + cx^2 + \text{&c.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{&c.}}$$

ist, so werden alle krumme Lienien, welche diese Funktion vorstellen, oder deren Natur durch diese Funktion ausgedrückt wird, durch die allgemeine Gleichung $y = P$ gegeben. Und da siehet man, daß

zu

zu jeder angenommenen Abszisse x eine, und nicht mehrere Applikaten gehören, man mag übrigens x so groß annehmen, als man will: folglich, wenn man über die Grundlienie M N und der Seite C D (§ 821) eine krumme Lienie beschreibet, deren Natur durch die Gleichung $y = P$ angezeigt wird, so wird eine jede mit C D parallel gezogene gerade Lienie E F dieselbe nur in einen einzigen Punkt durchschneiden.

§. 815.

Gesetzt aber y ist eine zweyförmige Funktzion von x, so wird die allgemeine Formel derselben diese seyn:

$$y^2 + Py + Q = o$$

indem P und Q lauter einförmige Funktzions von x sind, und also diese Form haben:

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{ꝛc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{ꝛc.}}$$

In diesen hat nun y allezeit zwey Werthe, nemlich es ist

$$1)\ y = -\frac{P}{2} + \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)}$$

und $2)\ y = -\frac{P^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{P^2}{4} - Q\right)}$

Folglich wenn eine krumme Lienie beschrieben wird, so, daß M N die Grundlinie und C D die Seite derselben ist, so findet man von jeden angenommenen Werth den Abszisse, entweder zwey Applikaten oder gar keine, nachdem die beyden Wurzeln wirklich oder imaginär sind. Wenn man also mit C D eine gerade Linie E F parallel zieht, so wird dieselbe die krumme Lienie entweder in zwey Punkten, oder in gar keinen durchschneiden. Alle Fig. 86.

Linien,

Lienien, welche eine zweyförmige Funktzion vorstellen, gehen dahero entweder ohne Ende fort, oder sie sind in einem endlichen Raum eingeschlossen.

§. 816.

Es sey y eine dreyförmige Funktzion von x, so ist ihre allgemeine Form diese:

$$y^3 - Py^2 + Qy + R = o$$

indem P, Q, R, lauter einförmige Funktzions von x sind. Was man also auch vor einen Werth der Abszisse x beylegt, so bekommt die Applikate y, die dazu gehöret, allezeit entweder drey Werthe, oder einen, und die übrigen sind imaginär. Doch muß zu jeder Abszisse wenigstens eine Applikate gehören, weil nur zwey imaginäre Wurzeln in dieser Gleichung seyn können. Wenn man dahero über der Grundlienie M N und die Seite C D eine krumme Lienie beschreibet, welche durch diese Funktzion ausgedrückt wird, so muß eine jede Lienie, wie E F, welche mit C D parallel gezogen wird, die krumme Lienie entweder in einen oder in dreyen Punkten durchschneiden, in einem Punkte aber wird sie dieselbe allezeit durchschneiden. Diese krumme Lienien werden also entweder wie (Fig. 85.) aus Theilen bestehen, die von einander abgesondert sind, aber doch nur eine krumme Lienie ausmachen, und davon einer gewiß ohne Ende fortgehet; oder sie werden wie (Fig. 86.) mit einem Zuge ohne Ende fortgehen.

§. 817.

§. 827.

Es sey überhaupt y eine $m$förmige Funktion von x, so ist ihre allgemeine Form diese: $y^m + Py^{m-1} + Qy^{m-2} + Ry^{m-3} + Sy^{m-4}$ ꝛc. $= o$, wo P Q R ꝛc. lauter einförmige Funktions von x sind; und in derselben hat y so viel Werthe, als der Buchstabe oder die Zahl m Einheiten hat, und diese sind entweder alle wirklich, oder es sind einige davon imaginär. Die Anzahl der imaginären Wurzeln, wenn welche darinnen sind, ist aber entweder $n - 2$, oder $n - 4$, oder $n - 6$, oder $n - 8$ ꝛc. Wenn man dahero über die Grund-Lienie M N und der Seite C D eine krumme Lienie beschreibt, welche diese Funktion vorstellt, so werden zu jeder angenommenen Abszisse so viel Applickaten gehören, als entweder die Zahl n, oder $n - 2$, oder $n - 4$, oder $n - 6$, oder $n - 8$ ꝛc. anzeigt. Folglich wird eine jede gerade Lienie E F, welche mit C D parallel gezogen wird, die krumme Lienie entweder in n, oder $n - 2$, oder $n - 4$, oder $n - 6$, oder $n - 8$ ꝛc. Punkten durchschneiden.

§. 828.

Die krumme Lienien, welche eine gewisse Funktion ausdrücken, werden nach Beschaffenheit derselben entweder algebraische oder transzendente Lienien seyn. Algebraische krumme Lienien, (curvæ algebraicæ) sind diejenigen, welche eine algebraische Funktion vorstellen; transzendente oder mechanische krumme Linien aber (curvæ transcendentes vel mecha-

nicæ) werden diejenigen genennt, welche eine transzendente Funktzion (§. 764) vorstellen.

§. 829.

Uebrigens hängt die Figur einer gewissen krummen Lienie, welche eine Funktzion vorstellt, sowohl von der Funktzion selbst, als von den Grundlienien, den Anfangspunkt der Abzissen, und den Winkel ab, unter den die Ordinaten die Grundlienie durchschneiden. Wenn also eine krumme Lienie, nach Anleitung einer gegebenen Funktzion beschrieben worden, so, daß dabey die Lage der Grundlienie, der Anfangspunkt den Abszissen, und der coordinaten Winkel gegeben worden; so kann dabey die Frage entstehen, wie die Funktzion beschaffen seyn wird, welche die Natur eben dieser krummen Lienie ausdrückt, wenn man nach Gefallen eine andere Grund-Lienie, einen andern Anfangspunkt der Abizissen, und einen andern Winkel annimt, unter den die Ordinaten die neue Grundlienie durchschneiden? Dieses wird aber leicht auf folgende Art entschieden.

§. 830.

Aufgabe.

Wenn eine krumme Lienie $\alpha\beta$ gegeben ist, die nach Anleitung einer gegebenen Funktzion beschrieben worden, indem man die Linie MN zur Grundlinie, CD zur Seite, und den Punkt A zum Anfangspunkt der Abszissen angenommen hat: diejenige Funktzion zu bestimmen, durch welche die Natur eben dieser beschriebenen krummen Linie ausgedrückt

wird,

wird, wenn man entweder die Lage der Grundlinie, der Seite, den Anfangspunkt der Abszissen, besonders, oder einige, oder alle zugleich verändert.

§. 831.

Auflösung.

Es sey also $\alpha\beta$ die gegebene krumme Linie, MN die Grundlinie, CD die Seite, und dahero DAN der Winkel, den die Ordinaten mit den Abszissen einschließen, AP sey die Abszisse, welche in der gegebenen Funktzion durch den Buchstaben x angezeigt wird, PQ die Ordinate, welche der Buchstabe y in der Funktzion bedeutet. Um nun die verschiedenen Fälle, welche in der Aufgabe liegen, nach und nach zu entwickeln, wollen wir 1) setzen, daß die Lage der Grundlinie MN und der Seite CD unveränderlich bleibt, der Anfangspunkt der Abszissen aber in einen andern Punkt B auf der Grundlinie MN genommen wird. Fig. 88.

Nach dieser Voraussetzung wird also BP die neue Abszisse und jede Ordinate PQ bleibt unveränderlich. Man setze also AB $= a$, und BP $= z$, so wird AP $=$ BP $-$ AB, folglich da AP $= x$ ist, so wird $x = z - a$.

Wenn man dahero in der gegebenen Funktzion, $z - a$ überall vor x setzet, so bekomt man eine neue Funktzion, die die Natur eben derselben krummen Linie ausdrückt, unter der Bedingung aber,

daß die Abszissen von dem Punkt B angerechnet werden.

2) Man laße nunmehro die Lage der Seite CD unveränderlich bleiben, nehme aber eine andre Grundlinie *mn*, welche mit der erstern MN parallel ist, und auf derselben den Punkt E zum Anfangspunkt der Abszissen an. Wenn nun die Ordinate PQ die neue Grundlinie *mn* in R durchschneidet, so wird ER die neue Abszisse, und RQ die neue Applicate, dahero setze man ER = *z*, RQ = *u*.

Fig 89

Von dem Punkt E ziehe man die gerade Linie EB bis an die erste Grundlinie MN parallel mit der Seite CD, und setze EB = *b*, BA = *a*. Weil nun EB, CD parrallel sind, und auch *mn*, MN, so wird EF = AB = *a*, und FR = AP = *x*, *EB* = *AF* = *PR*, *folglich ist*

FR = ER — EF
oder AP = ER — AB
oder $x = z - a$
PQ = RQ — PR
oder PQ = RQ — EB
oder $y = u - b$.

Wenn man dahero in der Funktzion, welche die Natur der beschriebenen krummen Linie, unter der Bedingung ausdrückt, daß der Anfangspunkt der Abszissen auf der Grundlinie MN in A genommen wird, und die Ordinaten der Linie CD parallel sind, $z - a$ vor x, und $u - b$ vor y setzet, so verwandelt sich die Funktzion in eine andre, die die Natur eben derselben krummen Linie ausdrückt,

wenn

man den Anfangspunkt der neuen Abszissen in dem Punkt E auf der neuen Grundlinie mn, nimt, welche mit der vorigen MN parallel ist. Uebrigens können die Buchstaben a und b auch $= o$ seyn, und denn, wenn z. E. $b = o$, verwandelt sich dieser Fall in dem ersten, ist aber $a = o$, so ist derselbe einerley mit dem Fall, wenn man zwar die Grundlinie und den Anfangspunkt der Abszissen verändert, jedoch denselben in einen Punkt auf der Seite CD nimt.

3) Man lasse die Seite CD unveränderlich, nehme aber eine andre Linie mn zur neuen Grundlinie an, welche die Grundlinie MN in G durchschneidet, und in dem Punkt E auf derselben den Anfangspunkt der Abszissen. Wenn nun diese Linie mn die verlängerte Ordinate PQ in R durchschneidet, so ist ER die neue Applicate. Dahero setze man ER $= z$, und RQ $= u$. Fig 90.

Von dem Punkt E ziehe man die Linie EB mit CD parallel, welche die erste Grundlinie MN in B durchschneidet, und setze EB $= b$, und AB $= a$. Der Winkel QRn, unter den die neuen Ordinaten QR die neue Grundlinie durchschneiden, sey φ, und der Winkel QPN unter dem die ersten Ordinaten die Grundlinie MN durchschneiden, sey ξ, so wird der Winkel NGn, unter dem die neue Grundlinie mn die erstere durchschneidet, $\varphi - \xi$.

Nun sind die Triangel EGB, RGP einander ähnlich, und es ist

1) EB: EG = Sin. EGB: Sin. EBG,

oder b: EG = Sin. $(\varphi - \xi)$: Sin. ξ

dahero wird $EG = \frac{b.\ \text{Sin.}\ \xi}{\text{Sin.}(\varphi - \xi)}$

Ferner ist EB: BG = Sin. EGB: Sin. BEG,

oder b: BG = Sin. $(\varphi - \xi)$: Sin. φ,

folglich wird $BG = \frac{b.\ \text{Sin.}\ \varphi}{\text{Sin.}\ (\varphi - \xi)}$

Hieraus aber GR = GE + ER

oder $GR = \frac{b.\ \text{Sin.}\ \xi + z.\ \text{Sin.}\ (\varphi - \xi)}{\text{Sin.}\ (\varphi - \xi)}$

Wegen der Aehnlichkeit der Triangel GEB, GRP ist aber ferner

GE: EB = GR: RP, oder

$\frac{b.\ \text{Sin.}\ \xi}{\text{Sin.}\ (\varphi - \xi)}$: $b = \frac{b.\ \text{Sin.}\ \xi + z.\ \text{Sin.}\ (\varphi - \xi)}{\text{Sin.}\ (\varphi - \xi)}$: RP

folglich ist $RP = \frac{b.\ \text{Sin.}\ \xi + z.\ \text{Sin.}\ (\varphi - \xi)}{\text{Sin.}\ \xi}$.

Ferner ist EG: GB = ER: BP (=BA+AP)

oder $\frac{b.\ \text{Sin}\ \xi}{\text{Sin.}\ (\varphi - \xi)}$: $\frac{b.\ \text{Sin.}\ \varphi}{\text{Sin.}\ (\varphi - \xi)} = z : a + x$

und also $a\ \text{Sin.}\ \xi + x\ \text{Sin.}\ \xi = z.\ \text{Sin.}\ \varphi$.

Nachdem wir diese Werthe gefunden haben, so wird $x = \frac{z.\ \text{Sin.}\ \varphi - a.\ \text{Sin.}\ \xi}{\text{Sin.}\ \xi}$

und $y = RQ - PR$, oder

$y = \frac{u.\ \text{Sin.}\ \xi - z.\ \text{Sin.}\ (\varphi - \xi) - b.\ \text{Sin.}\ \xi}{\text{Sin.}\ \xi}$

Wenn man dahero diese gefundene Werthe vor x und y in der gegebenen Funktion setzet, welche die Natur der krummen Linie $\alpha\beta$ in Absicht auf die

Grund-

Grundlinie MN, den Anfangspunkt der Abszissen A, und die Seite CD ausdrückt, so bekomt man eine neue Funktion, welche die Natur eben dieser krummen Linie, aber unter der Bedingung ausdrückt, daß die Abszissen auf der neuen Grundlinie *mn*, welche die erstere unter dem Winkel $\varphi - \xi$ durchschneidet, von dem Punkt E an gerechnet werden, und die neue Ordinaten die neue Grundlinie unter dem Winkel φ durchschneiden, dahingegen ξ der Winkel ist unter dem dieselben die erste Grundlinie durchschneiden.

4) Endlich wollen wir setzen, man verändert sowohl die Lage der Grundlinie MN, als der Seite CD, und den Anfangspunkt der Absziſſen, und nimt die Linie *mn*, welche MN in G durchschneidet, zur neuen Grundlinie, und auf derselben den Punkt E zum Anfangspunkt der Absziſſen an, durch den man eine Linie HK zieht, welche die neue Seite seyn soll, mit der die neuen Ordinaten, die zu der Grundlinie *mn* gehören, parallel laufen. Fig. 91.

Man ziehe von E die Linie EB mit der ersten Seite CD parallel, und setze wieder $EB = b$, und $AB = a$. Von dem Punkt Q ziehe man die Linie RQ mit der neuen Seite HK parallel, und setze $ER = z$, $R = u$. Man verlängere die Ordinate PQ, welche zu der ersten Grundlinie MN gehört, bis sie die neue Grundlinie in T durchschneidet.

Es sey also der Winkel $QPN = \xi$, welches der Winkel ist, unter dem die Ordinaten die Grundlinie MN durchschneiden. Der Winkel, unter

dem die neuen Ordinaten die zuerst angenommene Grundlienie durchschneiden, oder $QSN = \delta$; der Winkel den die neue Ordinaten mit der neuen Grund-Linie $m\,n$ einschliessen, oder $QR\,n = \varphi$; so wird der Winkel $SQP = \xi - \delta$; der Winkel $QT\,n = (\varphi + \xi - \delta)$ und der Winkel $NG\,n = \varphi - \delta$.

Weil nun die Lienien EB, CD, TQ parallel sind, so hat man

$GE : GB = \text{Sin.}\,\xi : \text{Sin.}\,(\varphi + \xi - \delta) = EF : AB.$

Hieraus wird $EF = \dfrac{a.\ \text{Sin.}\,\xi}{\text{Sin.}\,(\varphi + \xi - \delta)}$

$GE : BE = \text{Sin.}\,\xi : \text{Sin.}\,(\varphi - \delta)$

folglich $GE = \dfrac{b.\ \text{Sin.}\,\xi}{\text{Sin.}\,(\varphi - \delta)}$

Ferner ist

$AB : EF = AP : FT.$

folglich wird $FT = \dfrac{x.\ \text{Sin.}\,\xi}{\text{Sin.}\,(\varphi + \xi - \delta)}$

und $QR : RT = \text{Sin.}\,(\varphi + \xi - \delta) : \text{Sin.}\,(\xi - \delta)$

folglich $RT = \dfrac{u.\ \text{Sin.}\,(\xi - \delta)}{\text{Sin.}\,(\varphi + \xi - \delta)}$

Nun ist $FT = ER - EF + RT$, folglich

$$\frac{x.\ \text{Sin.}\,\xi}{\text{Sin.}\,(\varphi + \xi - \delta)} = z - \frac{a.\ \text{Sin.}\,\xi + u.\ \text{Sin.}\,(\xi - \delta)}{\text{Sin.}\,(\varphi + \xi - \delta)}$$

und so bekommt man

$$x = \frac{z\ \text{Sin.}\,(\varphi + \xi - \delta) + u.\ \text{Sin.}\,(\xi - \delta) - a\ \text{Sin.}\,\xi}{\text{Sin.}\,\xi.}$$

Um nun den Werth von y zu bekommen, so ist

$GR : RS = \text{Sin.}\,\delta : \text{Sin.}\,(\varphi - \delta)$ folglich da

GR

$GR = GE + ER = \frac{b.\ \text{Sin.}\ \xi}{\text{Sin.}(\varphi - \delta)} + z$, so wird

$RS = \frac{z.\ \text{Sin.}\ (\varphi - \delta) + b.\ \text{Sin.}\ \xi}{\text{Sin.}\ \delta}$,

und daraus $QS = u - \frac{z\ \text{Sin.}\ (\varphi - \delta) - \text{Sin.}\ \xi}{\text{Sin.}\ \delta}$.

Nun ist $QS : QP = \text{Sin.}\ \xi : \text{Sin.}\ \delta$. Folglich wird $y = \frac{u.\ \text{Sin.}\ \delta - z\ \text{Sin.}\ (\varphi - \delta) - b.\ \text{Sin.}\ \xi}{\text{Sin.}\ \xi}$.

Wenn man dahero in der Funktzion, welche die Natur einer gewissen krummen Linie $\alpha\ \beta$, in Absicht auf die Grundlinie M N und der Seite C D ausdrückt, vor x und y diese beyde Werth setzet; so bekommt man eine andre Funktzion, welche die Natur eben derselben krummen Linie, in Absicht auf einer andern Grundlinie $m\ n$ ausdrückt, die eine wilkührliche Lage hat, und auf die der Anfangspunkt der Abzissen auch nach Wilkühr angenommen worden.

§. 832.

Anmerkung.

Hieraus folget also, daß eine und eben dieselbe krumme Linie durch verschiedene Funktzions ausgedrückt werden kann, und daß man nicht gleich aus der Verschiedenheit der Funktzions auf die Verschiedenheit der Linien schlüssen kann, welche dieselben vorstellen. Indessen mag man die neue Grundlinie und Seite nebst den Anfangspunkt der Abzissen annehmen, wie man will, und in der gegebenen Funktzion vor x

und y die gehörige Werthe setzen, so wird doch dadurch niemals die höchste Dimension oder Ordnung der Funktzion verändert, durch die eine gegebene krumme Linie ausgedrückt wird.

§. 833.

Man nehme z. E. die Gleichung

$$y^2 = \frac{mn}{nn}(nn - xx)$$

durch die eine gewisse krumme Linie ausgedrückt wird, und verändere die Lage der Grundlinie, der Seite und des Anfangspunkts des Abszissen, setze also

$$y = \frac{u \text{ Sin. } \delta - z \text{ Sin. } (\varphi - \delta) - b \text{ Sin. } \xi}{\text{Sin. } \xi.}$$

$$x = \frac{z \text{ Sin. } (\varphi + \xi - \delta) + u \text{ Sin. } (\xi - \delta) - a \text{ Sin. } \xi}{\text{Sin. } \xi.}$$

und wenn man

Sin. $\delta = \alpha$ Sin. $(\varphi + \xi - \delta) = \delta$

Sin. $(\varphi - \delta) = \beta$

Sin. $\xi = \gamma$ Sin. $(\xi - \delta) = \varepsilon$ setzet,

so wird hieraus

$$\alpha^2 u^2 + 2\alpha\beta uz + z^2\beta^2 - 2b\alpha\gamma u + 2b\beta\gamma z + b^2\gamma^2 = \frac{m^2}{n^2}(n^2\gamma^2 - z^2\delta^2 - 2\delta\varepsilon zu + 2a\gamma\delta z - \varepsilon^2 u^2 + 2a\gamma\varepsilon u - a^2\varepsilon^2)$$

in der die höchste Dimension mit der Dimension in der gegebenen Funktzion einerley ist.

§. 834.

Da also die Ordnung der Funktzion durch welche eine krumme Linie ausgedrückt wird, nicht verändert wird, man mag den Anfangspunkt der Abszissen

sen, die Lage der Grundlinie und die Lage der Seite verändern wie man will, so hat man dahero Gelegenheit genommen, die Linien in gewisse Ordnungen einzutheilen, welche wie die heterogenen Funktzions nach der höchsten Dimension der beyden veränderlichen Größen x und y gerechnet werden.

§. 835.

Erklärung.

Linien von der ersten Ordnung, werden diejenigen genennt, in denen nur eine Dimension vorkommt.

Linien von der zweyten Ordnung sind diejenigen, welche durch eine Funktzion ausgedrückt werden, in denen die höchste Dimension der veränderlichen Grösen x und y, die zweyte ist.

Linien von der dritten Ordnung sind diejenigen, welche durch eine Funktzion ausgedrückt werden, in der die dritte Dimension die höchste ist. Und so gehet dieses fort, so, daß die

Linien von der Ordnung n diejenigen sind, die durch eine Funktzion ausgedrückt werden, in der die $n$te Dimension der veränderlichen Größe x und y die höchste ist.

§. 836.

Anmerkung.

Ausser dieser höchsten Dimension, nach welchen die Ordnung der Linien bestimmt wird, können in

der

der Funktzion auch niedrigere Dimensions vorkommen, allein keine höheren.

Wenn also $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. bestimmte und unveränderliche Grössen bedeuten, so werden die Linien von der ersten, zweyten, dritten, vierten ꝛc. Ordnung durch folgende Funktzions ausgedrückt:

1) $\alpha y + \beta x + \gamma = o$

2) $\alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2 + \delta y + \varepsilon x + \xi = o$

3) $\alpha y^3 + \beta xy^2 + \gamma x^2 y + \delta x^3 = o$
$+ \varepsilon y^2 + \xi xy + \eta x^2$
$+ \theta y + \upsilon x$
$+ \varkappa$

und überhaupt die Linien von der Ordnung n durch diese Funktzion:

$y^n + (\alpha + \beta x) y^{n-1} + (\gamma + \delta x + \varepsilon x^2) x^{n-2} +$
$(\xi + \eta x + \theta x^2 + \upsilon x^3) z^{n-3} +$ ꝛc. . . .
$A x^n + B x^{n-1} + C x^{n-2} +$ ꝛc. $O = o$.

§. 837.

Wenn man in der Funktzion, welche die Natur einer gewissen krummen Linie ausdrückt, die Aplikaten $y = o$ setzet, so bleibt eine Gleichung übrig, in der nur eine unbekannte Grösse x ist, und die Wurzeln derselben zeigen alsdenn alle die Punkte an, in denen die krumme Linie die angenommene Grund-Linie durchschneidet. Folglich kann eine jede Linie von der Ordnung n, die Grundlinie in nicht mehrere Punkte durchschneiden, als die Zahl n Einheiten hat. Denn wenn man in den Gleichungen (§. 836) $y = o$ setzet, so bleibt eine Gleichung von dem

Grade

Grade n übrig, welche nicht mehr als n Wurzeln haben kann.

§. 838.

Und überhaupt kann eine jede gerade Linie eine krumme Linie von der Ordnung n aufs höchste in n Punkte durchschneiden. Denn wenn man in einer gegebenen krummen Linie, diese gerade Linie zur neuen Grundlinie, und darauf den Anfangspunkt der Abszissen annimt, so entsteht wieder eine Gleichung von der Ordnung n; und diese Grundlinie kann wieder von der gegebenen geraden Linie nur in n Punke durchschnitten werden. Dahero denn folgt, daß eine krumme Linie von der $n$ten Ordnung, von einer der Lage nach gegebenen geraden Linie nur in n Punkte durchschnitten werden kann. Es kann zwar geschehen, daß diese gerade Linie dieselbe in weniger Punkte durchschneidet, allein es ist unmöglich, daß solches in mehreren geschieht.

§. 839.

Da übrigens die Natur der krummen Linie allezeit von der Natur der Funktzion abhängt, welche dieselbe vorstellt und daraus nothwendig erkannt werden muß, so nennt man auch diese Funktzion die **Gleichung der krummen Linie**, oder die Gleichung welche die **Natur der krummen Linie** ausdrückt.

Nunmehro will ich zu der geometrischen Construktion verschiedener Funktzionen selbst schreiten.

§. 840.

§. 840.

Aufgabe.

Die Punkte aller der Linien, welche in dieser allgemeinen Gleichung

$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 \ldots \Phi x^n$

enthalten sind, geometrisch, das ist blos durch Hülfe des Zirkels und gerader Linien zu bestimmen.

§. 841.

Vorbereitung.

Die Coefficienten α, β, γ, δ, ε, &c. bedeuten
Fig. 92. hier gegebene gerade Linien, welche unveränderlich bleiben, und sowohl positiv als negativ seyn können. Sie können übrigens aus andern gegebenen Linien auf verschiedene Art zusammengesetzt, und auch einige davon $= o$ seyn. Wenn man nun zwey gerade Linien zieht, welche sich in den Punkt O durchschneiden, und davon die eine, als M N, die Grundlinie (§. 821.) und die andere als P Q die Seite ist. So nehme man ferner an, daß alle die Linien welche positiv sind und auf der Linie M N von O an, abgeschnitten werden müssen, von der Gegend M nach N zu, und die negativen von der Gegend N nach M zu genommen werden sollen. Eben so nehme man das Gesetz an, daß alle die Linien, welche auf der Linie P Q genommen werden sollen, und positiv sind von P nach Q zu, und die negativen von Q nach P zu, fallen sollen.

§. 842.

Auflösung.

Fig. 93. Man nehme die Linien $O o$ so groß an, als die Einheit, aus der die Linien α, β, γ, δ, &c. aus-

ge-

gedrückt werden, und ziehe durch o die Linie pq parallel mit PQ. Die Linien α, β, γ, ꝛc. trage man alle auf der Linie PQ, von O nach Q zu, dergestalt, daß man $OA = \alpha$, $AB = \beta$, $BC = \gamma$, $CD = \delta$, $DE = \varepsilon$ ꝛc. nimt, so lange als noch Glieder in der Gleichung übrig sind, und sie von O nach Q zu, forträgt, wenn dieselben alle positiv sind; wäre aber einer von den Coefficienten z. E. γ negativ, so müste man die Linie BC, welche denselben ausdrückt, nicht in der Figur von B nach Q zu abschneiden, sondern die Linie welche γ ausdrückt, von B nach P zu, nehmen. Folgte aber darauf wieder der Coefficient δ, und derselbe wäre positiv, so müste man wieder die Linie die denselben vorstellt, von den Punkt C an nach Q zu nehmen.

Will man nun vor jeder angenommenen Abszisse, die von den Anfangspunkt O an gerechnet werden, die dazu gehörige Applikate finden, so ziehe man nach Gefallen, durch einen angenommenen Punkt K in der Linie NM eine gerade Linie Kk parallel mit PQ.

1) Ist nun E der Punkt wo, die Linie aufhört, welche den Coefficient der höchsten Dignität von x in der Gleichung
$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{ꝛc.} \; \varphi x^{n-1} + \omega x^n$
vorstellt, so ziehe man die Linie Ee mit MN parallel, und von dem Punkt D, wo die Linie aufhört, welche den Coefficient der Potenz x^{n-1} vorstellt, die Linie De, so, daß sie die Linie Kk in

K k in T durchschneidet, und von diesem Punkt T ziehe man die Linie T t parallel mit M N, bis an oq.

2) Von dem Punkt C, wo die Linie aufhört, welche den Coefficient der Potenz x^{n-2} in der Gleichung vorstellt, ziehe man durch t die Linie Ct bis sie die Linie Kk in f durchschneidet, und von f die Linie Sf bis an Oq parallel mit MN.

3) Von dem Punkt B, wo die Linie aufhört, welche der Coefficient der Potenz x^{n-3} vorstellt, ziehe man nach f die Linie Bf, bis sie die Linie Kk in R durchschneidet, und von R die Linie Rr parrallel mit MN, bis an oq.

4) Auf eben die Art gehe man weiter fort, bis man endlich an dem Punkt A komt, wo die Linie OA aufhört, welche die Größe α vorstellt. Wenn nun Ar die Linie ist, welche nach der Anleitung 2, 3, 2c. gezogen worden, und die Linie Kk in L durchschneidet, so ist KL die Ordinate, welche zu der Abszisse OK gehört.

§. 843.
Beweis.

Anstatt des allgemeinen Beweises, will ich setzen, man habe die Punkte der Linie, deren Gleichung

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$$

ist, nach der vorigen Methode gesucht.

Macht man nun alles, wie §. 842. gezeigt wor-
Fig. 93 den, so ist OA $= \alpha$, AB $= \beta$, BC $= \gamma$, CD $= \delta$, DE $= \varepsilon$.

Man

Man ziehe die Linien Ee, Dd, Cc, Bb, Aa mit MN parallel. Weil PQ, oq auch parallel sind, so ist $Ee = Dd = Cc = Bb = Aa = Oo = 1$. Ferner ist $DE = de = \varepsilon$, $DC = dc = \delta$, $BC = bc = \gamma$, $AB = ab = \beta$, $AO = ao = \alpha$.

Man setze, daß die Linien, Ee, Dd, Cc, Bb, Aa die Linie Kk in ε, δ, γ, β, α durchschneiden, es wird dahero auch $\delta\varepsilon = DE = \varepsilon$, $\gamma\delta = CD = \delta$, $\beta\gamma = BC = \beta$, $\alpha\beta = BC = \alpha$, und $A\alpha = B\beta = C\gamma = D\delta = Ee = Ok = x$.

Die Triangel $D\delta T$, Dde sind einander ähnlich, folglich ist

1) $Dd : de = D\delta : \delta T$

oder $1 : \varepsilon = x : dT$

folglich $dT = \varepsilon x$,

und da $ct = cd + dt = CD + \delta T$, so wird

$ct = \delta + \varepsilon x$.

Die Triangel $C\gamma S$, Cct sind auch einander ähnlich, folglich ist

2) $Cc : ct = C\gamma : \gamma S$

oder $1 : \delta + \varepsilon x = x : \gamma S$

und $\gamma S = \delta x + \varepsilon x^2$

Nun ist $cf = \gamma S$, und dahero $bf = bc + cf = BC + \gamma S$, folglich

$bf = \gamma + \delta x + \varepsilon x^2$.

Da auch die Triangel Bbf, $B\beta R$ einander ähnlich sind, so ist wieder

3) $Bb : bf = B\beta : \beta R$

oder $1 : \gamma + \delta x + \delta x^2 = x : \beta R$

und $\beta R = \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3$

Hieraus aber wird $ar = ab + br = AB + \beta R$, oder $ar = \beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3$, und weil die Triangel Aar, $A\alpha L$ gleichfals einander ähnlich sind, so ist

4) $A\alpha : ar = A\alpha : \alpha L$

oder $1 : \beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 = x : \alpha L$

folglich $\alpha L = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$

und demnach $KL = K\alpha + \alpha L = AO + \alpha L$.

oder wenn man $KL = y$ setzet,

$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$.

Dieser Beweis kann leicht auf alle übrige Fälle ausgedehnet werden.

§. 844.

Anmerkung.

Wenn einige von den Coefficienten $= o$ *sind*, so müssen die Linien, welche dieselben vorstellen, als solche betrachtet werden, die sich in einen Punkt zusammen ziehen. Z. E. wenn in dem vorigen Exempel $\gamma = o$ wäre, so würde der Punkt C in B fallen, und das, was vorhin bey dem Punkt C und B besonders vorgenommen wurde, muß auch bey dem Punkt B vorgenommen werden. Wenn γ und $\delta = o$ wären, so fielen die Punkte C und D in dem Punkt B, und dieser müste also gleichsam als ein dreyfacher Punkt angesehen werden, und so auch, wenn mehrere Coefficienten, die auf einander folgen, verschwinden.

§. 845.

Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, will ich

ich setzen, man sollte die Punkte der Linie finden, deren Gleichung

$$y = \alpha - \gamma x^2 + \delta x^3 - \xi x^5 \text{ ist.}$$

Nachdem man alles, wie (§. 842.) gezeigt worden, zubereitet hat, so nehme man auf PQ die Linie $OA = \alpha$, und da $\beta = o$ ist, so fällt auch der Punkt B in A. Hierauf nehme man von A nach O zu unterwärts, die Linie $AC = -\gamma$, weil dieselbe negativ ist, und da auf diesen wieder der Coefficient δ folgt, welcher positiv ist, so nehme man von C aufwärts nach Q zu die Linie $CD = \delta$, und da der Coefficient ε wieder $= o$ ist, so fällt der Punkt E in D. Es ist ferner ξ negativ, folglich schneidet man von D nach P zu die Linie $DF = -\xi$ ab.

Wenn dieses geschehen, so zieht man die Linie Ff parallel mit MN bis an oq, und von D die Linie Df, welche die Linie Kk in U durchschneidet. Von diesem Punkt zieht man wieder die Linie Uu parallel mit MN bis an oq, und noch einmahl von D nach u die Linie Du. welche die Linie Kk in T durchschneidet, und wieder Tt bis an oq mit MN parrallel. Von dem Punkt C zieht man alsdenn die Linie Ct, bis sie Kk in S durchschneidet, und Sf mit MN parallel bis oq. Ferner zieht man die Linie Bf, bis sie Kk in R durchschneidet, und Rr wieder wie vorhin mit MN parallel. Endlich zieht man die Linie Ar, welche die Linie Kk in L durchschneidet. Nennt man nun OK, x, und KL, y, so wird Fig. 94.

$$y = \alpha - \gamma x^2 + \delta x^3 - \xi x^5.$$

Der Beweis ist aus §. 843. klar.

§. 846.

Die Punkte der Linien deren Gleichung

$$y = \alpha x^m$$

ist, lassen sich sehr leicht bestimmen. Anstatt dieser allgemeinen wollen wir setzen, man solte die Punkte der Linie finden, deren Gleichung $y = \xi x^5$ ist. Denn so wie man in diesem Fall verfährt, so verfährt man auch in allen übrigen.

Nachdem man nehmlich alles, wie §. 842. zubereitet hat, so nimt man $OF = \xi$, und alle übrige Punkte, welche durch die Coefficienten α, β, γ, δ, ε ꝛc. bestimt werden solten, fallen in dem Punkt O. Alsdenn zieht man die Linie Ff mit MN parallel, und OF, welche Kk in U durchschneidet, und Uu parallel mit MN. Ferner Ou, welche Kk in T durchschneidet, und Tt mit MN parallel. Hierauf Fig 95. Ot, welche Kk in S durchschneidet, und Sf mit MN parallel. Alsdenn wieder Of, welche Kk in R durchschneidet, und Rr parallel mit MN. Endlich Or. Wenn diese die Linie Kk in L durchschneidet, so ist L ein Punkt in der Linie, und wenn man $KL = y$ setzet, und $OK = x$, so wird

$$y = \xi x^5$$

Der Beweis kann durch eine leichte Betrachtung der Figur gefunden worden, und man kann hierbey anmerken, daß man allezeit soviel Linien, als Of, Ou, Ot ꝛc. ziehen muß, als der Exponent m des Gliedes x Einheiten hat.

§. 847.

§. 847.
Aufgabe.

Die Punkte aller der Linien, welche in dieser algemeinen Gleichung

$$y = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^3} \text{ ꝛc. } \frac{\varphi}{x^{m-2}} + \frac{\pi}{x^{m-1}} + \frac{\omega}{x^m}$$

enthalten sind, geometrisch zu finden.

§. 848.
Auflösung.

Nachdem man hier eben das beobachtet hat, was (§. 842.) bey Gelegenheit der vorigen Aufgabe angemerkt worden, so nehme man auf der Linie PQ die Linien OA $=\alpha$, AB $=\beta$, BC $=\gamma$, CD $=\delta$, DE $=\varepsilon$ ꝛc. und Oo sey wieder die Einheit, aus der alle diese Linien ausgedrückt werden. Durch die Punkte A, B, C, D, E ꝛc. ziehe man die gerade Linien AR, BS, CT, DU ꝛc. parallel mit der Linie MN, bis sie die Linie K*k* in R, S, T, U ꝛc. durchscheiden. Fig. 96.

1) Gesetzt, DE wäre die Linie, welche der Zähler ω des letzten Gliedes $\frac{\omega}{x^m}$ in der Gleichung vorstellt, so ziehe man von E nach dem Punkt U, wo die gerade Linie, welche durch den Punkt D, wo die Linie CD aufhört, welche den Zähler π des Gliedes $\frac{\pi}{x^{m-2}}$ vorstellt, parallel mit MN gezogen worden, die Linie K*k* durchschneidet, eine gerade Linie, und mit derselben, durch den Punkt *d*, wo die Linie DU die Linie *oq* durchschneidet, die Linie *dδ* parallel, welche die Linie PQ in δ durchschneidet.

2) Von dem Punkt δ ziehe man nach dem Punkt T, wo die Linie CT, welche durch den Punkt C, wo die Linie aufhört, welche den Zähler des Gliedes $\frac{\varphi}{x^{m-2}}$ vorstellt, parallel mit MN gezogen worden, die Linie K*k* durchschneidet, eine gerade Linie δT, und mit derselben durch den Punkt *c* wo die Linie CT die Linie *oq* durchschneidet, die gerade Linie *c*γ parallel mit δT.

3) Von diesem Punkt γ ziehe man wieder die gerade Linie γS, nach dem Punkt S in der Linie K*k*, in welcher dieselbe von der Linie BS durchschnitten wird, welche durch den Punkt B, wo die Linie AB aufhört, die der Zähler des Gliedes $\frac{\xi}{x^{m-3}}$ vorstellt, parallel mit MN gezogen worden. Durch den Punkt *b* aber, wo eben diese Linie BS die Linie *oq* durchschneidet, ziehe man *b*β mit γS parallel.

4) Auf eben diese Art gehe man weiter, bis man an dem Punkt *a* komt, wo die Linie *oq* von der Linie AR durchschnitten wird, welche durch den Punkt A, wo die Linie OA = α aufhört, parallel mit MN gezogen worden.

Nachdem man nun die Linie *a*α mit derjenigen Linie parallel gezogen, welche durch den Punkt R geht, und nach *n*. 1. 2. 3. bestimt worden, so ziehe man durch α die Linie *a*L parallel mit MN, bis sie die Linie K*k* in L durchschneidet. Nennt man nun OK, x, und KL, y, so wird

KL

$$KL = y = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^3} + \text{ꝛc.} \frac{\xi}{x^{m-3}} + \frac{\Phi}{x^{m-2}} + \frac{\pi}{x^{m-1}} + \frac{\omega}{x^m}$$

§. 849.

Beweis.

Anstatt des Beweises, wollen wir setzen, man sollte die Punkte der Linie finden, deren Gleichung

$$y = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^3} + \frac{\varepsilon}{x^4}$$

ist, denn was hierbey richtig ist, wird auch bey allen übrigen richtig seyn. Fig. 96.

Nach dem was angenommen worden, ist also $OA = \alpha$, $AB = \beta$, $BC = \gamma$, $CD = \delta$, $DE = \varepsilon$. Ferner da die Linien AQ, oq, Kk einander, und DU, CT, BS, AR auch einander parallel sind, so ist $DU = CT = BS = AR = OK = x$, und $Dd = Cc = Bb = Aa = Oo = 1$. Ferner sind nach der Construction (§. 848.) die Triangel

$UD\varepsilon$ und $dD\delta$
$TC\delta$ " $cC\gamma$
$SB\gamma$ " $bB\beta$
$RA\beta$ " $aA\alpha$

einander ähnlich, folglich ist

1) $DU : DE = Dd : D\delta$, oder
$x : \varepsilon = 1 : D\delta$, und $D\delta = \frac{\varepsilon}{x}$.

2) $CT : C\delta\ (= CD + D\delta) = Cc : C\gamma$, oder
$x : \delta + \frac{\varepsilon}{x} = 1 : C\gamma$ und $C\gamma = \frac{\delta}{x} + \frac{\varepsilon}{x^2}$.

3) BS: Bγ (= BC + Cγ) = Bb: Bβ, oder
$x : \gamma + \frac{\delta}{x} + \frac{\varepsilon}{x^2} = 1 : B\beta$, und

$$B\beta = \frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x^2} + \frac{\varepsilon}{x^3}$$

4) AR: Aβ (= AB + Bβ) = Aa: Aα
oder $x : \beta + \frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x^2} + \frac{\varepsilon}{x^3} = 1 : A\alpha$

und $A\alpha = \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^3} + \frac{\varepsilon}{x^4}$

Hieraus wird also $O\alpha = OA + A\alpha =$
$\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^3} + \frac{\varepsilon}{x^4}$.

Weil nun αL mit MN parallel ist, so wird Oα = KL, folglich ist $KL = y = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^3} + \frac{\varepsilon}{x^4}$.

auf eben diese Art können alle andre Fälle bewiesen werden.

§. 850.
Anmerkung.

Dasjenige, was (§. 844.) in Absicht auf die Coefficienten, wenn sie negativ oder positiv sind, angemerkt worden, findet hier auch statt. Es sollen z. E. die Punkte der Linie gefunden werden, deren Gleichung $y = \alpha - \frac{\gamma}{x^2} - \frac{\delta}{x^3} - \frac{\xi}{x^5}$ ist. Nach-
Fig. 97. dem man alles, wie vorhin zubereitet, nehme man OA = α, und AB = o, so, daß der Punkt B in A fällt. Weil nun γ negativ ist, so nimt man AC, oder BC von A nach P zu unterwärts, und wieder CD = δ von C nach Q zu aufwärts, und da ε = o ist, so fällt der Punkt E in D. Weil ferner

ferner ξ negativ ist, so nimt man von D nach P zu die Linie $DF = -\xi$.

Hierauf zieht man die Linien DY, DU, so werden die Punkte Y und U, wo sie die Linie K*k* durchschneiden, und die Punkte *e*, *d*, wo sie die Linie *oq* durchschneiden, in einander fallen. Man ziehe ferner die Linie CT, und die Linien BS, AR, so werden die Punkte R und S, wo sie die Linie K*k* durchschneiden, und die Punkte *a*, *b*, wo sie die Linie *oq* durchschneiden in einander fallen.

Ferner ziehe man die Linie FY und durch *e*, oder *d* die Linie *e*ε mit FY parallel. Hierauf die Linie εU oder εY und durch *d* oder *e* wieder *d*δ mit derselben parallel. Ferner die Linie δT, und mit derselben *c*γ parallel. Wenn dieses geschehen, so ziehe man die Linie Sγ oder Rγ, und durch *b* oder *a* mit derselben die Linie *b*β parallel. Endlich ziehe man βR oder βS, und durch *b* oder *a* die Linie *b*α parallel mit derselben.

Wenn man nun wieder αL mit MN parallel zieht, so wird $KL = y = \alpha - \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^3} - \frac{\xi}{x^5}$.

§. 851.

Denn aus der Betrachtung der Figur ist

1) DY: DF = D*e*: Dε, oder
$x : \xi = 1 : D\varepsilon = \frac{\xi}{x}$

2) DU: Dε = D*e*: D*d*, oder
$x : \frac{\xi}{x} = 1 : D\delta = \frac{\xi}{x^2}$

3) $CT : C\delta (= CD - D\delta) = Cc : C\gamma$, oder
$x : \delta - \frac{\xi}{x^2} = 1 : C\gamma = \frac{\delta}{x} - \frac{\xi}{x^3}$

4) $BS : B\gamma (= C\gamma - CB) = B\beta : B\beta$, oder
$x : \frac{\delta}{x} - \frac{\xi}{x^3} - \gamma = 1 : B\beta$, folglich

$$B\beta = -\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x^2} - \frac{\xi}{x^4}$$

5) $AR : A\beta = Aa : A\alpha$, oder
$x : -\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x^2} - \frac{\xi}{x^4} = 1 : A\alpha$, folglich ist

$$A\alpha = -\frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^3} - \frac{\xi}{x^5}$$

und also hieraus

$$KL = O\alpha = y = \alpha - \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^3} - \frac{\xi}{x^5}$$

Eben so ist es auch in andern Fällen.

§. 852.

Wenn man die Punkte der Linien finden soll, deren Gleichung $y = \frac{\theta}{x^n}$ oder $y = \theta x^{-n}$ ist,

so nimt man $OF = \theta$, und alle übrige Fig. 98. Punkte, wo sonst die Coefficienten α, β, γ ꝛc. aufhörten, fallen in O. Hierauf zieht man nach K die Linie FK, und durch o, mit derselben die Linie $o\xi$ parallel. Ferner ξK und $o\varepsilon$ mit derselben parallel. Hierauf εK und $o\delta$ und mit derselben parallel, und so geht man so lange fort, bis man soviel Linien, $o\xi$, $o\varepsilon$, $o\delta$, $o\gamma$, $o\beta$ ꝛc. gezogen hat, als der Exponent n, des Gliedes $\frac{\theta}{x^n}$, Einheiten hat.

§. 852.

§. 853.

Wenn z. E. $y = \frac{\delta}{x^4}$ wären, so nimt man OF $= \delta$, und zieht FK, und $o\delta$ mit FK parallel. Ferner δK, und $o\gamma$ mit δK parallel; hieraus γK und $o\beta$ mit γK parallel; endlich βK und $o\alpha$ mit derselben parallel. Wenn man αL mit MN parallel zieht, so wird KL $= y = \frac{\delta}{x^4}$. Denn OK: OF $=$ Oo : Oδ, oder $x : \delta = 1 : \frac{\delta}{x}$; ferner OK: O$\delta$ $=$ Oo : Oγ, oder $x : \frac{\delta}{x} = 1 : \frac{\delta}{x^2}$; weiter OK. O$\gamma$ $=$ Oo : Oβ, oder $x : \frac{\delta}{x^2} = 1 : \frac{\delta}{x^3}$, und OK: O$\alpha$ $=$ Oo : Oα, oder $x : \frac{\delta}{x^3} = 1 : \text{O}\alpha = \frac{\delta}{x^4}$ KL $= y$. Und so ist es in andern Fällen. Fig. 99.

§. 854.

Aufgabe.

Die Punkte aller Linien zu finden, deren Gleichung

$$y = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{ꝛc.}}{a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{ꝛc.}}$$ ist.

§. 855.

Auflösung.

Man setze $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{ꝛc.} = z$ und $a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{ꝛc.} = u$,

so

so wird $y = \frac{z}{u}$. Alsdenn beschreibe man über der

Fig. 100 Grundlinie MN, und den Anfangspunkt O der Abszissen eine Linie $\alpha\beta$, deren Gleichung $z = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{ꝛc.}$ nach (§. 842.) indem man $KR = z$ und $OK = x$ setzet.

Ferner über eben der Grundlinie und dem Anfangspunkt der Abzissen O eine Linie $\gamma\delta$, deren Gleichung $u = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{ꝛc.}$ ist indem $OK = x$ und $KS = u$ ist.

Wenn dieses geschehen, so suche man zu KS, KR und 1 die vierte Proportionallinie KL, so hat man $KL = y$.

§. 856.

Beweis.

Denn $KR = z = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \text{ ꝛc.}$ und $K\delta = a + bx + cx^2 + \text{ꝛc.}$ Folglich, da KS : KR = 1 : KL, und man substituirt gehörig, so wird $a + bx + cx^2 \text{ ꝛc.} : \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{ꝛc.} = 1 : KL = y$; folglich $y = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{ꝛc.}}{a + bx + cx^2 + \text{ꝛc.}}$

§. 857.

Aufgabe.

Die Punkte aller Linien zu finden, deren Gleichung $y^m = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{ꝛc.}$

§. 858.

Auflösung.

Man ziehe die Linien OX, OY, welche sich in O durchschneiden. Man nehme ferner $OP = x$ und

ziehe

ziehe durch P die Linie Pp mit O X parallel. Ueber der Grundlinie = O Y, der Seite O X, und den Anfangspunkt der Abszissen O, beschreibe man nach (§. 842.) eine Linie ZQU, deren Gleichung $Z = \alpha + \beta x + \gamma x^2 +$ ꝛc. ist, indem man $PQ = Z$ setzet. Fig. 101.

Ueber eben die Grundlinie O Y, der Seite O X und den Anfangspunkt O der Abszissen, beschreibe man noch eine andere Linie O M K, deren Gleichung $u = t^m$ ist, nach (§. 849.) indem man die Abszisse $ON = t$ und die dazu gehörige Applikate $NM = u$ setzet.

Durch Q ziehe man eine gerade Linie Q M mit der Grundlinie O Y parallel, welche die Linie O M K in M durchschneidet, und von M die Linie M N mit O X parallel, welche O Y in N durchschneidet.

Hierauf ziehe man eine gerade Linie O G, welche den Winkel X O Y in zwey gleiche Theile theilet, und die Linie M N durchschneidet.

Ferner Lq mit Ox parallel, so ist q ein Punkt in der verlangten krummen Linie und Pq die Applikate, welche zu der Abszisse $OP = x$ gehöret, so, daß wenn man $Pq = y$ setzet

$y^m = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ ꝛc. ist.

§. 859.

Beweis.

Es ist aus der Construktion $PQ = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ ꝛc. $= MN$ und $MN = (ON)^m = t^m$. Da nun $Pq = LN = ON$,

So ist auch $MN = (Pq)^m = y^m = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{&c.}$

§. 860.

1. Zusatz.

Wenn man anstatt der Linie ZQU eine Linie beschreibt deren Gleichung

$$Z = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^3} + \text{&c.}$$

ist, so bekomt man auf eben diese Art die Punkte der Linien deren Gleichung

$$y^m = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^3} + \text{&c. ist.}$$

§. 861.

2. Zusatz.

Auf eben diese Art bekomt man alle Punkte der Linien, deren Gleichungen

$$y^{-m} = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{&c.}$$

oder $y^{-m} = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^3} + \text{&c.}$

sind, wenn man alles wie vorhin macht, und anstatt der Linie OMK eine Linie beschreibet, deren Gleichung $u = \frac{1}{t^m}$ ist.

§. 862.

3. Zusatz.

Weil die Linie deren Gleichung $u' = t^{\pm m}$ von der Ordnung m ist, so kann dieselbe von der Linie QM in so viel Punkte durchschnitten werden, als

der

der Exponent m Einheiten hat. (§. 837.) Folglich findet man zu jeder Abzisse $OP = x$, auch so viel Applikaten, als oft die Linie, deren Gleichung $u = t^{+m}$ ist, von der geraden Linie QM durchschnitten wird.

§. 863.

Aufgabe.

Die Wurzel einer jeden Gleichung von der Form $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{ꝛc.} N = o$ zu finden.

§. 864.

Auflösung.

Man beschreibe über einer angenommenen Grundlinie MN, der Seite PQ und den Anfangspunkt O der Abzissen, eine Linie deren Gleichung

$y = N + Mx + Lx^2 + \text{ꝛc.} \ldots Ax^{m-1} + x^m$, Fig. 102

wenn diese Linie nun die Grundlinie durchschneidet, so sind die Abzissen, welche zu diesen Punkten gehören, die Wurzeln der Gleichung.

§. 865.

Beweis.

So oft die krumme Linie die Grundlinie durchschneidet, so oft wird $y = o$, folglich ist auch die Gleichung

$o = N + Mx + \text{ꝛc.} \ldots Ax^{m-1} + x^m$.

Nun sind diejenigen Werthe von x, welche machen daß diese Gleichung verschwindet, die Wurzeln derselben; folglich sind die Abszissen, die zu den Applikaten $y = o$ gehören, oder die Entfernungen der Durchschnittspunkte von dem Anfangspunkt O der Abzissen, die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

§. 866.

§. 866.

Anmerkung.

Durch Hülfe dieses Satzes lassen sich auch alle Punkte finden, durch welche eine krumme Linie geht, die durch eine gegebene Gleichung ausgedrückt wird; Nemlich vor jeder angenommenen Abszisse findet man die dazu gehörige Applikate. Es sey z. E. die Gleichung der krummen Linie:

$y^4 + axy^3 + b^2x^3y^2 + a^2 - 2ax + x^4 = o.$

Setzt man nun $x = c$, so wird dieselbe

$y^4 + acy^3 + b^2c^3y^2 + a^2 - 2ac + c^4 = o,$

und wenn man die Wurzeln dieser Gleichung sucht, so bekommt man alle die Applikaten, welche zu der angenommenen Abszisse c gehören. Auf diese Art könnte man eine jede krumme Linie, ob zwar auf eine sehr mühsame Art beschreiben, indem man zu jeder Abszisse die dazu gehörige Applikaten sucht, und denn durch die Endepunkte derselben eine krumme Linie zieht. Da dieser Fall aber selten vorkomt, so halte ich es vor überflüßig, davon Beispiele anzuführen.

Druckfehler.

Seite 8 von unten, 1 Reihe, anstatt um, l. nun.
" 10 von oben, 6 Reihe, " 133 l. 132.
" ebend. " 10 Reihe, " Aufgeben l. Aufgaben.
" 12 " 20 Reihe, " aus l. auf.
" 15 " 6 Reihe, " 50 l 40
" ebend. " 22 Reihe, " worden l. werden.
" 26 " 19 Reihe, " $(+f)$ l. $(e+f)$
" 64 " 15 Reihe, " foglich l. folglich.
" 83 die letzte Zeile unten " c l. $c4f$
" 97 von oben 20 Reihe, " $6ed$ l. $6cd$
" 101 " 8 Reihe, " $6a^3b^2c$ l. $6a^5b^2c$
" ebend. " 22 Reihe, " $3am bm-t-rc-r$ l. $3an bm-t-rc-r$
" 103 von oben, 22 Reihe, " $(-bb)^2$ l. $(V-bb)^2$
" 104 " 6 Reihe, " $-3ab^3$ l. $-\frac{3ab^3}{\epsilon}$
" 126 " 22 Reihe, " D l. D^3
" 127 " 1 Reihe, " P l. p
" 127 von unten 3 Reihe " den l. der
" 143 von oben 11 Reihe " c l. a
" 167 Zeile 15, von oben lese man in der Gleichung statt das letzte Glied an der) welches $amnp$ ist, $annp$.
" 167 Zeile 20, anstatt $2anmp$ l. $2amp$
" 179 von unten, Zeile 5, anstatt p l. n
" ebend. in der dritten Zeile von unten, und weiter muß p, q, r, s, anstatt q, r, s, t gelesen werden.
" 180 von oben, 8 Reihe, anstatt qx l. px
" ebend. " 9 Reihe, " q l. p
" ebend. " 10 Reihe, " ry l. qy
" ebend. " 11 Reihe, " sz l. rz
" ebend. " 13 Reihe, " tu l. su
" ebend. " 14 Reihe, " t l. s
" 188 von unten, 7 Reihe, " Reiche l. Reihe.
" 192 von oben 12 Reihe, " ABc l. ABC
" 193 " 4 Reihe, " BC⌒AC l. Bc⌒Ac
" 202 " 14 Reihe " die verfahren, l. verfahren
" 203 von unten, 2 Reihe, " solle l. stelle.
" 210 " 1 Reihe, " x linker Hand in der Gleichung, l. x^2
" 211 von oben, 19 Reihe, " ac^2 l. a^2c
" 212 von unten, 2 Reihe, " AH l. FH

Seite 214 von unten, 2 Reihe, anstatt vorige l. übrige
" 221 von oben, 8 Reihe, " E l. D
" 223 In der Anmerkung §. 348. lese man anstatt r überall 1.
" 244 von unten 1 Reihe, anstatt 1 l. r
" 245 von oben 2 Reihe, " 1 l. r
" 248 In den Linien 2, 3, 4 von unten und Seite 249 Zeile 6, anstatt A und $\frac{1}{2}$ A l. B und $\frac{1}{2}$ B.
" 249 3 und 5 von oben, anstatt $r+\text{Cos}\,\frac{1}{2}B$ l. $r+\text{Cos.}B$
" 251 von oben, 11 Reihe, mp^2 l. m^2p^2, und unten, anstatt ab^2+a^2b muß überall $-(ab^2+a^2b)$ gelesen werden.
" 264 unten, 9 Reihe, anstatt CF, CI l. CG, CF.
" 270 von oben, anstatt CD l. AB
" 274 unten, 4 Reihe, lösche man nach weg, und statt AC lese man ACa
" 275 von oben, 5 Reihe, anstatt $4x$ l. $4x^2$
" ebend. unten. 2 Reihe, anstatt ersten l. zweiten.
" 277 von unten, 5. 9 Reihe, im Zähler statt $4bn^2$ lese man $4bn^2x$.
" In eben der Reihe, statt b^2n^4 l. $4b^2n^4$
" ebend. von unten, 1 und 2 Zeile, statt bn^2 l. $2bn^2$
" 279 in der 3. und 6 Reihe, von unten, anstatt mbf, $mbcf$, l. $mbfd$, $mbcfd$.
" 292 oben, 10 Reihe, anstatt $\sqrt[4]{y}$ l. $\sqrt[3]{y}$
" 293 unten in der letzten Zeile ist z weggelassen.
" 306 oben, 16 Reihe, anstatt $-y^2+by$ l. $+y^2-by$
" 307 oben, 11 Reihe, anstatt BC^2 l. rBC^2
" ebend. unten in der Gleichung muß f^2 vor f gelesen werden.
" 312 oben, 1 Reihe nach $AB+AC+AD$, setze man hinzu, gegeben.
" 321 in der 4. und 6. Zeile von unten muß gelesen werden $z=a+b-\sqrt{(2ab+b^2}$, und in der 1. und 2. Zeile von unten muß anstatt $-\frac{b^2}{2}$ gelesen werden $-\frac{b^2}{4}$
" 336 Linie 20 anstatt $-x$ l. ꝛc. $+X$
" 337 " 5 " bekomt l. bekomt man
" 338 " 13 " $-X$ l. ꝛc. $-X$
" 339 " 4 " $-x$ l. ꝛc. $-X$
" 346 " 23 " $-z$ l. $-X$
" 355 Lin. 16 anstatt $(Q+Ry+$ ꝛc.$)z$ l. $y(Q+Ry+$ ꝛc.$)$

Seite

Seite 357 Linie 13 anstatt $\frac{\mathfrak{C}z^2}{a}$ l. $\frac{\mathfrak{C}z^2}{a^2}$

" 378 Linie 4 lösche man die 8 aus.
" 394 Linie 15 anstatt $-qx^2$ l. $+qx^2$
" 395 Linie 10 anstatt px^3 l. px^2
" 416 unten Linie 13 anstatt 1660 l. 660
" ebend. Linie 6 anstatt + 1002 l. + 496
" ebend. Linie 5 anstatt + 72 l. + 198
" 417 oben Linie 8 anstatt + 66, 25 l. — 66, 25
" ebend Linie 20 anstatt werden, l. worden.
" 418 unten, Linie 6 anstatt 372, 9375 l. 312, 9375
" ebend. unten Linie 3 anstatt 20321, 8164 ꝛc. l. 20341, 81640615
" 418 unten 2 Zeile, anstatt — 991 l. 961
" 423 oben 1 Zeile, anstatt 105 l. 95
" ebend. oben 4 Zeile, im Nenner 101, 308 l. 102, 308
" ebend. oben, 8 Zeile, anstatt 0, 0138 ꝛc. l. 0, 012812904
" ebend. oben, 12. 13 Zeile, anstatt 0, 212 ꝛc. l. 0, 2240191
" ebend. oben, 13. 14 Zeile, anstatt 0, 001957 l. 0, 00204
" ebend. oben, 15. 16 Zeile, anstatt 0, 235957 l. 0, 23604
" 427 in der 5. und 6. Zeile von unten, statt 66 und 76 l. 6*b* und 7*b*.
" 429 von unten, 3 Zeile, anstatt $x \equiv 1$ l. $x - 1$
" 438 von oben, 14 Zeile, anstatt z l. Z.
" 452 Linie 9 und 10 muß vor die Wurzelzeichen die in den Parentheſen eingeſchloſſen ſind, und noch nicht $\frac{1}{2}$ vor ſich haben, dieſen Bruch $\frac{1}{2}$ geſetzt werden.
" 470 von oben, 9 Zeile, anſtatt $\frac{1}{\text{Tang. }\alpha}$ l. $\frac{1}{\text{Tang. }\beta}$
" 515 von oben, 8 Zeile, anſtatt $\mathfrak{E}C$ l. AC
" 526 von oben, 14 Zeile, anſtatt *x* l. X
" 536 von oben, 16 Zeile, anſtatt *a* l. a^2
" 547 von oben, 4 Zeile, anſtatt $\frac{b^2z^2}{c \text{ Sin. } A^2}$ l. $\frac{b^2z^2}{c^2 \text{ Sin. } A^2}$
" 551 von unten, 4 Zeile, anſtatt *c* l. c^4
" 556 von oben, 16 Zeile, anſtatt 745 l. §. 743.
" ebend. von oben, 18 Zeile, anſtatt $d^2y^2 \equiv (dz + zz)$ l. $y^2 \equiv \frac{c^2}{d^2}(dz + zz$
" 577 von oben, 6 Zeile, anſtatt **vernälichen** l. **veränderlichen.**
" 579 von oben, 1 Zeile, anſtatt ausgedrücke l. ausgedrückt.
" ebend. von unten, 3 Zeile, anſtatt $x - q$ l. $x - b$

Seite

Seite 587 von unten, 2 Zeile, anstatt vernehmen, l. vornehmen.
" 588 von oben, 3 Zeile, anstatt entwickelten l. rationelle.
" 582 von unten, 2 Zeile, anstatt $4x^3$ 3 l. $4x^2 - 3$
" 593 von unten, 1 Zeile, im Zähler, anstatt $+\frac{8}{3}$ l. $-\frac{8}{3}$
" 603 von unten, 3 Zeile, anstatt Zahien l. Zahlen.
" ebend. von unten, anstatt $\frac{1}{729}$ l. $\frac{1}{243}$
" 605 von unten, 5 Zeile, anstatt Buchstuben l. Buchstaben
" 609 von oben, 12 Zeile, anstatt unn l. nun
" 613 von oben, 10 Zeile, anstatt BAC^2 l. $3AC^2$
" 614 von oben, 14 Zeile, anstatt $12A^2CD$ l. $12A^2BD$.

Nachricht an dem Buchbinder.

Die auf diesen halben Bogen befindliche zwey Blätter Pag. 51. 52 und Pag. 361. 362 werden an gehörigen Ort gebracht, und die daselbst befindliche zwey Blätter werden ausgeschnitten.

BIBLIOTEKA UNIWERSYTECKA W TORUNIU

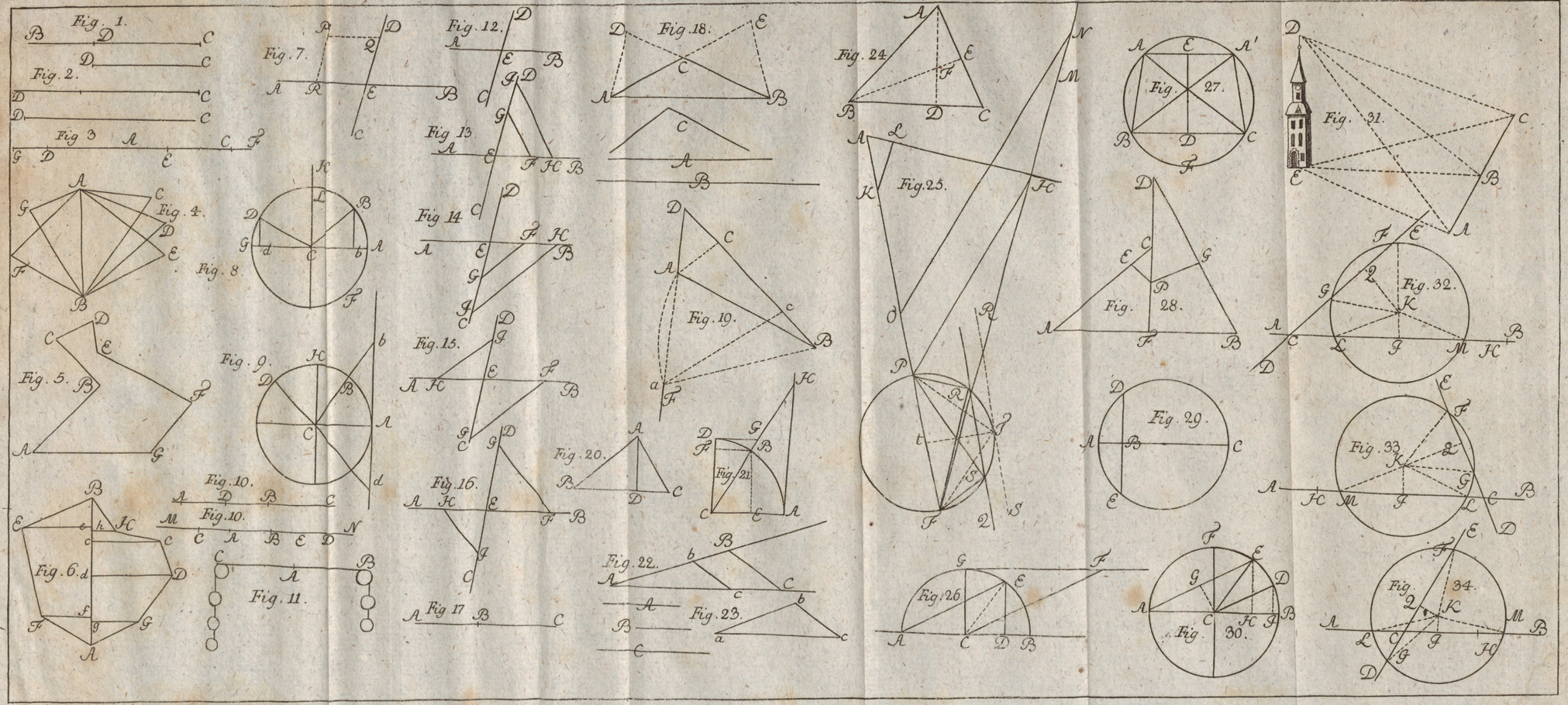


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig 3
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13
Fig 14
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig 17
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33
Fig. 34

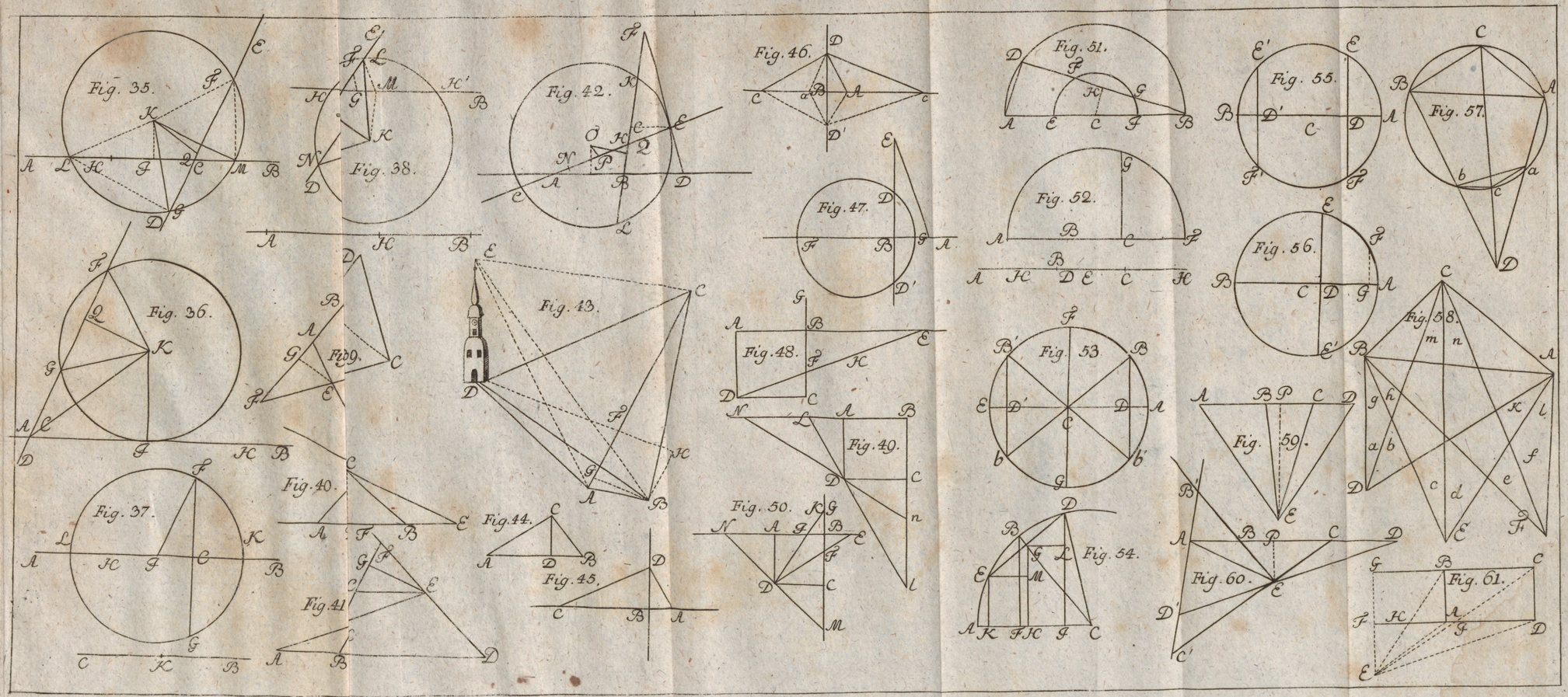


Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.



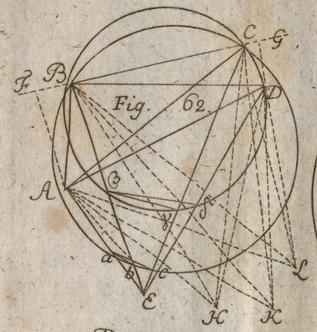


Fig. 62.

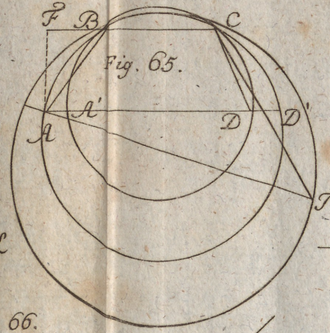


Fig. 65.

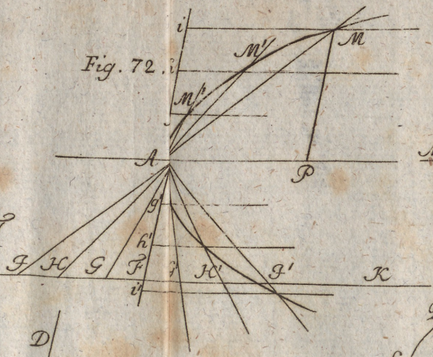


Fig. 72.

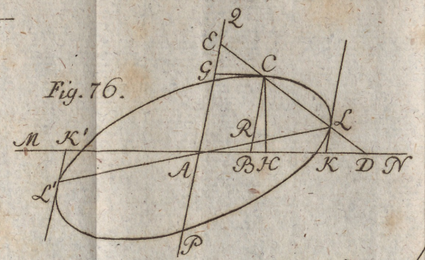


Fig. 76.

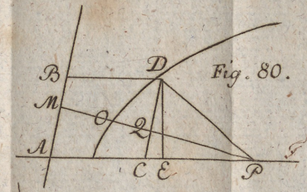


Fig. 80.

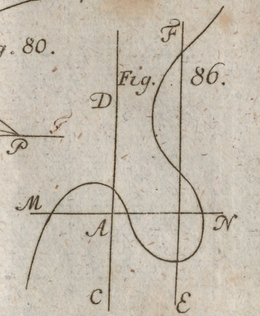


Fig. 86.

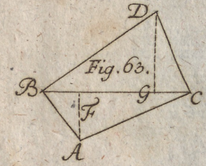


Fig. 63.


Fig. 66.

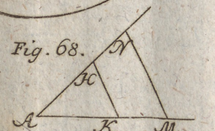


Fig. 68.

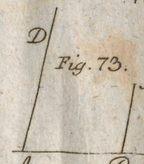


Fig. 73.

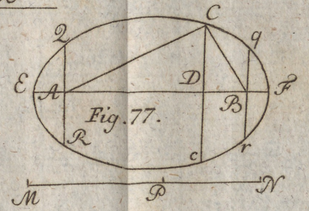


Fig. 77.

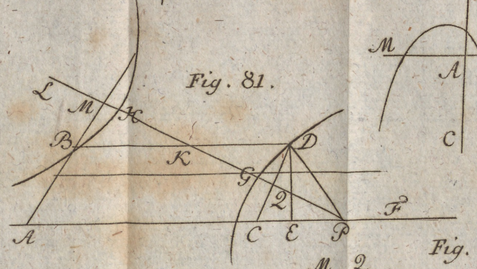


Fig. 81.

Fig. 82.

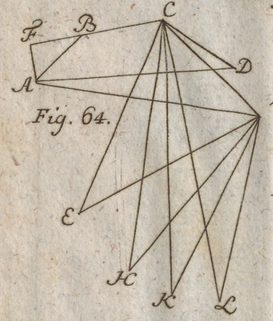


Fig. 64.

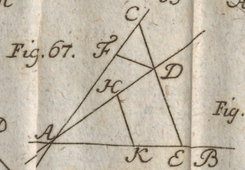


Fig. 67.

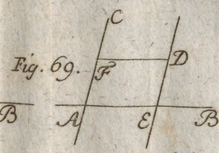


Fig. 69.

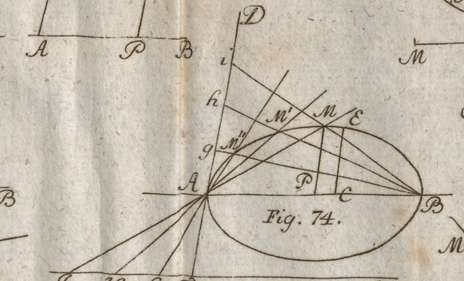


Fig. 74.

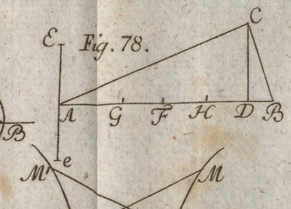


Fig. 78.

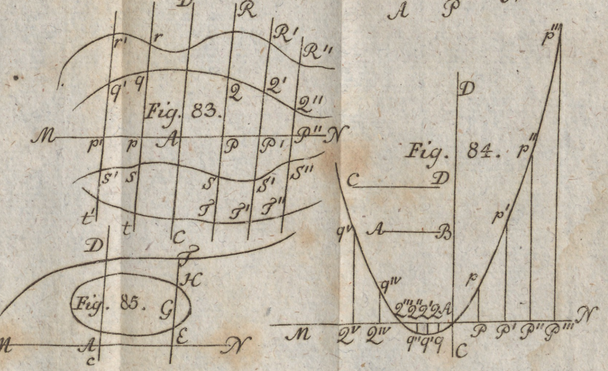


Fig. 83.

Fig. 84.

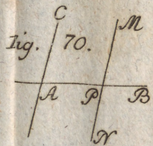


Fig. 70.

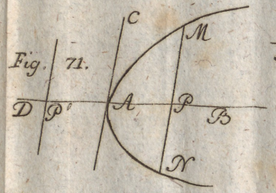


Fig. 71.

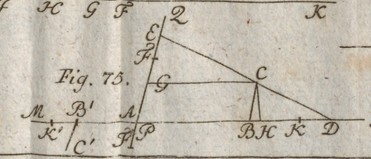


Fig. 75.

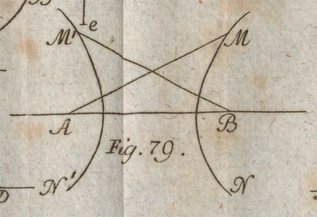


Fig. 79.

Fig. 85.



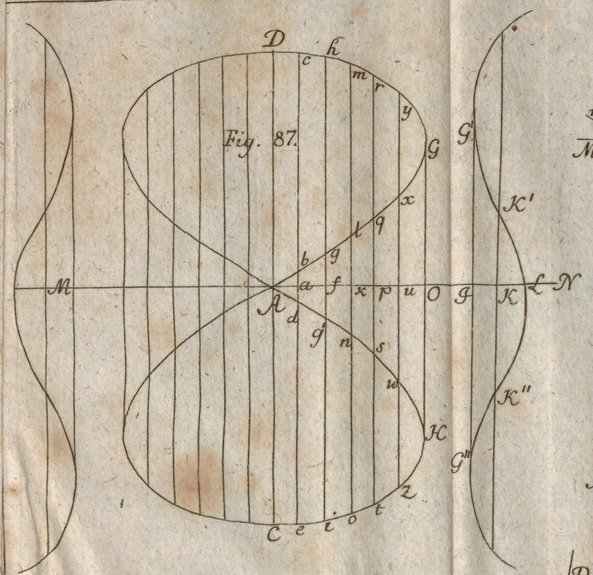


Fig. 87.

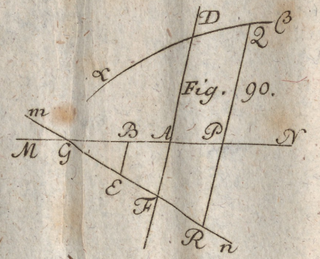


Fig. 90.

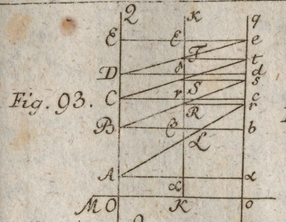


Fig. 93.

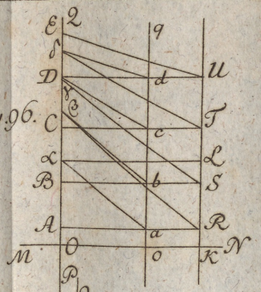


Fig. 96.

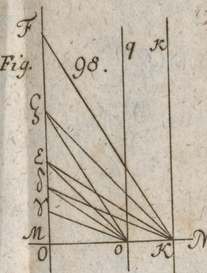


Fig. 98.

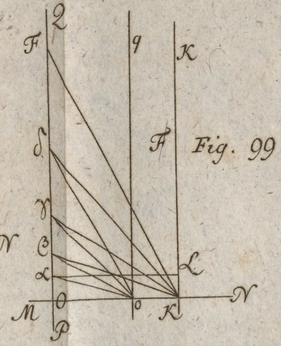


Fig. 99.

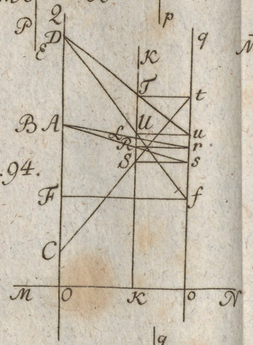


Fig. 94.

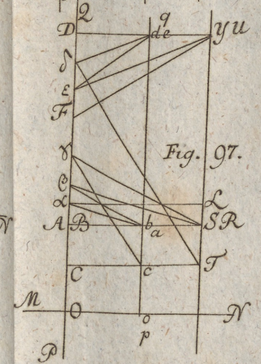


Fig. 97.

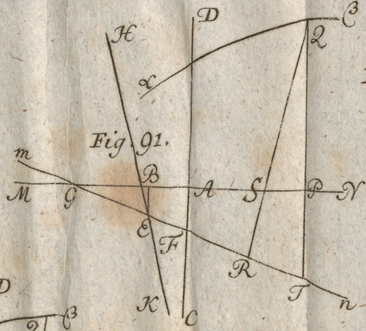


Fig. 91.


Fig. 100.

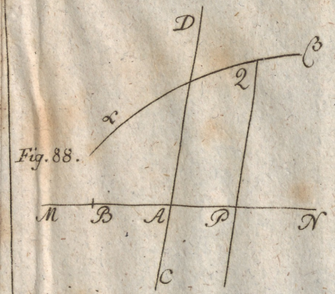


Fig. 88.

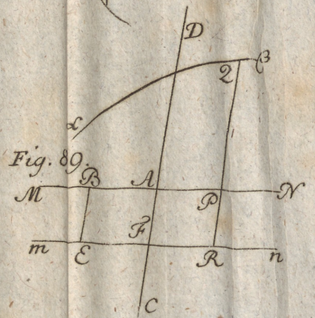


Fig. 89.

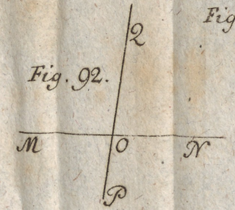


Fig. 92.

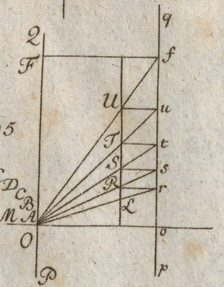


Fig. 95.

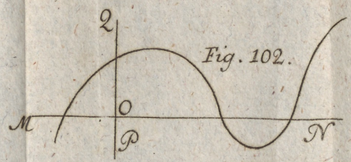


Fig. 102.

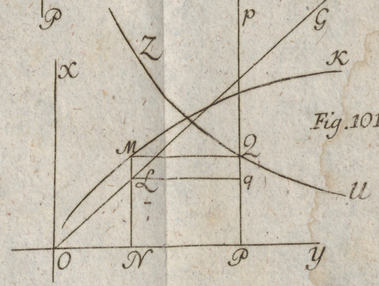


Fig. 101.

