



162

Abhandlung
von den *Akkord*
Zangenstellen,
Quadraturen
und
Rectificationen
der Regelschnitte,
nebst einigen andern,
diese Linien betreffenden Aufgaben.



Leipzig,
bei Siegfried Lebrecht Crusius, 1773.

2997



91650

Dem Magnifico,
Hochedelgebohrnen, Hochgelahrten Herrn,
H E R R
George Heinrich
Borß,

d. Z. Rectori der Universität zu Leipzig, und der philosophischen Facultät daselbst Decano; der mathematischen Wissenschaften öffentlichen Lehrer und Professor ordinario; des Frauen-Collegii Collegiaten und dermaligen Präposito; der Leipziger ökonomischen Societät Mitgliede.

శివులు నీ
ప్రాణాన్తికామహం ప్రాణాన్తికామహం
శివులు నీ
ప్రాణాన్తికామహం ప్రాణాన్తికామహం

శివులు నీ ప్రాణాన్తికామహం ప్రాణాన్తికామహం
శివులు నీ ప్రాణాన్తికామహం ప్రాణాన్తికామహం
శివులు నీ ప్రాణాన్తికామహం ప్రాణాన్తికామహం
శివులు నీ ప్రాణాన్తికామహం ప్రాణాన్తికామహం

Magnifice,

Hochedelgebohrner Herr,

Hochgeehrtester Herr Rector,



Wenn es noch zweifelhaft seyn könnte,
ob die ersten Eindrücke, die auf un-
ser Herz gemacht werden, die stärk-
sten und dauerhaftesten wären: so
würde mich gewiß die Lebhaftigkeit derjenigen Em-
pfindung davon überzeugen, mit welcher ich ges-
gentwärtige Abhandlung Ew. Magnificenz zu
übergeben die Ehre habe, da ich auf die ange-
nehmste Weise fühle, wie sehr die Proben Ihrer
besondern Güte, ja ich kann sagen, Ihrer
vorzüglichen Liebe und Sorgfalt, mich Ihnen
verbunden haben, mit welchen Sie, von meinem
zartesten Alter an, in welchem ich das Glück
hatte Sie kennen zu lernen, mich beeindruckt haben.

Gegenwärtige Abhandlung, die Arbeit und
Beschäftigung meiner Nebenstunden, übergebe ich
Ew. Magnificenz um so mehr mit Vergnün-
gen, da ich Ihnen hierdurch einen Beweis geben

Kann, wie ich dieselben zugebracht habe. Der getreue und sorgfältige Unterricht, welchen ich, so verschiedene Jahre hindurch, von Denen selben genossen habe, erfüllt mich nicht allein mit der vorzüglichsten Achtung und Erkenntlichkeit, sondern lehrt mich auch zu gleicher Zeit den Fleiß nachahmen, in welchem Ew. Magnificenz jederzeit das würdigste Beispiel geben.

Ich habe zu den eifrigsten Wünschen für Dero beständiges und dauerhaftes Wohlergehen, nichts weiter als die Bitte noch hinzuzusehen, daß Sie mir Ihre Liebe und Wohlgewogenheit erhalten und mich noch fernerhin damit beeihren wollen. Der ich mit der vollkommensten Hochachtung verharre

Ew. Magnificenz

Leipzig,
Den 20. April
1773.

ergebenstgehorsamster,

Curt Friedrich von Schönberg.

Vorrede.

Borrede.



Der Innhalt gegenwärtiger Abhandlung erstreckt sich, einige wenige Aufgaben ausgenommen, ganz allein auf die Regelschnitte, obgleich die darinn gebrauchte Methode, auf alle krumme Linien, algebraische und transcendentische, sich anwenden läßt. Denn einmal sind doch die Regelschnitte von allen bekannten Linien die nützlichsten und brauchbarsten, und über dieses ist es vorteilhaft, das Verfahren, dessen man sich, in verschiedener Absicht, bey den krummen Linien überhaupt, bedient, an den Regelschnitten, als den einfachsten Linien, zuerst kennen zu lernen, zumal, da bey den Linien höherer Ordnungen, nicht so gar viele Untersuchungen vorkommen, welche diese nicht mit jenen gemein haben, oder wo das Verfahren für dieselben einige Abänderung leidet. Ich habe aber die hier gebrauchten Formeln, die, wie man aus der Vergleichung sehen kann, mit den Differentialformeln, nach denen man die gegebene, differentiirte Gleichung, anordnet

Vorrede.

und hern ach integrirt, im Grunde einerley sind, so einzurichten gesucht, daß der Nutzen, der, bey den hier vorkommenden Aufgaben, die Erfindung der Tangenten, und der damit verwandten Linien, verschafft, sichtbar in die Augen fällt, wobey ich zugleich gezeigt habe, wie man sich dieser Formeln, ohne die Regeln des Differentialiren vorauszusehen, bedienen müsse. Hierdurch aber glaube ich denjenigen einen angenehmen Dienst zu erzeigen, denen Absicht Zeit oder andere Umstände nicht verstatten, über die Gränzen der gemeinen Algebra hinauszugehen; ja ich darf hoffen, daß auch verschiedene von denen, die sich bey Auflösung dieser Aufgaben des höhern Calculi, aber, wie oft geschieht, nicht mit der gehörigen Einsicht und gleichsam auf eine mechanische Art bedienen, wenn sie die Entstehung und Anwendung der hier gelehrt Formeln, nebst denen, gehörigen Orts behgebrachten Erinnerungen, in Erwägung ziehen, deutlicher als vorher einsehen werden, wie und warum man das Gesuchte durch Integrirung des dafür erforderlichen Differentialausdrucks erhält. Hierbei muß ich jedoch, zu meiner Entschuldigung, noch diese Erinnerung hinzusehen, daß ich dadurch keinesweges behaupte, als ob die Formeln, wie selbige hier nach den gewöhnlichen Differentialformeln ausgedrückt sind, einen Vorzug vor den letztern hätten. Es ist vielmehr gewiß, daß bey diesen selbst die Bezeichnung bequemer ist, und daß sich eine ähnliche Veränderung und Einrichtung bey denjenigen Formeln, in welchen höhere Differentialen mit vorkommen, nicht immer mit eben der Leichtigkeit, wie bey den erstern, anbringen läßt.

Ich

Vorrede.

Ich würde, wie ich anfänglich Willens war, die Erfindung der grössten und kleinsten Ordinaten, ingleichen des Halbmessers der Krümmungskreise (radii osculi) für die Regelschnitte hier mit beygefüg't, und durch Beyspiele erläutert haben, wenn mich nicht die Bedenklichkeit zurückgehalten hätte, daß ich dadurch, wider meine Absicht, die Gränzen dieser Schrift zu sehr erweitern möchte. Die hier und da vorkommenden Citata, beziehen sich durchgängig auf die mathematischen Lehrbücher des Herrn Hofrath Kästners, die in Jedermanns Händen sind, oder es doch wenigstens, ihrer innern Vortrefflichkeit und zweckmässigen Vollständigkeit wegen, zu seyn verdienen. Verschiedene Aufgaben und Exempel habe ich aus seiner Analyse des Unendlichen entlehnt, und nach meiner Art vorgetragen; worüber man mir, wie ich glaube, keine Vorwürfe machen wird, so wie ich auch zuversichtlich hoffe, daß man kleine Versehen, die hier und da meiner Aufmerksamkeit entgangen seyn könnten, mir nicht sowohl zurechnen, als vielmehr meinen Jahren verzeihen wird.

JV

Innhalt.

Innhalt.

I. Von den Tangenten, Subtangenten, Normalen und Subnormalen der Regelschnitte	§. 1
II. Von den Quadraturen der Regelschnitte und den natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen	60
III. Von der Rectification der Regelschnitte	154
IV. Von Cubirung der Körper, besonders der runden, die durch Umdrehung einer krummen Linie um ihre Axe entstehen	178
V. Von der Quadratur der krummen Seitenflächen, derer durch Umdrehung einer krummen Linie entstandenen runden Körper	193
VI. Anhang einiger Aufgaben, die Regelschnitte betreffend	202

L. Von

I.

Von den

Tangenten, Subtangenten, Normalen
und

Subnormalen der Regelschnitte.

1. Erklärung.

Wenn (Fig. 1.) eine gerade Linie GH an einen Punct M eines Regelschnitts dergestalt antrifft, daß ihre Verlängerung von beyden Seiten des Punctes, die krumme Linie nicht schneidet, so heißt diese gerade Linie eine Tangente des Schnitts; der Punct, den sie mit der krummen Linie gemein hat, ein Berührungsypunct.

2. Anmerkung. Diese Erklärung der Tangente, deren Möglichkeit sogleich gezeigt werden soll, ist eben dieselbe, die Euklid (3. B. 2. Erkl.) für den Cirkel gegeben hat; sie gilt aber für alle Regelschnitte, oder Linien der zweyten Ordnung. Bey Linien der höhern Ordnungen hingegen kann es gar wohl geschehen, daß die Verlängerung der Tangente an einem Puncte die krumme Linie irgendwo wieder schneidet, und also mehr als einen Punct mit ihr gemein hat. Ein Beyspiel hiervon giebt GH (Fig. 2.).

3. Erkl. Ein Perpendikel MQ (Fig. 1.) auf der Tangente aus dem Berührungsypuncte, wird die Normale genannt. Eine Ordinate MP aus eben dem Berührungsypuncte auf die Abscissenlinie AB gezogen, bestimmt auf ihr die beyden Theile PT, PN, von welchen jener die Subtangente, dieser die Subnormale genannt wird.

2 Von den Tangenten, Subtangenten, &c.

4. Ann. Die Benennung der Subtangente und Subnormale bleibt, die Ordinate PM mag rechtwinklig oder schiefwinklig auf AB fallen; d. i. sie mag einer Axe, oder einem Durchmesser, oder irgend einer andern Abscissenlinie geordnet seyn. Doch werden hier durchgängig, wenn nichts weiter erinnert wird, sich diese Linien auf die Hauptaxe des Schnitts, und folglich auf rechtwinklige Coordinaten beziehen.

5. Aufgabe. 1. Eine Tangente GH an einen gegebenen Punct M eines Regelschnitts geometrisch zu ziehen.

Auslösung für die Ellipse und Hyperbel (Fig. 3.)
4.) Aus dem Puncte M ziehe man nach den beyden Brennpuncten F, f, die Linien MF, Mf, und nehme auf der größten derselben, (hier Mf) die man in der Hyperbel nach K zu verlängern muß, $MK = MF$, und ziehe FK, so ist die Parallele GH durch den Punct M mit FK gezogen, die verlangte Tangente.

Beweis I.) für die Ellipse. Weil $GH \parallel FK$ und $MFK = MKF$ so ist $GMF = HMK$. Gesetzt die Linie MH könnte die Ellipse noch irgendwo z. E. in L schneiden: so nehme man auf der nach I verlängerten MF; $IM = Mf$ also $FI = MF + Mf = AB = a$ (Alg. 378.) und ziehe FL, Lf, IL. In den Triangeln fML, IML sind alsdenn die Seiten fM, ML den Seiten IM, ML, und also, wegen der gleichen Winkel HMK, IMH zwischen diesen Seiten, auch die dritte Seite Lf der dritten LI gleich. Nun ist aber, nach der Annahme, der Punct L so wie M in der Ellipse, also auch $MF + Mf = FL + Lf$ d. i. $FL + LI = FI$, zwei Seiten des Triangels FIL so groß wie die dritte Seite; welches absurd ist.

II.) für die Hyperbel. Hier sind, wie bey der Ellipse $GMF = HMK = GMf$. Auf Mf nehme man $MI = MF$, so ist $fi = fM - MF = AB = a$ (Alg.

406.) Gesetzt MH könnte die Hyperbel noch irgendwo z. E. in L schneiden: so ziehe man LF , LI , Lf , so ist $LI = LF$ also $Lf = LF = Lf = LI$. Ist nun, wie hier angenommen wird, der Punct L so wie M in der Hyperbel, so ist $Lf - LI = fI$ oder $Lf = fI + LI$: welches absurd ist.

Eben so kann man zeigen, daß auch die unterwärts, nach G zu, verlängerte MH , die Hyperbel und Ellipse nicht schneiden kann. Also hat GH nur den einzigen Punct M mit dem Regelschritte gemein, und ist folglich eine Tangente (1.) an diesem Puncte.

6. Zusatz. 1. Weil in der Parabel (Fig. 1.) die Axe unbegrenzt oder unendlich; (Alg. 355.) also auch der andere Brennpunct f , so wie der Mittelpunkt, als unendlich entfernt von dem Brennpunkte F anzusehen ist: so muß man, um vorhergehende Auflösung auf die Parabel anzuwenden, aus dem gegebenen Puncte M an den Brennpunkt F eine gerade Linie MF , und eine andere mit der Axe AB parallel laufende Mf ziehen, die als ein Stück der Linie aus dem andern, unendlich entfernten, Brennpunkten f anzusehen ist. Nimmt man nun gleichfalls auf ihr $MK = MF$ und zieht FK , so ist die Parallele GH mit FK durch den Punct M , die verlangte geometrische Tangente an den gegebenen Punct der Parabel.

7. Anm. Das Verfahren im vorhergehenden Zusatz gründet sich darauf, daß man die Parabel als eine Ellipse ansieht, deren große Axe unendlich wäre. (Alg. 384.) Nun gibt es zwar eigentlich keine Ellipse von einer solchen Axe, weil diese Linie eine in sich selbst zurücklaufende Linie ist, und die Axe dadurch begrenzt wird (Alg. 363. 364.) Da sich aber erweisen läßt (Alg. 383.) daß für einen Scheitelpunkt, Parameter und Abscisse der Parabel und Ellipse, der Unterschied ihrer Bogen immer geringer wird, je mehr man die Axe der Ellipse vergrößert, dergestalt, daß er endlich kleiner

4 Von den Tangenten, Subtangenten, &c.

als jede angebliche Größe werden kann: so bedient man sich solcher uneigentlichen Ausdrücke und Vorstellungen, wie in andern Fällen, also auch hier, die Schlüsse dadurch zu verkürzen, und die Rechnung zu erleichtern; und man bedient sich derselben mit desto größerer Zuversicht, wenn man dasjenige zuvor reiflich überdacht und erwogen hat, was Herr Hofrath Rästner davon, hier und da in seinen Schriften und Vorreden, beigebracht hat, wo er dasjenige, was vielen hierbei unbegreiflich zu seyn geschienen hat, durch seine Erläuterungen entwickelt, und durch seinen Vortrag begreiflich gemacht hat.

8. Zusatz. 2. Weil (Fig. 1. 3. 4.) in dem Triangel FMK die Seite MK = MF (5. 6.) so ist der Winkel MFK = MKF, also auch wegen der Parallelen GH, FK die correspondirenden Wechselwinkel GMF, HMK, oder: die Winkel, welche die aus den Brennpunkten an den Berührungsypunct gezogenen Linien MF, Mf mit der Tangente machen, einander gleich.

9. Zus. 3. Wenn man in der Ellipse oder Parabel, MF oder Mf über die Tangente hinaus verlängert, so sind, wegen der gleichen Winkel GMF, HMK (8) an oder unter der Tangente, und der neu entstehenden gleichen Verticalwinkel: die Winkel unter der Tangente den correspondirenden anliegenden über derselben gleich. In der Hyperbel ist diese Verlängerung nicht nöthig.

10. Zus. 4. Also wird der Winkel, den in der Ellipse und Parabel die Verlängerung der aus dem einen Brennpuncte an den Berührungsypunct mit der andern aus demselben Berührungsypuncte in den zweyten Brennpunct gezogenen Linie, oder, in der Hyperbel, die unverlängerten Linien FM, Mf bey M machen, durch die Tangente GH in zweien gleiche Theile getheilt. Der Theilung dieses Winkels

Kels bedient man sich insgemein zu Auflösung der Aufgabe (5.)

11. Aufg. 2. Eine Normale MQ an einen gegebenen Punct M eines Regelschnitts geometrisch zu ziehen.

Aufl. Man ziehe den Winkel FMK ; (5.) die Linie MQ die diesen Winkel theilt, ist die verlangte Normale.

Bew. Man ziehe eine Tangente GH an den Punct M (5) so ist, $FMQ = QMK$; und $GMF = HMK$; also $FMQ + GMF = QMK + HMK$, oder MQ ein Perpendikel auf der Tangente aus dem Berührungs-puncte, und folglich (3.) eine Normale an den gegebenen Punct.

12. Zus. 1. Wenn man also die Normale MQ zieht (11) und aus M ein Perpendikel MH auf dieser Normale aufrichtet, so ist dieses Perpendikel zugleich eine Tangente an den gegebenen Punct; (3) auf welche Art die Aufgabe (5) gleichfalls gelöst werden kann.

13. Zus. 2. Wenn man HM nach G zu, bis an T verlängert, so ist das Stück MT ein bestimmter Theil der unbegrenzten geometrischen Tangente GH , welcher von der Abscissenaxe des Schnitts auf eben die Art, wie beym Cirkel in der Trigonometrie von der Secante, abgeschnitten und begränzt wird. Eben so wird MN ein bestimmter Theil der unbegrenzten geometrischen Normale MQ ; und in dem Verstande kann man die Größe einer solchen bestimmten Tangente oder Normale, für jeden beliebigen Punct, so wie die Subtangente, Subnormale ic. algebraisch ausdrücken, wie in der Folge gezeigt werden wird.

14. Zus. 3. Da die Tangente des Schnitts mit der Linie FK jederzeit parallel läuft (5. 6.) so ersieht man hieraus sogleich:

6 Von den Tangenten, Subtangenten, ic.

1) die Lage der Tangente gegen die Axe, und auf welcher Seite des Mittelpunctes diese Tangente die Axe schneidet.

2) daß der Winkel K F M dem Winkel M T N, den die Tangente mit der Axe macht, allemal gleich seyn müsse.

3) daß diese beyden gleichen Winkel immer größer werden, und sich einem rechten Winkel nähern, je näher M nach dem Scheitel A zu rückt, so wie im Gegenthell die bestimmte Tangente auf den Fall abnimmt; und umgekehrt wächst, wenn K F N sich vermindert, und daß folglich über A, den Anfang der Abscissen, eine unbestimmte Tangente G H auf der Axe senkrecht stehen müsse. Eben das gilt auch für den andern Scheitelpunct B.

4) daß hingegen die bestimmte Tangente M T an den beyden Scheiteln Null werde, oder verschwinde, weil alsdenn, wenn M auf A oder B fällt, $FK = 0$ wird: so wie die Tangente des Cirkels in der Trigonometrie für die Grade 0 und 180 gleichfalls 0 ist. Endlich

5) daß in der Ellipse, wenn $FM = fM$ wird [In dem Puncte, wo die Semiordinate der halben kleinen Axe gleich ist (Alg. 365.)] also FK in FN fällt, und der Winkel K F N unendlich klein oder Null ist: die Tangente an diesem Puncte, sowohl in Absicht der Lage von FK als auch des unendlich kleinen Winkels K F N, mit der Axe parallel laufen und also die Tangente und Subtangente für den Quadranten der Ellipse, eben so wie die trigonometrische Tangente und Secante für den Quadranten des Cirkels, unendlich seyn müsse.

15. Zus. 4. Wenn man aus dem Puncte M des rechtwinklischen Triangels T M N, das Perpendikel MP auf die Axe herabläßt: so sind mit dieser Ordinate PM, nicht allein P T und PN (3) sondern auch die Abscissen

$AP = x$ und $CP = u$ der Größe nach gegeben. Folglich kann man für jeden in dem Umfange des Schnitts gegebenen Punct, diese Abscissen als bekannt ansehen, und die Werthe der dafür zu suchenden Linien, in diesen Abscissen oder ihren Functionen, mit Beziehung der in der Gleichung für die Linie befindlichen beständigen Größen ausdrücken. Es wird sich also für jede Linie des Schnitts, dergleichen PT , PN , MT , MN &c. sind, ein doppelter Ausdruck angeben lassen, je nachdem man die veränderliche Größe x oder u (die Abscisse vom Scheitel oder vom Mittelpuncte) in den Werth der Linie zu bringen sucht, welcher außerdem durch die mitverbundnen unveränderlichen oder beständigen Größen noch mehrere Gestalten annehmen kann. Mehrentheils sucht man den Werth dieser Linien in den Abscissen x oder ihren Dignitäten, mit Beziehung der großen Axe und des Parameters zu bestimmen, weil sich die solch egestalt für die Ellipse oder Hyperbel gefundenen Ausdrücke am leichtesten auf die Parabel anwenden lassen; wiewohl auch die Werthe in welchen u befindlich ist, ihren vielfachen Nutzen haben, und sehr oft kürzer ausfallen als die erstern. Ich werde in der Folge diese Linien in den Werthen sowohl von x als u angeben.

16. Aufg. 3 Linien Ausdruck für die Subtangente PT zu finden

Aufl. I.) für die Ellipse (Fig. 5.) Weil $TM \parallel FK$ (5) so ist $FK : TM \propto KM : FT$, also

$$FK : FT = KM : FT$$

oder (In den Werthen dieser Linien (Alg. 376. 378.) und

$$\text{weil } KM = FM = \frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, \text{ also } FK = fM$$

8 Von den Tangenten, Subtangenten, &c.

$$-MK = fM - FM = \frac{1}{2}a + \frac{u\sqrt{a^2 - c^2}}{a} -$$

$$\left(\frac{1}{2}a - \frac{u\sqrt{a^2 - c^2}}{a}\right) = \frac{2u\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \frac{2ur}{a}, \text{ wenn}$$

man $\sqrt{a^2 - c^2} = r = fF$ setzt) $FT = \frac{fF \cdot KM}{fK} = \frac{a^2}{4u} = \frac{r}{2}$. Nun ist

$$FP = FC - CP = \frac{r}{2} - u$$

$$\text{also } FT + FP = \frac{a^2}{4u} - u = \frac{\frac{1}{4}a^2 - u^2}{u} = PT$$

Fiele der Punct P zwischen F und A, so wäre alsdenn
 $FP = PC - CF = u - \frac{r}{2}$ und $PT = FT - FP =$

$$\frac{a^2}{4u} - \frac{r}{2} - u + \frac{r}{2} = \frac{a^2}{4u} - u, \text{ dem vorigen nichts desto weniger gleich.}$$

In diesen gefundenen Werth von PT , $\frac{1}{2}a - x$ statt u substituirt (Alg. 368.) giebt

$$PT = \frac{a^2 - 4(\frac{1}{2}a - x)^2}{4(\frac{1}{2}a - x)} = \frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x} = \frac{(a - x)x}{\frac{1}{2}a - x}$$

wo x die Abscisse AP vom Scheitel A an gerechnet bedeutet.

II.) für die Hyperbel. (Fig. 6.) Wenn man hier $\sqrt{a^2 + c^2} = s$ setzt, so ist (Alg. 405. 406.) $fK = \frac{2us}{a} = fM + FM$. Da nun hier, wie in der Ellipse:

fK

$$fK \left(\frac{2su}{a} \right) : fF(s) = KM \left(\frac{su}{a} - \frac{a}{2} \right) : FT$$

$$\text{so ist } FT = \frac{s}{2} - \frac{a^2}{4u}$$

$$\text{aber } FP = CP - CF = u - \frac{s}{2}$$

$$\text{also } FT + FP = u - \frac{a^2}{4u} = \frac{4u^2 - a^2}{4u} = \frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u}$$

$$= PT.$$

Auch hier kann P zwischen F und A fallen. Dann ist $FP = CF - CP$ und $PT = FT - FP$. Dem ohngeachtet bleibt der Ausdruck für $PT = \frac{u^2 - \frac{1}{4}a^2}{u}$, und also eben dasselbe.

In diesen gefundenen Werth $\frac{1}{2}a + x$ statt u substituiert (Alg. 402.) giebt

$$PT = \frac{4(\frac{1}{2}a + x)^2 - a^2}{4(\frac{1}{2}a + x)} = \frac{ax + x^2}{\frac{1}{2}a + x} = \frac{(a+x)x}{\frac{1}{2}a + x}.$$

17. Ann. In vorstehenden beyden Auflösungen ist das Verfahren für die Ellipse und Hyperbel vollkommen einheitlich, und die Vergleichung dieser und anderer Rechnungen für dergleichen Linien zeigt offenbar, daß das Resultat derselben bey beyden gemeinlich in nichts als in den Zeichen einiger Glieder verschieden sey. Die Folge wird dieses noch mehr bestätigen, und nur in wenigen besondern Fällen eine Ausnahme machen. So werden z. E. die beyden (I. II.) gefundenen Werthe in diesen Ausdruck

$$PT = \pm \frac{\frac{1}{4}a^2 \mp u^2}{u} = \pm \frac{(\frac{1}{4}a^2 - u^2)}{u}, \text{ d. i.}$$

10 Von den Tangenten, Subtangenten, sc.

$$\frac{ax + x^2}{\frac{1}{2}a + x} = \frac{2x(a + x)}{a + 2x} \text{ insgemein zusammen gefaßt,}$$

wo die oberen Zeichen für die Ellipse, die untern für die Hyperbel gelten.

Die Subtangente hat übrigens, so wie andere mit ihr verbundene Liniens in der Algebra einen beträchtlichen Nutzen. Vermittelst derselben kann man auch die Aufgabe (5) analytisch lösen, weil sie den Punct T, wo die Tangente die Axe, den Diameter, oder irgend eine andere der Lage nach gegebene Abscissenlinie schneidet, durch ihre Länge finden, und das durch mit dem gegebenen Puncte M die Lage und Größe der Tangente bestimmen lehrt.

$$18. \text{ Zus. 1. Aus } PT = \frac{(a + x)x}{\frac{1}{2}a + x} \text{ folgt:}$$

$$(\frac{1}{2}a + x):x = (a + x):PT$$

die Subtangente ist also in der Ellipse und Hyperbel die vierte Proportionale zu CP, AP, BP; das heißt, für die Ellipse: die vierte Proportionale zu der Abscisse aus dem Mittelpuncke und den Segmenten der großen Axe.

$$19. \text{ Zus. 2. Weil man die Parabel als eine Ellipse von einer unendlich großen Axe ansehen kann (7) so setze man in } PT = \frac{2x(a + x)}{a + 2x} \text{ (17) } a = \infty, \text{ so kommt } PT$$

$$= \frac{2x(\infty - x)}{\infty - 2x} = \frac{2x\infty}{\infty} = 2x \text{ für die Subtangente}$$

der Parabel. Auch bleibt der Ausdruck von PT folgende Proportion:

$$a + 2x : 2x = a + x : PT$$

Da

Da nun in der Ellipse $a - x > a - 2x$, so ist auch $PT > 2x$, aber in der Hyperbel, wo $a+x < a+2x$, dieses $PT < 2x$. Es ist also: die Subtangente in der Parabel der doppelten Abscisse ($2x$) gleich, größer als sie in der Ellipse und kleiner in der Hyperbel.

20. Zus. 3. Wollte man den Ausdruck für die Subtangente der Parabel unabhängig von der Ellipse finden, so könnte das auf die Art geschehen, die ich in meiner Abhandlung von den Hauptegenschaften der Regelschnitte §. LXXI. gezeigt habe. Man kann aber auch hierbei nach einer Methode verfahren, die sich überhaupt auf mehrere krumme Linien erstreckt, deren Gleichungen gegeben sind. ARN (Fig. 7.) sey ein Bogen einer kurvigen Linie, die von der geraden Linie GH in den Puncten R, N usw. geschnitten wird. Diese Linie GH lasse man in Gedanken mit einer sich immer parallel bleibenden Bewegung nach M zurücken: so kommen die Puncte R, N, so wie die zugehörigen Ordinaten PR, QN, immer näher an einander, bis endlich beyde Puncte auf M, als einen doppelten Durchschnittspunct (Alg. 452.) und beyde Ordinaten auf Mp fallen, also $PQ = 0$; MT zur Tangente und PT zur Subtangente wird. Man drücke also das Verhältniß zweier Ordinaten, wie QN, PR, oder ihrer Dignitäten, vermittelst der gegebenen Gleichung für die Linie aus, und vergleiche sie mit dem Verhältnisse eben der Dignitäten von diesen Ordinaten aus den ähnlichen Triangeln tQN, tPR der Figur: so ergiebt sich also der algebraische Ausdruck der Subtangente von selbst. Wäre nun

$QN^m : PR^m = p : q$ nach der Gleichung;
 und $\underline{QN^m : PR^m = Qt^m : Pt^m}$ nach den ähnl. Tr. der Fig.
 so fände man $p : q = Qt^m : Pt^m$, wo Pt und also auch nach der Voraussetzung, PT gegeben ist.

Eremo

12 Von den Tangenten, Subtangenten, ic.

Exempel für die Regelschnitte. In der Parabel ist

$$QN^2 : PR^2 = (AP + PQ) : AP \quad (\text{Alg. 357})$$

$$QN^2 : PR^2 = (tP + PQ)^2 : Pt^2 \text{ aus der Fig.}$$

$$\frac{(AP + PQ) : AP}{(AP + PQ) : AP} = \frac{(Pt^2 + 2Pt \cdot PQ + PQ^2) : Pt^2}{(Pt^2 + 2Pt \cdot PQ + PQ^2) : Pt^2} \text{ ex æquo subtr.}$$

$$PQ : AP = (2Pt \cdot PQ + PQ^2) : Pt^2$$

$$\text{also } Pt^2 \cdot PQ = (2Pt \cdot PQ + PQ^2) AP$$

$$\text{oder } Pt^2 = (2Pt + PQ) AP$$

also beym Zusammenfallen der Punkte R, N, in M, oder für den Fall der Tangente, (wo AP so wie AQ = Ap = x; tP und tQ = Tp; also PQ = 0 wird) $Tp^2 = 2Tp \cdot x$ oder $Tp = 2x$ (19.) Eben so fände man für die Ellipse und Hyperbel, wo $QN^2 : PR^2 = (a \mp AQ) AQ : (a \mp AP) AP$ (Alg. 374.)

$$Tp = \frac{ax \mp xx}{\frac{1}{2}a \mp x} \quad (17).$$

21. Zus. 4. Auch kann man die Subtangente einer Linie sehr leicht durch folgende Regel des Slusius finden, welcher ich hier, ihrer Bequemlichkeit wegen, gedenken will: Man bringe alle Glieder einer gegebenen Gleichung auf eine Seite oder setze sie gleich Null; die Subtangente ist alsdenn einem Bruche gleich, dessen Zähler aus allen Gliedern von y (der Ordinate) mit ihren Zeichen, in die zugehörigen Exponenten multiplizirt: der Nenner aus allen, gleichfalls mit ihren Exponenten multiplizirten, sodann durch x dividierten, aber mit den entgegen gesetzten Zeichen geschriebenen Gliedern von x (der Abscisse) besteht. Diejenigen Glieder, die kein x oder y haben, fallen weg, weil sie als solche, die in x^0 oder y^0 multiplizirt sind, betrachtet, und also durch den Exponenten 0, der nun ein Factor des ganzen Gliedes wird, vernichtet werden.

Expl.

Expl. Für die allgemeine Gleichung $y^m = \alpha + \beta x^n + \gamma x^h y^k$ oder $y^m - \gamma x^h y^k - \beta x^n - \alpha = 0$; wären $y^m - \gamma x^h y^k$ alle Glieder in denen sich y , und $-\beta x^n - \gamma y^k x^h$ alle Glieder in denen sich x befindet. Also, nach der Vorschrift, $PT = \frac{my^m - \gamma kx^h y^k}{n\beta x^{n-1} + \gamma h y^k x^{h-1}}$.

Für die Parabel wären also hier $\beta = p$; $m = 2$; $n = 1$; α und $\gamma = 0$; also $PT = \frac{2y^2}{px^0} = \frac{2px}{p} = 2x$ (19).

Für die Ellipse und Hyperbel wären β ; m ; n ; α ; wie in der Parabel $= p$; 2 ; 1 ; 0 ; und $\gamma = \mp \frac{p}{a}$; $h = 2$;

$$k=0; \text{ also } PT = \frac{2y^2}{px^0 \mp \frac{2px}{a}} = \frac{2p(x \mp \frac{x^2}{a})}{p(1 \mp \frac{2x}{a})}$$

$= \frac{2x(a \mp x)}{a \mp 2x}$ (17). Eben den Werth würde man, und zwar noch geschwinder, aus der Gleichung $y^2 - px \pm \frac{px^2}{a} = 0$ selbst erhalten haben. Für unendliche Parabeln $y^m - p^n x^k = 0$ wäre $PT = \frac{my^m}{kp^n x^{k-1}}$

$= \frac{m}{k} x$; und für unendliche Hyperbeln zwischen ihren Asymptoten $y^m x^k - a^{m+k} = 0$, käme

$$PT = \frac{-my^m x^n}{ny^m x^{n-1}} = -\frac{m}{k} x.$$

Hier

L. Von den Tangenten, Subtangenten, &c.

Hier ist also die Subtangente der vorstehenden Parabel. Subtangente gleich aber entgegengesetzt; daß also, nach der Bedeutung der Zeichen, im letztern Falle Subtangente und Anfang der Abscissen auf verschiedenen Seiten, so wie im erstern auf einer Seite der Ordinate zu liegen kommen.

22. Ann. Diese Regel, die sich noch weiter als die vorhergehende erstreckt, ist eigentlich nur eine Verkürzung des von Fermat bey Suchung der Subtangente vorgeschriebenen Verfahrens, von welchem sie das letzte Resultat auf eine mechanische Art finden lehrt. Man findet ihrer heut zu Tage in wenigen Schriften gedacht, weil sie von der Differentialformel für die Subtangente, die gleichsam als eine Erweiterung der Fermatischen oder vielmehr Barrowischen Tangenten-Methode angesehen werden kann, und die auch im Grunde einigerley mit ihr ist, verdrängt worden ist. Ich habe daher den Beweis dieser Regel hier nicht beybringen wollen. Die Differentialformel ist freylich von viel allgemeinern Gebrauche, und übersteigt alle Hindernisse, die der Slutischen Regel, so wie andern, oft Gränen setzen, dergleichen die Irrationalgrößen und die binomischen oder polynomischen Potenzen von einem unbestimmten Exponenten (m) u. s. w. sind. Wo sie aber statt findet, so hat sie die Bequemlichkeit, daß man die Subtangente sogleich ausdrücken kann, ohne vorher die oft weitläufige Verwandlung der Gleichung nach dem Fermat vorzunehmen, ja selbst ohne die Gleichung zuvor zu differenzieren, wie bey der Differentialformel geschehen muß, wenn man aus ihr den Werth der Subtangente herleiten will.

$$23. \text{ Zus. 5. } \ln PT = \frac{\pm [\frac{1}{x}a^2 - u^2]}{u} \quad (17) \text{ wird}$$

für $u = \frac{1}{2}a$ der Zähler, und also das ganze $PT = 0$. Für $x = 0$, wird auch $PT = 2x = 0$ (19), die Subtangente also für die Scheitelpuncte aller Regelschnitte verschwindet, indem sie gleich Null wird.

24. Zus.

24. Zus. 6. Setzt man aber $u = 0$, so wird der Nenner Null, also in der Ellipse $PT = \frac{\frac{1}{4}a^2}{0} = \infty$ (14. 5)

Für die Hyperbel wäre alsdenn $PT = -\frac{\frac{1}{4}a^2}{0} = -\infty$.

Da aber der Abscisse $u = 0$ in der Hyperbel kein Punct der krummen Linie zugehört (Alg. 401.) so giebt es auch hier keine Subtangente. Hierauf muß man wohl achten; denn die Formel der Subtangente, und anderer vergleichlichen Linien, kann gar wohl für eine gewisse Abscisse einen Werth geben, der aber durch die Gleichung der Linie wieder ausgeschlossen wird, wenn diese Abscisse einer unmöglichen Ordinate zugehört. So wäre auch in der Ellipse für $u = a$; $PT = -\frac{3}{4}a$, welches aber, wegen der unmöglichen Ordinate (Alg. 375.) hier wegfällt. Außerdem kann es wohl geschehen, daß der Ausdruck für die Subtangente ic. negativ wird. Die Bedeutung und Lage einer solchen Subtangente ist (21) erklärt worden.

25. $AT = PT - AP$ also (17. und Alg. 368. 402)

$$AT = \begin{cases} \frac{\pm a^2 + 4u^2}{4u} - (\pm \frac{a}{2} + u) = \frac{\pm a^2 + 2au}{4u} \\ \qquad\qquad\qquad = \pm \frac{a(a - 2u)}{4u} \quad (I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2ax + 2x^2}{a + 2x} - x = \frac{ax}{a + 2x} = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x} \quad (II) \end{cases}$$

also ist AT die vierte Proportionale zu CP, CA, AP .

26. Zus. 1. Für $a = \infty$ wird $AT = x$, in der Parabel. Also ist AT der correspondirenden Abscisse (x) gleich in der Parabel größer als sie in der Ellipse, und kleiner in der Hyperbel.

27. Zus.

16 Von den Tangenten, Subtangenten, &c.

Zus. 2. Für $x = 0$ oder $\pm a$, wird auch $AT = 0$.
 Für $x = \frac{1}{2}a$ ist $AT = \infty$ in der Ellipse. Nun kann in
 der Parabel und Hyperbel x auch unendlich werden (Alg.
 355. 394.) auf den Fall ist $AT = \infty$ in der Parabel;
 in der Hyperbel hingegen $AT = \frac{a \infty}{2 \infty} = \frac{1}{2}a$. Hieraus
 erhellet:

1) daß bey jeder endlichen Abscisse der Hyperbel die
 zugehörige Tangente die Hauptaxe in einem zwischen dem
 Mittel- und nächsten Scheitelpuncte gelegenen Puncte T
 schneiden müsse.

2) daß man durch den Mittelpunct der großen Axe,
 auf beiden Seiten derselben, eine unbegränzte Linie ver-
 gestalt legen könne, daß sie die Schenkel der Hyperbel
 in einem vom Scheitel unendlich entfernten Puncte be-
 rühret. Diese eingebildete Tangente, heißtt, wie bekannt,
 die Asymptote (Alg. 408).

$$28. CT = AC \pm AT, \text{ also (25)}$$

$$CT = \begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{a(a - 2u)}{4u} = \frac{a^2}{4u} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{u} & (\text{I}) \\ \frac{1}{2}a - \frac{ax}{a+2x} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{a+2x} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{2}a+x} & (\text{II}). \end{cases}$$

$$29. \text{ Zus. I. Aus } \frac{\frac{1}{4}a^2}{u} = CT \text{ folgt: } u : \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a :$$

CT, daß also CT die dritte Proportionale zu CP
 und AC ist; woraus man sehr leicht den Punct
 T finden kann, in welchem eine Tangente an den
 gegebenen Punct M der krummen Linie die Hauptaxe
 schneidet.

30. Zus.

30. Zus. 2. In $\frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{2}a+x}$ wäre, für $a = \infty$, ein CT

in der Parabel $= \frac{1}{4}\infty^2 : \frac{1}{2}\infty = \frac{1}{2}\infty$, welcher Ausdruck ein Beweis der Richtigkeit und Uebereinstimmung des Calculs ist, weil er zu erkennen giebt, daß, wenn man auch in der Parabel einen Mittelpunct annehmen wollte, derselbe wie bey der Ellipse und Hyperbel, in der Hälfte der unendlichen Axe liegen, und also auch unendlich vom Scheitel entfernt seyn müßte; das heißt nichts weiter, als daß es in der Parabel kein solches CT, keinen Mittelpunct, giebt.

31. Zus. 3. Für $u = \frac{1}{2}a$ ist $CT = \frac{1}{2}a$; Für $u = 0$ ist $CT = \infty$. In der Hyperbel aber giebt es kein der gleichen CT, weil dieser Abscisse kein Punct der Hyperbel zugehört (Alg. 401). Für $u = \infty$ ist in der Hyperbel $CT = \frac{a^2}{4\infty} = 0$, für die Asymptote (27. 2).

32. Aufg. 4. Einen Ausdruck für die Subnormale PN zu finden.

Aufl. In dem rechtwinklichen Triangel TMN ist
 $PT : PM = PM : PN = \frac{PM^2}{PT}$ also (17.u.Alg.368.402.)

$$PN = \left\{ \begin{array}{l} \pm \frac{c^2(\frac{1}{4}a^2 - u^2)}{a^2} : \pm \frac{(\frac{1}{4}a^2 - u^2)}{u} = \frac{c^2u}{a^2} \quad (I) \\ \pm \frac{p(\frac{1}{4}a^2 - u^2)}{a} : \pm \frac{(\frac{1}{4}a^2 - u^2)}{u} = \frac{pu}{a} \quad (II) \\ \frac{(a+x)c^2x}{a^2} : \frac{(a+x)x}{\frac{1}{2}a+x} = \frac{c^2}{2a} \mp \frac{c^2x}{a^2} \quad (III) \\ \frac{(a+x)px}{a} : \frac{(a+x)x}{\frac{1}{2}a+x} = \frac{p}{2} \mp \frac{px}{a} \quad (IV). \end{array} \right.$$

B

33. Ann.



18 Von den Tangenten, Subtangenten, &c.

33. Ann. Hier ist PN auf eine vierfache Art (15.) ausgedrückt worden, welches bey den vorigen Linien nicht nöthig gewesen, in welchen mit den Abscissen u, x nur eine Constante (a) verbunden ist, von der man bey allen Regelschnitten Gebrauch machen kann. Diese vier Werthe sind übrigens unmittelbar aus den Gleichungen der Ellipse und Hyperbel für den Scheitel und Mittelpunct hergeleitet worden, welches wegen nur gemeldeter Bequemlichkeit des PT wohl angehet. Außerdem hätte man durch bloße Substitution der gehörigen Buchstaben aus den Gleichungen $c^2 = ap$; (Alg. 366. 399.) $u = \frac{1}{2}a \mp x$ (Alg. 367. 402.) aus einem gefundenen Werthe die übrigen herleiten können. Jeder Werth für die Ellipse dieser und aller folgenden Linien lässt sich sogleich auf den Cirkel anwenden, wenn man in ihm $a = c = p$ setzt: (Alg. 372.) welches ich hier einmal für allemal erinnern will. Der Ausdruck der vorher berechneten (16 — 28) Linien, ist also für die Ellipse und den Cirkel einerley.

34. Zus. 1. Für $a = \infty$ ist $PN = \frac{1}{2}p$, oder die Subnormale in der Parabel dem halben Parameter gleich und also beständig und unveränderlich. Folglich ist die Subnormale dem halben Parameter gleich in der Parabel, kleiner in der Ellipse und grösser in der Hyperbel.

35. Zus. 2. Weil $PN = \frac{pu}{a}$ für die Ellipse und Hyperbel einerley Zeichen hat: so schliesst man mit Recht, daß beyde Linien, bey einerley Axe und Parameter, und für gleich grosse Abscissen aus dem Mittelpuncke, einerley Subnormalen der Größe und Lage nach haben müssen. Nun kann aber kein u in der Ellipse grösser (Alg. 375.) und in der Hyperbel kleiner (Alg. 401.) als $\frac{1}{2}a$ seyn, und ist also der einzige Fall der Gleichheit für $u = \frac{1}{2}a$, wo alsdenn in beyden Fällen $PN = \frac{1}{2}p$, wie in der Parabel.

36. Zus.

36. Zus. 3. Wenn man auch in der Parabel einen Mittelpunct C annehmen wollte, von welchem man eine Abscisse CP = u rechnete: so würde derselbe wie in den beyden andern Sectionen gleichfalls in der Mitte der unendlich großen Are (a) liegen, also $u = \frac{1}{2}a \mp x$ seyn, nachdem man die Parabel als eine Ellipse oder Hyperbel ansehen wollte. Nach gehöriger Substitution müßte man sobann $a = \infty$ sehen, und so wäre $\frac{pu}{a} = \frac{p}{a}(\frac{1}{2}a \mp x) = \frac{\frac{1}{2}p\infty}{\infty} \mp \frac{px}{\infty} = \frac{1}{2}p = PN$ wie (34).

37. Zus. 4. Für $u = \infty$ ist in der Hyperbel $PN = \infty$; für $u = 0$ ist in der Ellipse $PN = 0$, aber $PT = \infty$ (24). Eben dieses folgte aus der Proportion $PT(\infty) : PM(\frac{1}{2}c) = PM(\frac{1}{2}c) : PN = \frac{c^2}{4\infty} = 0$.

In $PM^2 = PT \cdot PN$ kann also für ein endliches PM der eine Factor unendlich klein, der andere unendlich groß werden, und doch beyder Product endlich seyn. Der gleichen Fälle kommen sehr oft in trigonometrischen Rechnungen vor. Ein Beispiel hiervon giebt Alg. 422. X. und die Gleichung $xy = \alpha^2$, für die Hyperbel.

38. Zus. 5. Aus $\frac{pu}{a} = PN$ folgt endlich, daß die

Subnormale die vierte Proportionale zu der großen Are, dem Parameter und der Abscisse aus dem Mittelpuncte sey.

39. Zus. 6. Eine ähnliche Regel für die Subnormale, wie die Slutische für die Subtangente (21) ließe sich aus letzterer folgendergestalt herleiten. Man

20 Von den Tangenten, Subtangenten, &c.

sehe $PT = \frac{Y}{X}$ (wo Y den Zähler, so wie X den Nenner

des Slutischen Ausdrucks der Subtangente bedeuten mag)

so ist $PT \left[\frac{Y}{X} \right] : PM[y] = PM[y] : PN = \frac{XY^2}{Y}$

$= \frac{X}{Yy^{-2}}$. Also (21.) die Subnormale einem Bruche

gleich, dessen Zähler aus allen mit den zugehörigen Exponenten multiplizirten, sodann durch x dividirten, aber mit den entgegengesetzten Zeichen geschriebenen Gliedern von x (der Abscisse); der Nenner aus allen, mit ihren Zeichen in die Exponenten multiplizirten, sodann durch y^2 dividirten Gliedern von y (der Ordinate) besteht. Es versteht sich, daß auch hier, wie dort, die Zeichen sich auf die zuvor auf Null reducirete Gleichung beziehen, und die Glieder, die kein x oder y haben, ganz wegfallen.

Expl. Für die Gleichung (21) wäre die Subnormale $PN = \frac{n\beta x^{n-1} + h\gamma y^k x^{h-1}}{m y^{m-2} - k\gamma x^h y^{k-2}}$ also, nach dem dertigen Werthe der Buchstaben, für die Ellipse und Hyp.

$$\text{perbel: } PN = \frac{px^0 + \frac{2py^0x}{a}}{2y^0} = \frac{p}{2} + \frac{px}{a} \quad (32.)$$

IV.) u. s. w.

40. $AN = PN + AP$ also (32. und Alg. 367. 402.)

$AN =$

$$\frac{c^2 u}{a^2} \pm \left(\frac{a}{2} - u \right) = \frac{c^2 u \pm \frac{1}{2} a^3 \mp a^2 u}{a^2}$$

$$= \frac{c^2 u \pm a^2 (\frac{1}{2} a - u)}{a^2} \quad (\text{I})$$

$$\frac{p u}{a} \pm \left(\frac{1}{2} a - u \right) = \frac{p u \pm \frac{1}{2} a^3 \mp a u}{a}$$

$$= \frac{p u \pm a (\frac{1}{2} a - u)}{a} \quad (\text{II})$$

$$\begin{aligned} \text{AN} &= \frac{c^2}{2a} \mp \frac{c^2 x}{a^2} + x = \frac{\frac{1}{2} a c^2 \mp c^2 x + a^2 x}{a^2} \\ &= \frac{a^2 x + c^2 (\frac{1}{2} a \mp x)}{a^2} \quad (\text{III}) \\ &= \frac{\frac{1}{2} a p \mp p x + a x}{a} \\ &= \frac{a x + p (\frac{1}{2} a \mp x)}{a} \quad (\text{IV}) \end{aligned}$$

41. Zus. 1. Für $a = \infty$ fällt das Glied $\mp \frac{p x}{a}$ ganz

weg, und bleibt für die Parabel $\text{AN} = \frac{p}{2} + x$. Für $x = \frac{1}{2} a$ ist in der Ellipse $\text{AN} = \frac{1}{2} a = \text{AC}$, weil alsdenn der Punct N in C fällt.

42. Zus. 2. Weil $\text{AN} = \frac{1}{2} p + \frac{(a \mp p)x}{a}$, und in der Parabel $= \frac{1}{2} p + x$, so ist für $x = 0$, AN überall $= \frac{1}{2} p$. Auch ist klar, daß in der Hyperbel und Parabel AN immer größer wird, jemehr x wächst, und für ein unendliches x auch unendlich werden kann. So kann

22 Von den Tangenten, Subtangenten, &c.

auch der Punct N auf der Axe niemals zwischen den Scheitel und den nächsten Brennpunct fallen, sondern allemal über denselben hinaus.

43. Aufg. 5. Einen Ausdruck für die Normale MN zu finden.

Aufl. In dem rechtwinkligen Triangel MPN ist $NM^2 = PM^2 + PN^2$, also (32 u. Alg. 368. 402.)

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{\pm \frac{1}{4}a^2c^2 + c^2u^2}{a^2} + \frac{c^4u^2}{a^4} \right. \\
 & = \frac{\pm \frac{1}{4}a^4c^2 + a^2c^2u^2 + c^4u^2}{a^4} \\
 & = \frac{c^2(c^2u^2 \pm a^2[\frac{1}{4}a^2 - u^2])}{a^4} \quad (\text{I}) \\
 \\
 & \left| \frac{\pm \frac{1}{4}a^2p + pu^2}{a} + \frac{p^2u^2}{a^2} \right. \\
 & = \frac{\pm \frac{1}{4}a^3p + apu^2 + p^2u^2}{a^2} \\
 & = \frac{p(pu^2 \pm a[\frac{1}{4}a^2 - u^2])}{a^2} \quad (\text{II}) \\
 \\
 & \boxed{MN^2 = } \\
 & \left| \frac{ac^2x \mp c^2x^2}{a^2} + \left(\frac{c^2}{2a} \mp \frac{c^2x}{a^2}\right)^2 \right. \\
 & = \frac{a^3c^2x \mp a^2c^2x^2 + \frac{1}{4}a^2c^4 \mp ac^4x + c^4x^2}{a^4} \\
 & = \frac{c^2(c^2[\frac{1}{2}a \mp x]^2 + a^2x[a \mp x])}{a^4} \quad (\text{III})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{apx + px^2}{a} + \left(\frac{p}{2} + \frac{px}{a} \right)^2 \\
 NM^2 = & \frac{a^2 px + apx^2 + \frac{1}{4}a^2 p^2 + ap^2 x + p^2 x^2}{a^2} \\
 & = \frac{p(p[\frac{1}{2}a + x]^2 + ax[a + x])}{a^2} \quad (IV)
 \end{aligned}$$

44. Zus. 1. Für $a = \infty$ ist $MN^2 = \frac{1}{4}p^2 + px = \frac{p(p+4x)}{4}$ in der Parabel; also $NM = \frac{1}{2}\sqrt{p(p+4x)}$.

45. Zus. 2. Für $x = 0$ ist in allen Regelschnitten $NM^2 = \frac{1}{4}p^2$ oder $NM = \frac{1}{2}p$. Eben das erfolgt, wenn man für die Ellipse oder Hyperbel $x = \pm a$ setzt. Setzt man aber für die erstere $x = \frac{1}{2}a$, so kommt $NM^2 = \frac{a^4 e^2}{4a^4}$ also $NM = \frac{1}{2}c$. Hieraus ist klar:

1) Dass die Normale für eine unendlich kleine Abszisse in allen Regelschnitten einerley, und nie kleiner als die Hälfte des Parameters seyn kann; ingleichen, dass die Normale, wenigstens in der Parabel und Hyperbel, beständig wächst, wenn x wächst, so dass für $x = \infty$ die Normale selbst in beyden unendlich wird.

2) Dass in der Ellipse die Normale niemals grösser als die halbe kleine Axe werden kann.

45. Aufg. 6. Einen Ausdruck für die Tangente TM zu finden.

Aufl. Weil $TM^2 = PM^2 + PT^2$, so ist (17. u. Alg. 368. 402.)

24 Von den Tangenten, Subtangenten, &c.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{+ \frac{1}{4}a^2c^2 + c^2u^2}{a^2}}{a^2} + \frac{(\frac{+ \frac{1}{4}a^2 + u^2}{u})^2}{u^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{16}a^6 - \frac{1}{2}a^4u^2 + a^2u^4 + \frac{1}{4}a^2c^2u^2 + c^2u^4}{a^2u^2} \\
 &= \frac{(a^2[\frac{1}{4}a^2 - u^2] + c^2u^2) \cdot (\frac{1}{4}a^2 - u^2)}{a^2u^2} \quad (I)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{+ \frac{1}{4}a^2p + pu^2}{a}}{a} + \frac{(\frac{+ \frac{1}{4}a^2 + u^2}{u})^2}{u^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{16}a^5 - \frac{1}{2}a^3u^2 + au^4 + \frac{1}{4}a^2pu^2 + pu^4}{au^2} \\
 &= \frac{(a[\frac{1}{4}a^2 - u^2] + pu^2) \cdot (\frac{1}{4}a^2 - u^2)}{au^2} \quad (II)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 TM^2 = & \frac{ac^2x + c^2x^2}{a^2} + \left(\frac{ax + x^2}{\frac{1}{2}a + x} \right)^2 \\
 &= \frac{ac^2x + c^2x^2}{a^2} + \frac{a^2x^2 + 2ax^3 + x^4}{\frac{1}{4}a^2 + ax + x^2} \\
 &= \frac{(c^2x[\frac{1}{2}a + x]^2 + a^2x^2[a + x])(a + x)}{a^2(\frac{1}{2}a + x)^2} \quad (III) \\
 & \frac{apx + px^2}{a} + \left(\frac{ax + x^2}{\frac{1}{2}a + x} \right)^2 \\
 &= \frac{(px[\frac{1}{2}a + x]^2 + ax^2[a + x])(a + x)}{a(\frac{1}{2}a + x)^2} \quad (IV).
 \end{aligned}$$

46. Zus. I. Wenn man $a = \infty$ setzt, bekommt man MT^2 für die Parabel. In dem ersten Theile nämlich von

von IV. bleibt nur das Glied $\frac{\infty p x}{\infty}$ und in dem Zähler des andern Theils verschwinden alle Glieder vor $\infty^2 x^2$, so wie in dem Nenner vor $\frac{1}{4} \infty^2$ und ist also $M T^2 = \frac{\infty p x}{\infty} + \frac{\infty^2 x^2}{\frac{1}{4} \infty^2} = p x + 4 x^2 = 4 A F \cdot A P + 4 A P^2$
 $(A l g . 359.) = 4 A P (A F + A P) = 4 A P \cdot F M (A l g . 360.)$

47. Zus. 2. Für $x = 0$ oder $\pm a$, kommt $M T = 0$. Eben das geschieht, wenn man in (46) $x = 0$ setzt. Also sind alle Tangenten an den Scheitelpunkten der Regelschnitte gleich Null (14. 4.), und in so fern einander gleich. Eben das würde erfolgen, wenn man in I. II. (45) $u = \frac{1}{2} a$ setzte.

48. Zus. 3. Für $u = 0$ wird $M T^2 = \frac{\frac{1}{16} a^4}{0}$, oder $M T = \infty$; also die Tangente für diese Abscisse in der Ellipse, so wie für ein unendliches u oder x in der Hyperbel oder Parabel unendlich.

49. Aufg. 7. Einen Ausdruck für einen aus dem Scheitel A auf der Hauptaxe bis an die Tangente TM aufgerichteten Perpendikel AE zu finden.

Aufl. Weil $T P M \sim T A E$ so ist $T P^2 : P M^2 = T A^2 : A E^2$, oder (17. 25. u. Alg. 368. 402.)

$$\frac{[\pm \frac{1}{4} a^2 \mp u^2]^2}{u^2} : \frac{[c^2 (\pm \frac{1}{4} a^2 \mp u^2)]}{a^2} \\ = \frac{[a^2 (a - 2u)^2]}{16 u^2} : A E^2$$

und $\pm \frac{1}{4} a^2 \mp u^2$ aus den beiden ersten Gliedern, u^2 aus dem Nenner des ersten und dritten, und a^2 aus dem

26 Von den Tangenten, Subtangenten, &c.

Menner des zweyten und Zähler des dritten Gliedes herausgestrichen

$$\pm (\frac{1}{4}a^2 - u^2) : c^2 = \frac{(a - 2u)^2}{4 \cdot 4} : AE^2; \text{ also}$$

$$AE^2 = \frac{c^2(a - 2u)^2}{\pm 4 \cdot 4(\frac{1}{4}a^2 - u^2)} = \frac{\pm c^2(a - 2u)^2}{4(a^2 - 4u^2)} =$$

$$\frac{\pm c^2(a - 2u)(a - 2u)}{4(a - 2u)(a + 2u)} = \frac{\pm c^2(a - 2u)}{4(a + 2u)}$$

$$= \frac{\pm c^2[\frac{1}{2}a - u]}{4[\frac{1}{2}a + u]} \quad (\text{I}) \text{ oder, } ap \text{ statt } c^2 \text{ substituiert,}$$

$$AE^2 = \frac{\pm ap(\frac{1}{2}a - u)}{4(\frac{1}{2}a + u)} \quad (\text{II})$$

Oder, $\frac{1}{2}a \mp x$ statt u in I. II. substituiert,

$$AE^2 = \frac{\pm c^2 \cdot \pm x}{4(a \mp x)} = \frac{c^2 x}{4(a \mp x)} \quad (\text{III})$$

$$= \frac{apx}{4(a \mp x)} \quad (\text{IV})$$

50. Zus. 1. Für $a = \infty$, kommt aus IV. für die Parabel $AE^2 = \frac{\infty px}{4\infty} = \frac{px}{4} = \frac{y^2}{4}$ oder $AE = \frac{1}{2}y$, der halben Ordinate gleich.

51. Zus. 2. In dem Ausdrucke $AE^2 = \pm \frac{c^2(a - 2u)^2}{4(a^2 - 4u^2)}$ (49) in welchem das obere Zeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel gilt, sehe man

man in $\frac{+c^2(a-2u)^2}{4(a^2-4u^2)}$ den Werth der Abscisse für den

Brennpunct, also $u = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{2}$; so kommt für die

$$\text{Ellipse } AE^2 = \frac{c^2(a-\sqrt{a^2-c^2})^2}{4c^2} = \\ \frac{(a-\sqrt{a^2-c^2})^2}{4} \text{ und } AE = \pm \frac{(a-\sqrt{a^2-c^2})}{2}.$$

Eben so kommt, in $\frac{-c^2(a-2u)^2}{4(a^2-4u^2)}$ für die Hyperbel,

$$\text{bel, } u = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{2} \text{ gesetzt,}$$

$$AE^2 = \frac{-c^2(a-\sqrt{a^2+c^2})^2}{4.-c^2} = \frac{(a-\sqrt{a^2+c^2})^2}{4}$$

$$\text{und } AE = \pm \frac{(a-\sqrt{a^2+c^2})}{2}. \text{ Nun muß man, in be-}$$

den Fällen, für ein positives AE die obern, für ein negatives, die untern Zeichen brauchen, weil in der Ellipse niemals $u > \frac{1}{2}a$, so wie in der Hyperbel niemals $u < \frac{1}{2}a$ seyn kann; dieses gibt für die Ellipse und Hyperbel, das positive, der Abscisse CF zugehörige $AE = \pm \frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2+c^2})$ und das negative, der Abscisse Cf zu-

gehörige $AE = \mp \frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2+c^2})$. In der Parabel, wo $AE = \frac{1}{2}y$ (50) kommt für das y aus dem Brennpuncte, welches $= \frac{1}{2}p$ (Alg. 358.) $AE = \frac{1}{4}p$. Wenn man die solchergestalt für ein positives AE in der

Para-

Parabel, Ellipse und Hyperbel gefundenen Werthe:

$\frac{1}{4}p; \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}; \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} - \frac{1}{2}a$; genauer betrachtet, so findet man, daß sie insgesammt = AF sind, der Weite des nächsten Brennpunctes vom Scheitel A (Alg. 359. 382. 405.) Eine durch den Punct T, in welchem die zu diesem AE zugehörige Tangente die Axe schneidet, gezogene auf dieser Axe senkrechte Linie, wird die Directrix des Regelschnitts genannt. Die Ursache dieser Benennung wird unten gegeben werden.

52. Zus. 2. Für $u = \frac{1}{2}a$ oder $x = 0$ wird durchgehends $AE = 0$; daß also AE für eine Tangente am Scheitel bey allen drey Regelschnitten verschwindet. Für $x = \pm a$ wird in der Ellipse und Hyperbel $AE = \pm \infty$; welches also verstanden werden muß. Ein AE für einen gewissen Punct wird allemal von der unbestimmten (13) geometrischen Tangente GH für diesen Punct, abgeschnitten, und also der Länge und Lage nach bestimmt; wie AE von der Tangente GH (Fig. 8. 9.) Für die Abscisse $x = \pm a$ aber oder für den Punct B, fällt GH auf BH, und kann also hier kein AE von der mit ihr längst BH parallel laufenden GH, d. i. BH abgeschnitten werden, und ist also hier AE in beyden Sectionen unendlich, nur mit dem Unterschiede, daß ein solches AE in der Ellipse als $+\infty$ oberwärts, und in der Hyperbel als $-\infty$ unterwärts der Axe, oder so wie die positiven und negativen Ordinaten angenommen werden, zu liegen kommt; denn eine Tangente an einen Punct M in der entgegengesetzten (Alg. 404.) Hyperbel BM, (Fig. 9.) schneldet das negative AE unterwärts am andern Scheitel.

Zus. 4. Für $u = 0$, wird in der Ellipse (Fig. 8.) $AE^2 = \frac{1}{4}c^2$ also $AE = \frac{1}{2}c = MC$ und die Tangente GH so wie die Subtangente unendlich (48) Für die Hyperbel

$$\text{bel würde } AE^2 = -\frac{c^2}{4} \text{ und } AE = \sqrt{-\frac{c^2}{4}} =$$

$\frac{1}{2}c\sqrt{-1}$ oder unmöglich, so wie es auch für eine der gleichen Abscisse in der Hyperbel keine Ordinate, oder keinen Punct der krummen Linie giebt.

54. Zus. 5. In der Parabel und Hyperbel kann x auch unendlich werden. Für ein solches x ist im ersten (50) Falle $AE = \frac{1}{2}\sqrt{p\infty}$, also auch unendlich. In der Hyperbel hingegen (49. III.) wird $AE^2 = \frac{c^2\infty}{4\infty} = \frac{c^2}{4}$

oder $AE = \frac{1}{2}c$ der halben zweyten Axe gleich. Da nun für ein solches x die Tangente durch den Mittelpunct gehe (27. 2.) weil $CT = 0$, so darf man nur AE der halben zweyten Axe gleich machen, so wird eine Linie durch die Punkte C und E gelegt die Tangente für einen unendlich vom Scheitel entfernten Punct, d. i. die Asymptote geben. Weil aber in der Parabel für $x = \infty$ auch $AE = \frac{1}{2}\infty$, so erhellet zugleich hieraus, daß die Parabel keine Asymptote haben könne, weil man sich dieselbe in einer unendlichen Entfernung von der Axe gedenken müßte.

55. Ann. Auf eine ähnliche Art, wie die Linien (16 — 49) sind ausgedrückt worden, könnte man auch TN, CN, TE, ME und andere mehr finden, wenn man sie brauchte. In der Gleichung $y^2 = p(x + \frac{x^2}{a})$ setze man $x = AF = f$, also $y = \frac{1}{2}p$ (Alg. 358.) so kommt $p = \frac{4af + 4ff}{a}$, also ap oder $c^2 = 4f(a + f)$ und $a = \frac{c^2 \pm}{4}$

30 Von den Tangenten, Subtangenten, &c.

$\frac{c^2 + 4ff}{4f}$. Auch ist FM^2 oder $\Phi^2 = (AP - AF)^2$

$+ PM^2 = (x - f)^2 + p(x \mp \frac{x^2}{a})$ oder, den gefundenen Werth von p substituirt, $FM^2 = \left(\frac{af + (a \mp 2f)x}{a} \right)^2$,

also $\Phi = f + \frac{Fx}{a}$ (wenn man $a \mp 2f$ oder $Ff = F$ setzt)

und $f = \Phi - \frac{Fx}{a}$. Vermittelst dieser Gleichungen für

a, c, p, f, Φ kann man nun in die bereits berechneten Ausdrücke der Linien, die Werthe von AF, FM, Ff mit hineinbringen, welches in gewissen Fällen mit Vortheil geschieht, und zugleich zu erkennen giebt, wie mannichfaltig sich die Werthe dieser Linien ausdrücken lassen.

§6. Aufg. 8. Berechnung der Linien (16—49) in Beziehung auf die zweyte oder Nebenaxe.

Aufl. Für die zweyte Axe ist $u^2 = \frac{a^2}{4} \mp \frac{a^2 y^2}{c^2}$
 $= a^2 (\frac{1}{4}c^2 \mp \frac{y^2}{c^2})$, wo a, c die Haupt- und Nebenaxe,

y die Abscisse aus dem Mittelpuncke C, u die Ordinate bedeutet. Nun ist (Fig. 10. 11.)

$$PT \frac{(\pm \frac{1}{4}a^2 \mp u^2)}{u} : CT \frac{(\frac{1}{4}a^2)}{u} = PM(y) :$$

$CT = \frac{a^2 y}{4(\pm \frac{1}{4}a^2 \mp u^2)}$ oder, den Werth von u^2 substituirt, $CT = a^2 y : \frac{4a^2 y^2}{c^2} = \frac{c^2}{4y}$. Ferner sey in

der

der Ellipse z eine Abscisse, wie ap , (Fig. 10.) deren Anfang, in dem Puncte a ist, wo die kleine Axe die Ellipse schneidet, so ist $y = \frac{1}{2}c - z$ und $z = \frac{1}{2}c - y$; und wenn man auch hier einen Parameter $q = \frac{a^2}{c}$ auf der Ver-

benaxe nimmt: so ist alsdenn, $cq = a^2$, und

$$Ct = \frac{c^2}{4y} = \frac{\frac{1}{4}c^2}{y} = \frac{\frac{1}{4}c^2}{\frac{1}{2}c - z} = \frac{Ca \cdot Ca}{Cp}$$

$$pt = Ct \mp Cp = \frac{\frac{1}{4}c^2 \mp y^2}{y} = \frac{cz - z^2}{\frac{1}{2}c - z},$$

$$= \frac{(c-z)z}{\frac{1}{2}c - z} = \frac{bp \cdot ap}{Cp}$$

$$at = Ct \mp ac = \frac{\frac{1}{4}c^2 \mp \frac{1}{2}cy}{y} = \frac{\frac{1}{2}cz}{\frac{1}{2}c - z} = \frac{ac \cdot ap}{Cp}$$

$$= \frac{a^2(\frac{1}{4}c^2 \mp y^2)}{c^2} : \frac{\frac{1}{4}c^2 \mp y^2}{y}$$

$$= \frac{a^2y}{c^2} = \frac{qy}{c}$$

$$pn = \frac{pM^2}{pt} = \frac{a^2(\frac{1}{2}c - z)}{c^2} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{c} - \frac{a^2z}{c^2}$$

$$= \frac{q}{2} - \frac{qz}{c}$$

$$an = pn \pm ap = \begin{cases} \frac{a^2y}{c^2} \pm (\frac{1}{2}c - y) = \frac{qy \pm c(\frac{1}{2}c - y)}{c} \\ \frac{a^2(\frac{1}{2}c - z) + c^2z}{c^2} = \frac{q(\frac{1}{2}c - z) + cz}{c} \end{cases}$$

32 Von den Tangenten, Subtangenten, &c.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 = \frac{\frac{1}{4}a^2c^2 + a^2y^2}{c^2} + \frac{a^4y^2}{c^4} \\
 = \frac{a^2(\frac{1}{4}c^4 + [a^2 - c^2]y^2)}{c^4} \\
 = \frac{\frac{1}{4}q c^2 + q y^2}{c} + \frac{q^2 y^2}{c^2} \\
 \text{Mn}^2 \text{ d.i.} \\
 p M^2 + p n^2 = \frac{q(\frac{1}{4}c^3 + [q - c]y^2)}{c^2} \\
 = \frac{a^2(\frac{1}{4}a^2c^2 + [a^2 - c^2][z^2 - cz])}{c^4} \\
 = \frac{q(\frac{1}{4}q c^2 + [q - c][z^2 - cz])}{c^2}
 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 = \frac{\frac{1}{4}a^2c^2 + a^2y^2}{c^2} + \frac{(\frac{1}{4}c^2 + y^2)^2}{y^2} \\
 = \frac{a^2y^2(\frac{1}{4}c^2 + y^2) + c^2(\frac{1}{4}c^2 + y^2)^2}{c^2y^2} \\
 Mt^2 = pM^2 + pt^2 \\
 = \frac{(qy^2 + c[\frac{1}{4}c^2 + y^2])(\frac{1}{4}c^2 + y^2)}{cy^2} \\
 = \frac{a^2z(c-z)}{c^2} + \frac{z^2(c-z)^2}{(\frac{1}{2}c-z)^2} \\
 = \frac{qz(c-z)}{c} + \frac{z^2(c-z)^2}{(\frac{1}{2}c-z)^2} \\
 ae^2 =
 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{aligned}
 &= \frac{a^2(\frac{1}{4}c^2 + y^2)}{c^2} \cdot \frac{(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}cy)^2}{y^2}; \\
 &\quad \frac{(\frac{1}{4}c^2 + y^2)^2}{y^2} \\
 ae^2 = \frac{pM^2 \cdot at^2}{pt^2} &= \frac{a^2(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}cy)^2}{c^2(\frac{1}{4}c^2 + y^2)} = \frac{\frac{1}{4}a^2(\frac{1}{2}c + y)^2}{\frac{1}{4}c^2 + y^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{4}cq(\frac{1}{2}c + y)^2}{\frac{1}{4}c^2 + y^2}; \text{ oder, f\"ur die}
 \end{aligned} \right|$$

Ellipse allein

$$ae^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2(\frac{1}{2}c - y)}{\frac{1}{2}c + y} = \frac{\frac{1}{4}a^2z}{c - z} = \frac{\frac{1}{4}cqz}{c - z}; \text{ welche}$$

Verkürzung bey der Ellipse, wegen der Differenz der Quadrate $\frac{1}{4}c^2 - y^2$, nicht aber bey der Hyperbel, geschahen kann.

57. Zus. 1. Viele von den hier ausgedruckten Linien haben einerley Gestalt mit den vorhergefundenen (16-49) gleichnamigen f\"ur die Hauptaxe, nur daß die dortigen a, c, p, u , hier mit e, a, q, y , verwechselt werden. In gewissen F\"allen ist das a n der Hyperbel nicht, wie hier angenommen worden, $= pn - ap$, sondern $= pn + ap$; welches aber den algebraischen Ausdruck von an nicht \"andert. Die Werthe, in denen z vorkommt, gelten nur f\"ur die Ellipse, nicht f\"ur die Hyperbel, f\"ur welche sie wenig Nutzen haben, und auch sehr unbestimmt sind, da ein y in der letztern bald gr\"oßer bald kleiner ist als $\frac{1}{2}c$.

58. Zus. 2. Es k\"onnen hier eben so, wie bey den Ausdr\"ucken derselben Linien f\"ur die Hauptaxe geschehen ist, die Werthe dieser Linien f\"ur gewisse bestimmte y oder z gefun-

gesunden, oder auch diese Linien gewissen Größen gleich gesetzt und hernach die Werthe für y oder z gesucht werden. Wenn man z. B. wissen wollte, wie groß in der Hyperbel (Fig. 11.) für $Ct = \frac{1}{2}c$, die Abscisse y wäre, so sehe man Ct oder $\frac{c^2}{4y} = \frac{1}{2}c$, so kommt $2cy = c^2$,

also $y = \frac{1}{2}c$; daß also der Punct t hier auf a oder b , die Endpunkte der zweyten Axe siele, nachdem man die Abscisse rechts oder linker Hand von C genommen hätte. In diesem Falle käme at oder $bt = c$, für die Abscisse Cp . Da nun aber $Cp = PM$, so findet man auch, was für eine Abscisse CP auf der ersten oder Hauptaxe zu dem Puncte M gehört, der auf der zweyten Axe $Cp = \frac{1}{2}c$ macht; denn $\frac{1}{2}c$ in die Hauptgleichung (Alg. 402.) für

PM gesetzt, bleibt $\frac{1}{4}c^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}$, also CP oder

$u = \frac{a}{\sqrt{2}}$ Wollte man suchen, in welchem Puncte,

d. i. bey welcher Abscisse zwei Linien gleich groß sind, z. B. wenn $pt = pn$ so sehe man nur ihre Werthe einander

gleich, so ist (56) $\frac{\frac{1}{4}c^2 + y^2}{y} = \frac{a^2 y}{c^2}$, also $(a^2 \pm c^2)$.

$y^2 = \frac{c^4}{4}$ und $y = \frac{c^2}{2\sqrt{a^2 \pm c^2}}$; und so in andern

Fällen, die eben keine Schwürigkeit haben.

Anm. Was bis hieher von Erfindung der Tangenten und anderer damit verbundenen Linien gelehrt worden ist, bezieht sich, ausser (20.21.) nur auf die Regelschritte; und so kann man immer aus der Natur und den Eigenschaften einer gegebenen Linie einen Weg finden, auf welchem sich die

Tan-

Tangenten und übrigen Linien derselben geometrisch bestimmen, oder ihrer Länge und Lage nach algebraisch ausdrücken lassen. Die bey einzelnen Fällen vorkommenden Schwierigkeiten aber, haben die Mathematiker veranlaßt, auf eine allgemeine Methode zu denken, die sich auf jede gegebene Linie erstreckt. Eine solche Methode für die algebraischen Linien hat Cartesius zuerst gegeben, mit welcher er auch sehr zufrieden gewesen ist, daß er sie ihrer Allgemeinheit wegen, für eine der schönsten und nützlichsten Erfindungen gehalten hat, die iemals vor ihm in der Geometrie gemacht worden sind. Diese Methode ist nachher verschiedentlich, theils verbessert, theils erweitert, theils aber auch durch andere verdunkelt worden. Hierher gehören die Bemühungen eines Pascal, Fermat, Slusius, des großen Huygens und des nicht minder vorzüglichen Isaac Barrow's, dessen Regel für die Tangenten, mit der Leibnizischen Differenzialformel dafür, bis auf die Bezeichnung vollkommen übereinkommt. Die Bequemlichkeit der Leibnizischen Bezeichnung aber, und des dafür erfundenen Calculs, hat die Erfindung der Tangenten, nicht nur an sich sehr erleichtert, sondern auch so allgemein gemacht, daß sich dieselbe auf transzendentische Linien sowohl, als auf algebraische erstreckt, und durch keine Brüche, Irrationalitäten oder andere Hindernisse der vorigen Methoden aufgehalten wird. Die allgemeine Vorschrift, aus der gegebenen Gleichung einer Linie, die Tangente, Subtangente u. s. w. zu finden, wird Methodus Tangentium directa genannt. Ihr ist die Methodus Tangentium inversa gerade entgegengestellt, welche aus gegebenen Tangenten oder andern damit verwandten Linien, die Natur und Construction der krummen Linie, welcher dieselben zugehören, finden lehrt. Die letztere ist eine Erfindung der neuen Mezzkünstler, und wird in der Integralrechnung, so wie die erste in der Differenzialrechnung, am allgemeinsten und vollständigsten abgehandelt.

II.

Von den
Quadraturen der Regelschnitte
 und den
 natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen.

60. Erklärung.

Eine krummliniche ebene Fläche wird diejenige genannt, deren Umsang (perimeter) entweder ganz oder nur zum Theil aus einer oder mehrern krummen Linien oder Bogen besteht. Die Quadratur dieser Fläche wird gefunden, wenn man das Verhältniß derselben zu irgend einer geradlinichten ebenen Figur bestimmen, oder ihre Fläche in einem angeblichen Quadrate ausdrücken kann. Die Quadratur heißt bestimmt (definita) wenn man von dieser Ebene nur einen oder etliche bestimmte Theile, oder auch, wie bey den Ovalen und andern in sich selbst zurücklaufenden Linien, die ganze Fläche quadriert. Die unbestimmte Quadratur hingegen (indefinita) fordere den Inhalt eines jeden zwischen den Bogen einer krummen Linie und einer oder mehrern, nach Gefallen gezogenen geraden oder andern krummen Linien enthaltenen Raumes. Die Unmöglichkeit der letztern ist vorlängst erwiesen.

61. Lehrs. A b c d e sey ein Bogen einer krummen Linie, der mit seinen senkrechten Coordinaten AE; Ee; den Raum AEecA begränzt. In denselben schreibe man so viel Parallelogrammen DF, CG, BH &c als man will, deren Höhen Dd, Cc, Bb &c. insgesamt, über den gleichen Grundlinien ED, DC, CB

CB &c. auf der Abscisse, der Ordinate Ee parallel liegen; und ergänze sodann die Parallelogrammen Ff, Gg, Hh &c. Wenn man nun die Grundlinien aller Rechtecke so verkleinert, daß ihre Höhen, näher als jede angebliche Größe beträgt, an einander rücken, und also die Anzahl dieser Parallelogrammen jede endliche Zahl übersteigt: so sind die letzten Verhältnisse, in welchen die eingeschriebene Figur EFdGcHbBE, die umgeschriebene Ee fd gch b i AE, und die Kreummliniche Figur Ab cdeEA gegen einander stehen, Verhältnisse der Gleichheit.

Beweis. Der ein- und umgeschriebenen Figuren Unterschied, ist die Summe der Parallelogrammen Bi, Hh, Gg, Ff, oder, wegen der gleichen Grundlinien aller, das Parallelogramm EDfe, das mit jenen einerlei Grundlinie, und die Summe aller ihrer Höhen zu Seitenlinien hat. Da man nun bey diesen Rechtecken die Grundlinien so klein annehmen darf, als man nur will: so kann dadurch auch des Streifens EDfe Breite ED, ohne Ende vermindert werden, dergestalt, daß er endlich kleiner werden kann, als jede gegebene Fläche, wenn nur seine Grundlinie oder Breite, nach der Voraussetzung, unter alle Gränzen verkleinert wird. Also werden auf den Fall, wenn dieses Rechteckes Breite verschwindet, die eins- und umgeschriebene geradlinichten, und um so mehr die dazwischen fallende Kreummliniche ebene Figur zueinander gleich.

So läßt sich auch die Gleichheit dieser drey Figuren erweisen, wenn schon die unendlich kleinen Grundlinien dieser Rechtecke einander nicht gleich wären; wie Newton im dritten Lehnsatz seiner Princ. Phil. Nat. gezeigt hat. Der hier erwiesene Satz ist dessen zweyter Lehnsatz.

62. Zus. Das Rechteck EDfe wird das Element der Kreummlinichen ebenen Fläche AceEA genannt,

und ist von ihr ein Unendlichkleines der ersten Ordnung. Eben so ist efdF ein Element des unendlich kleinen Rechtecks EDFe, oder ein Unendlichkleines der zweyten Ordnung, welches gegen das erste Element eben so verschwindet, wie dieses gegen die ganze Fläche. Kann man nun ein solches veränderliches Element allgemein ausdrücken, und die Menge aller auf der Abscisse AE neben einander stehenden Elemente summiren: so findet man hierdurch, mit gehöriger Bestimmung der dagehörenden veränderlichen Größen, den Inhalt der krummlinichen ebenen Fläche AceEA. Hierzu dient die 9te und 11te Aufgabe.

63. Aufg. 9. Die Summe der Potenzen der von 1 an bis n in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen zu finden.

Aufl. Wenn n die Anzahl der zu summirenden Glieder, s_n^o die Summe von so viel Einheiten als die Zahl n anzeigt, s_n^1 die Summe der von 1 bis n auf einander folgenden natürlichen Zahlen, und s_n^2 , s_n^3 , s_n^4 &c. die Summe der Quadrate, der Würfel, der Biquadrate u.s.w. eben derselben Zahlen bedeutet, so ist alsdenn:

$$\begin{aligned}
 1^o + 2^o + 3^o + 4^o + 5^o + 6^o + 7^o + 8^o + 9^o &\dots + n^o = s_n^o \\
 2^o + 3^o + 4^o + 5^o + 6^o + 7^o + 8^o + 9^o &\dots + n^o \\
 3^o + 4^o + 5^o + 6^o + 7^o + 8^o + 9^o &\dots + n^o \\
 4^o + 5^o + 6^o + 7^o + 8^o + 9^o &\dots + n^o \\
 5^o + 6^o + 7^o + 8^o + 9^o &\dots + n^o \\
 6^o + 7^o + 8^o + 9^o &\dots + n^o \\
 7^o + 8^o + 9^o &\dots + n^o \\
 8^o + 9^o &\dots + n^o \\
 9^o &\dots + n^o \\
 * * * * & + n^o \\
 t(n-1)^o + n^o & \\
 n^o &
 \end{aligned}$$

$$1^x + 2^x + 3^x + 4^x + 5^x + 6^x + 7^x + 8^x + 9^x \dots + (n-1)^x + n^x$$

und

$$\text{und } 1+2^x+3^x+4^x+\dots+(n-1)^x+n^x = \text{sn}^x$$

$$2^x+3^x+4^x+\dots+(n-1)^x+n^x$$

$$3^x+4^x+\dots+(n-1)^x+n^x$$

$$4^x+5^x+\dots+(n-1)^x+n^x$$

$$5^x+6^x+\dots+(n-1)^x+n^x$$

$$6^x+7^x+\dots+(n-1)^x+n^x$$

$$7^x+8^x+\dots+(n-1)^x+n^x$$

$$8^x+9^x+\dots+(n-1)^x+n^x$$

$$9^x+\dots+(n-1)^x+n^x$$

* * * *

$$+(n-1)^x+n^x$$

$$n^x$$

$$\text{und } 1+2^2+3^2+4^2+\dots+(n-1)^2+n^2 = \text{sn}^2$$

$$2^2+3^2+4^2+\dots+(n-1)^2+n^2$$

$$3^2+4^2+\dots+(n-1)^2+n^2$$

$$4^2+5^2+\dots+(n-1)^2+n^2$$

$$5^2+6^2+\dots+(n-1)^2+n^2$$

$$6^2+7^2+\dots+(n-1)^2+n^2$$

$$7^2+8^2+\dots+(n-1)^2+n^2$$

$$8^2+9^2+\dots+(n-1)^2+n^2$$

$$9^2+\dots+(n-1)^2+n^2$$

* * * *

$$+(n-1)^2+n^2$$

$$n^2$$

$$\text{und } 1+2^3+3^3+4^3+\dots+(n-1)^3+n^3 = \text{sn}^3$$

&c. &c. &c. &c.

Vermittelst dieser Zahlreihen werden die höhern Potenzen der natürlichen Zahlen durchgängig aus den vorhergehenden niedrigern gefolgert, welches sehr bequem

ist, die Summe der verlangten Potenzen daraus herzuleiten.

Dass $1 + 2^{\circ} + 3^{\circ} + 4^{\circ} + 5^{\circ} \dots + n^{\circ} = s_n{}^{\circ} = n$, ist an und für sich klar. Hieraus aber lässt sich nun s_n' , und aus diesem und dem ersten, s_n'' , und so ferner s_n''' , s_n^{iv} &c. auf folgende Art finden:

Man nehme noch einmal die erste Zahlenreihe vor, und füge derselben der Horizontalreihen Ergänzungen = S° , unter dem Striche mit bey. Wenn also:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 + 2^{\circ} + 3^{\circ} + 4^{\circ} + 5^{\circ} + 6^{\circ} & \dots & + n^{\circ} & = & s_n{}^{\circ} & = & n \\ \cancel{1 + 2^{\circ} + 3^{\circ} + 4^{\circ} + 5^{\circ} + 6^{\circ}} & \dots & + n^{\circ} & & & & \\ 1 + 2^{\circ} + 3^{\circ} + 4^{\circ} + 5^{\circ} + 6^{\circ} & \dots & + n^{\circ} & & & & \\ 1 + 2^{\circ} + 3^{\circ} + 4^{\circ} + 5^{\circ} + 6^{\circ} & \dots & + n^{\circ} & & & & \\ 1 + 2^{\circ} + 3^{\circ} + 4^{\circ} + 5^{\circ} + 6^{\circ} & \dots & + n^{\circ} & & & & \\ 1 + 2^{\circ} + 3^{\circ} + 4^{\circ} + 5^{\circ} + 6^{\circ} & \dots & + n^{\circ} & & & & \\ 1 + 2^{\circ} + 3^{\circ} + 4^{\circ} + 5^{\circ} + 6^{\circ} & \dots & + n^{\circ} & & & & \\ * & * & * & * & * & * & * & + n^{\circ} \\ * & * & * & * & * & * & + (n-1)^{\circ} & + n^{\circ} \end{array}$$

so ist $S^{\circ} + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \dots + (n-1) + n - S^{\circ} + s_n'$

Da es nun allemal so viel Horizontalreihen bleibt, als n Einheiten hat, so ist $n \cdot s_n{}^{\circ}$ oder $n^2 = S^{\circ} + s_n'$; also s_n' gegeben, wenn man S° ausdrücken kann. Nun ist aber die Summe aller Glieder unter dem Striche, oder $S^{\circ} = 1 + (1+2^{\circ}) + (1+2^{\circ}+3^{\circ}) \dots + (1+2^{\circ}+3^{\circ}+4^{\circ}+5^{\circ} \dots + [n-1]^{\circ}) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \dots + (n-1) = s_n' - n$; also $n^2 = s_n' - n + s_n'$, oder $2s_n' = n^2 + n$ und $s_n' =$

$sn' = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = (n+1) \cdot \frac{1}{2} n$, der Summe des ersten und letzten Gliedes in die halbe Anzahl der Glieder (Alg. 85.) In der folgenden Reihe ist auf eben die Art, mit den unter dem Striche beygesfügten Ergänzungen $= S'$;

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \dots + n = sn' = \frac{n^2+n}{2};$$

~~$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \dots + n$~~

~~$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \dots + n$~~

~~$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \dots + n$~~

~~$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \dots + n$~~

~~$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \dots + n$~~

~~$* * * * * * * * + n$~~

~~$* * * * * * * * + (n-1) + n$~~

$$\text{und } S' + 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 \dots + (n-1)^2 + n^2 = S' + sn'';$$

also $n \cdot sn' = sn'' + S'$, und $S' = 1 + (1+2) + (1+2+3) \dots + (1+2+3+4+5 \dots + [n-1])$ d. i. wenn man die einzelnen Ergänzungen der auf einander folgenden Horizontalreihen, als so viele Reihen betrachtet, die man einzeln summirt, (wo man also in dem Werthe von $sn' = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$; das n nach und nach $= 1; = 2; \dots$

$$= n-1$$
 sehen muß,) $S' = (\frac{1^2}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{2^2}{2} + \frac{2}{2})$

$$+ (\frac{3^2}{2} + \frac{3}{2}) \dots + (\frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{2})$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \dots + [n-1]^2}{2} +$$

$$\frac{1+2+3+4\dots+(n-1)}{2} = \frac{sn'' - n^2}{2} + \frac{sn' - n}{2},$$

$$\text{also } n \cdot sn' \text{ oder } sn'' + S = sn'' + \frac{sn'' - n^2}{2} + \frac{sn' - n}{2},$$

$$\text{oder } sn'' = \frac{2 \cdot n \cdot sn' + n^2 - \frac{2}{2}(sn' - n)}{2+1} = \frac{n^3}{3} +$$

$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n}{6} (n+1)(2n+1)$ nach dem aus dem vorhergehenden für sn' gesundenen und hier substituirten Werthe.

$$\text{Eben so wäre } n \cdot sn'' = sn'' + S'', \text{ und } S'' = 1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) \dots + (1^2 + 2^2 + 3^2 \dots$$

$$+ [n-1]^2) = \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + \frac{2}{6} \right)$$

$$+ \left(\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + \frac{3}{6} \right) \dots + \left(\frac{[n-1]^3}{3} + \frac{[n-1]^2}{2} + \frac{n-1}{6} \right)$$

$$= \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 \dots + [n-1]^3}{3} + \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 \dots + (n-1)^2}{2}$$

$$+ \frac{1+2+3\dots+[n-1]}{6} = \frac{sn''' - n^3}{3} + \frac{sn'' - n^2}{2}$$

+ $\frac{sn' - n}{6}$; also, wenn man die Divisoren der einzelnen Glieder der jedesmaligen vorhergehenden Potenz [hier 3, 2, 6] nun $\alpha, \beta, \gamma \&c.$ setzt:

$n \cdot sn'$

$$n s n'' \text{ oder } s n'' + S'' = s n'' + \frac{s n'' - n^2}{\alpha} + \frac{s n'' - n^2}{\beta}$$

$$+ \frac{s n' - n}{\gamma} \text{ oder}$$

$$s n'' = \frac{\alpha \cdot n s n'' + n^2 - \frac{\alpha}{\beta} (s n'' - n^2) - \frac{\alpha}{\gamma} (s n' - n)}{\alpha + 1} =$$

$$= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \text{ wenn man}$$

die vorhergefundenen Werthe von $s n''$ und $s n'$ substituiert.

64. Zus. I. Um das hieraus fließende Gesetz für die höhern Potenzen aus den vorhergehenden, desto leichter übersehen zu können, will ich hier die Ausdrückungen der erstern auf einander folgenden Potenzreihen neben einander sehen. Es ist demnach

$$s n^0 = n, \text{ oder } \frac{n}{1}; \text{ Hieraus folgt:}$$

$$n s n^0 = s n' + S^0 = s n' + \frac{s n' - n}{\alpha}; \text{ oder}$$

$$s n' = \frac{\alpha \cdot n s n^0 + n}{\alpha + 1} = \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} = (n+1) \cdot \frac{1}{2} n \text{ folglich,}$$

$$n s n' = s n'' + S' = s n'' + \frac{s n'' - n^2}{\alpha} + \frac{s n' - n}{\beta} \text{ und}$$

$$\alpha \cdot n s n' + n^2 = \frac{\alpha}{\beta} (s n' - n)$$

$$s n'' = \frac{-1}{\alpha + 1}$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \text{ also}$$

$$nf_{n''} = f_{n''} + S'' = f_{n''} + \frac{f_{n'''}-n^3}{\alpha}$$

$$+ \frac{f_{n''}-n^2}{\beta} + \frac{f_{n'}-n}{\gamma}; \text{ und}$$

$$\alpha \cdot n f_{n''} + n^3 - \frac{\alpha}{\beta} (f_{n''}-n^2) - \frac{\alpha}{\gamma} (f_{n'}-n)$$

$$f_{n''} = \frac{\dots}{\alpha+1}$$

$$= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{4} (n+1)^2; \text{ also}$$

$$nf_{n''} = f_{n^{IV}} + S'' = f_{n^{IV}} + \frac{f_{n^{IV}}-n^4}{\alpha} + \frac{f_{n'''}-n^3}{\beta} \\ + \frac{f_{n''}-n^2}{\gamma}; \text{ und}$$

$$\alpha \cdot n f_{n''} + n^4 - \frac{\alpha}{\beta} (f_{n''}-n^3) - \frac{\alpha}{\gamma} (f_{n''}-n^2)$$

$$f_{n^{IV}} = \frac{\dots}{\alpha+1}$$

$$= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

Hieraus folgt ferner:

$$\alpha \cdot n f_{n^{IV}} + n^5 - \frac{\alpha}{\beta} (f_{n^{IV}}-n^4)$$

$$f_{n^V} = nf_{n^{IV}} - S^{IV} = \frac{\dots}{\alpha+1}$$

$$\frac{-\frac{\alpha}{\gamma}(sn'' - n^3) + \frac{\alpha}{\delta}(sn' - n)}{\alpha + 1} = \frac{n^6}{6}$$

$$+ \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}; \text{ und}$$

$$\alpha \cdot n sn^v + n^6 - \frac{\alpha}{\beta}(sn^v - n^5)$$

$$sn^{vi} = n sn^v - sv = \frac{\dots}{\alpha + 1}$$

$$\frac{-\frac{5\alpha}{\gamma}(sn^{iv} - n^4) + \frac{\alpha}{\delta}(sn'' - n^2)}{\alpha + 1}$$

$$= \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}; \text{ u. s. w.}$$

wobei man die Bedeutung der griechischen Buchstaben nicht aus der Acht lassen muß, die sich für jede Potenzsumme auf die Divisoren der einzelnen Glieder in dem Werthe der nächstvorhergehenden Potenzsumme, in ihrer Ordnung beziehen, und folglich nicht immer einerley bleib-
ben, so daß für sn^{vn} die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, den Zahlen 7, 2, 2, 6, 42 aus sn^{vi} gleich seyn würden. Auch ist offenbar, daß in den Gliedern, welche die Summe einer gegebenen Potenzreihe ausdrücken, der höchste Exponent von n durchgehends einen Grad höher ist, als die Potenzen stehen, die man summiren soll. Der Divisor der höchsten Potenz von n ist gleichfalls diesem Exponen-
ten gleich; also $sn^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} \dots$ auch ist der Divisor des nächstfolgenden zweyten Gliedes immer die Zahl 2.

65. Zus. 2. Wäre also die Summe von n Gliedern der mtten Potenzen, oder

$$s_{n^m} = \frac{n^{m+x}}{m+1} - \frac{An^q}{\beta} + \frac{Bn^r}{\gamma} - \frac{Cn^s}{\delta} + \frac{Dn^t}{\varepsilon} \dots \pm \text{ &c.}$$

gefunden worden, wo A, B, C, D... die Coefficienten der einzelnen Glieder vorstellen mögen, so wäre alsdenn die Summe der nächsthöheren Potenzreihe, oder:

$$\begin{aligned} s_{n^{m+x}} = & \frac{\alpha \cdot n s_{n^{\alpha-x}} + n^\alpha + \frac{A\alpha}{\beta} (s_{n^q} - n^q)}{\alpha+1} \\ & - \frac{B\alpha}{\gamma} (s_{n^r} - n^r) + \frac{C\alpha}{\delta} (s_{n^s} - n^s) \\ & - \frac{D\alpha}{\varepsilon} (s_{n^t} - n^t) \dots \pm \text{ &c.} \\ & \hline \end{aligned}$$

wo das Gesetz der einzelnen Glieder sowohl als der Zahlen von selbst in die Augen fällt. Der Kürze wegen ist in dem Werthe von $s_{n^{m+x}}$ hier α statt $m+1$ gesetzt worden.

66. Zus. 3. In dem Werthe von s_{n^m} sey $m+1$ der höchste Exponent von n , (64.) so fallen, für $n = \infty$,

alle folgende Glieder weg, also ist $s_{n^m} = \frac{n^{m+x}}{\alpha} = \frac{n^{m+x}}{m+1}$,

und $s_{n^{m+1}} = \frac{\alpha \cdot n s_{n^m}}{\alpha+1} = \frac{(m+1)n s_{n^m}}{m+2} = \frac{n^{m+2}}{m+2}$;

so daß auch hier die folgenden Glieder, in denen blos die Expon-

Exponenten $m+1$; q ; r ; s ; t vorkommen, wegfallen;

Für $m=0$; ist $m+1=1$ also sn^{0+r} oder $sn' = \frac{n^2}{2}$;

(64) und da bey jeder der folgenden Potenzen der höchste Exponent, so wie der Divisor des zugehörigen Gliedes,

um 1 wachsen, (64) so kommt $sn'' = \frac{n^3}{3}$; $sn''' = \frac{n^4}{4}$;

$sn^{iv} = \frac{n^5}{5} \dots$ also $sn^m = \frac{n^{m+r}}{m+1}$; wie vorhin. Hier-

aus fließt folgende Regel: Die Summe der Potenzen m derer in unendlicher Anzahl, von 1 an in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen, ist gleich dem durch $m+1$ dividirten Producte aus dem letzten Gliede der Reihe, in die Anzahl aller Glieder. So ist $1+2^m$

$$+ 3^m + 4^m \dots + y^m = \frac{y^m \cdot y}{m+1} = \frac{y^{m+r}}{m+1}; \text{ und}$$

$$1+2^m+3^m+4^m \dots + \left(\frac{x}{e}\right)^m = \frac{x^{m+r}}{(m+1)e^{m+r}};$$

voraus gesezt, daß y so wie $\frac{x}{e}$ in Absicht der Einheit [1] unendlich sind.

67. Zus. 4. In dem Beweise des Satzes (63) ist angenommen worden, daß m eine ganze positive Zahl sei. Er gilt aber auch, wenn m eine gebrochene oder auch negative, ganze oder gebrochene Zahl ist; aber der Beweis davon, wenn man ihn ohne Behilfe der Differenzialrechnung führen will, läßt sich ohne viele Weitläufigkeit hier nicht überzeugend geben. Diese Erinnerung ist um so nöthiger, weil in der Folge auch Summierungen solcher Reihen vorkommen werden. Für

$$1+2^{-m}$$

$1 + 2^{-m} + 3^{-m} + 4^{-m} \dots + y^{-m}$ wäre also für diese unendliche Anzahl von Gliedern die Summe $= \frac{y^{-m+r}}{-m+1}$;

ober, wenn $-m = -\frac{r}{s}$ wäre: $1 + 2^{-\frac{r}{s}} + 3^{-\frac{r}{s}}$

$$+ 4^{-\frac{r}{s}} \dots + y^{-\frac{r}{s}} = \frac{y^{-\frac{r}{s}} + 1}{-\frac{r}{s} + 1} = \frac{y^{\frac{s-r}{s}}}{\frac{s-r}{s}} = \frac{sy^{\frac{s-r}{s}}}{s-r}.$$

Auf eben die Art verfährt man, wenn m eine positive gebrochene Zahl ist. Der besondere Fall, wenn $m = -1$ [87. Expl. 3.] für die Reihe $1 + 2^{-1} \dots + y^{-1}$ wird, soll in der Folge (118.) entschieden werden.

68. Ann. 1. Diese Summen der Potenzreihen sind im Grunde nichts anders, als das Integral des letzten Gliedes der gegebenen Reihe, weil nach der so bekannten Integrationsformel für die Wurzeln und Potenzen

$$f(z^m dz) = \frac{z^{m+r} dz}{(m+1)dz} = \frac{1}{m+1} z^{m+r} = \frac{z^{m+r}}{m+1}$$

$$= 1 + 2^m + 3^m + 4^m \dots + z^m \quad (66)$$

69. Ann. 2. Der (63) erwiesene Satz lässt sich mit vieler Leichtigkeit und Bequemlichkeit auf die Polygonal- und Pyramidalzahlen anwenden, von welchen jene auf eben die Art aus den arithmetischen, wie diese aus den Polygonalprogressionen summiert werden, wie aus folgenden zu ersehen ist.

70. Aufg. 10. Einen allgemeinen Ausdruck für die Polygonal- und Pyramidalzahlen zu finden.

Aufl.

Aufz. Man sehe

$$\begin{aligned} 1 + d + d + d \dots \dots + d &= A \\ 1 + d + d + d \dots \dots + d & \\ 1 + d \dots \dots + d & \\ 1 \dots \dots + d & \\ * * * + d & \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } 1 + (1+d) + (1+2d) + (1+3d) \dots + (1+[n-1]d) &= B \\ 1 + (1+d) + (1+2d) \dots + (1+[n-2]d) & \\ 1 + (1+d) \dots + (1+[n-3]d) & \\ 1 \dots + (1+[n-4]d) & \\ * * * * & \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$$\text{und } 1 + (2+d) + (3+3d) + (4+6d) \dots + \frac{n}{2} (2+[n-1]d) \text{ (Alg. 85)}$$

$$\begin{aligned} \text{oder } 1 + (2+d) + (3+3d) + (4+6d) \dots + n + \frac{(n^2-n)}{2} d &= C \\ 1 + (2+d) + (3+3d) \dots + (n-1) + \frac{(n-1)^2 - (n-1)}{2} d & \\ 1 + (2+d) \dots + (n-2) + \frac{(n-2)^2 - (n-2)}{2} d & \\ 1 \dots + (n-3) + \frac{(n-3)^2 - (n-3)}{2} d & \\ * * * * * & \\ 1 + \frac{(1^2-1)}{2} d & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } 1 + (3+d) + (6+4d) + (10+10d) \dots + \frac{f_n''-f_n'}{2} d & \\ \text{oder } 1 + (3+d) + (6+4d) + (10+10d) \dots + \frac{n^2+n}{2} + \frac{n^3-n}{6} d = D & \end{aligned}$$

D

wo

wo man das allgemeine Glied in D auch durch
 $\frac{n}{2} ([n+1] + \frac{[n^2-1]}{3} d)$ oder $\frac{n(n+1)}{2 \cdot 3} (3 + [n-1]d)$
 ausdrücken kann.

Hier nun besteht A, so wie B, C, D u. s. w. aus n Gliedern. B ist die allgemeine, aus dem Stammliede 1 und der Differenz d entstandene, arithmetische Progression, und $1 + (n-1)d$ ihr ntes Glied, und die Summe von A. Ferner ist C die allgemeine Polygonalprogression, und das nte Glied derselben, oder

$n + \frac{(n^2-n)}{2} d$ zugleich die Summe der vorhergehenden arithmetischen Progression B. Endlich ist D die allgemeine Pyramidalprogression, von welcher das nte

Glied, $\frac{n^2+n}{2} + \frac{n^3-n}{6} d$, zugleich die Summe der vorhergehenden Polygonalprogression C ist. Die Summe der allgemeinen Pyramidalprogression D findet man, wenn man in den Werth des letztgenannten nten Gliedes statt n nach und nach 1, 2, 3 ... n substituiert. Dieses giebt

$$\begin{aligned} D &= \frac{sn' + sn'}{2} + \frac{sn'' - sn'}{6} d = \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} \\ &+ \frac{n}{3} + \left(\frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{12} - \frac{n^2}{24} - \frac{n}{12} \right) d = \frac{n}{6} \times \\ &([n+1] [n+2] + [n^2-1] [\frac{n}{4} + \frac{1}{2}] d) = \\ &\frac{n \cdot n+1 \cdot n+2}{2 \cdot 3 \cdot 4} (4 + [n-1]d) \end{aligned}$$

71. Zus. 1. Wenn also

das allgemeine Glied von A = d, so ist alsdenn:

$$\text{B} = 1 + [n - 1]d \text{ zugleich die Summe von A; und}$$

$$\text{C} = \frac{n}{2} (2 + [n - 1]d) \text{ z. d. S. von B; und}$$

$$\text{D} = \frac{n \cdot n+1}{2 \cdot 3} (3 + [n - 1]d) \text{ z. d. S. von C; und}$$

$$\text{E} = \frac{n \cdot n+1 \cdot n+2}{2 \cdot 3 \cdot 4} (4 + [n - 1]d) \text{ z. d. S. von D}$$

Ueberhaupt wenn X, Ψ, Ω, drey unbestimmte auf einander folgende Reihen, wie C, D, E bedeuten, so ist, wenn das allgemeine Glied

$$\text{von } \Psi = \frac{n \cdot n+1 \dots (n+m)}{2 \cdot 3 \dots (m+2)} ([m+2] + [n-1]d) \text{ zu-}$$

gleich die Summe von X ist, alsdenn das allgemeine Glied

$$\text{von } \Omega = \frac{n \cdot n+1 \dots [n+m] [n+m+1]}{2 \cdot 3 \dots [m+2] [m+3]} ([m+3] + [n-1]d)$$

zugleich die Summe von Ψ.

72. Zus. 2. Die besondre Bestimmung der Polygona- und Pyramidalzahlen hängt von der Größe von d ab. Man setze in den vorhergehenden Formeln, d nach und nach = 1, 2, 3 &c. so giebt $\frac{n}{2} (2 + (n-1)d)$ die nte oder allgemeine Trigonal- oder Tetragonal- oder Pentagonal ic. Polygonalzahl; und eben so

$\frac{n \cdot n + 1}{2 \cdot 3} (3 + [n - 1]d)$ die allgemeine Trigonals-Tetragonal-Pentagonal-rc. Pyramidalzahl von dem ersten Geschlechte; und $\frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} (4 + [n - 1]d)$ eben dergleichen Pyramidalzahlen von dem zweyten Geschlechte; also $\frac{n \cdot n + 1 \dots (n + m)}{2 \cdot 3 \dots (m + 2)} ([m + 2] + [n - 1]d)$

die genannten Pyramidalzahlen von dem inten Geschlechte. Die Polygonalzahlen mit dem *Centro*, in gleichen die abgekürzten Polygonal- oder Pyramidalzahlen zu finden, hat keine Schwürigkeit, und es würde unnöthig seyn, wenn ich mich länger dabei aufzuhalten wollte, da in der Folge wenig Gebrauch von diesen Zahlen gemacht wird, und ich ihrer nur bey Gelegenheit der Potenzreihen gedacht habe, mit denen sie einen ähnlichen Ursprung haben. Wenn man in den Formeln (71) durchgängig $d = 1$ setzt: so findet man aus ihnen die figurirten Zahlen der Rästn. Tafel (Alg. 726.) Man sehe 109. 4.

73. Aufg. 11. Eine allgemeine Formel für das Element (62) jeder gegebenen Fläche A E e A (Fig. 12.) zu finden, aus welcher man die Fläche quadriren kann.

Aufl.

1) für rechtwinkliche Coordinaten. Man stelle sich die Abscisse A E = x in unendlich viele, also unendlich kleine gleiche Theile A B = B C = C D &c. getheilt vor, so ist, für A B = e ; alsdenn A C = $2e$, A D = $3e$ &c.

also $A E = \frac{x}{e} \cdot e$, weil solcher unendlich kleinen Theilchen so viel in der Abscisse (x) befindlich sind, als die angenommene Einheit e in ihr enthalten ist. Nun sey y die allgemeine senkrechte Ordinate über jedes e , so ist $e y$, das ver-

verlangte Flächen-Element, = e X, wo X als eine solche Function von x betrachtet wird, die den Werth von y, aus der Gleichung der zu quadrirenden krummen Linie, in x und beständigen Größen ausdrückt. In diese Function von x setze man alsdenn statt x nach und nach $\frac{x}{e}$; $\frac{3x}{e} \dots \frac{x}{e}$, so erhält man hierdurch die ganze Reihe

der in unendlicher Anzahl über der Abscisse AE nächst auf einander folgenden $y = X$, deren Summe nach (56) genommen, und in die unendlich kleine Basin e multiplizirt, die veränderliche krummliniche Fläche aus diesen Elementen, in einem veränderlichen Ausdrucke giebt, aus welchem man die gegebene Fläche, durch gehörige Substitution der veränderlichen Größe findet. Oft ist dieser Ausdruck rational; noch öfterer irrational, oder giebt den gesuchten Flächen-Inhalt in einer Reihe, die man nicht vollständig summiren kann.

2) für schiefwinklige Coordinaten (Fig. 13) sey $AP = x$; $PM = y$; der Coordinatenwinkel $APM = \pi$. Wenn $Pp = e$ ein Element der Abscisse AP ist, so ist $PMmp$ ein Element der Fläche AMP. Man ziehe $M\pi$, $m\pi$ senkrecht auf AP, so ist $PMmp = \pi Mm\pi = e. \pi M$; und weil $r: \sin. \pi = PM(y): \pi M = \frac{y \sin. \pi}{r}$.

so ist $e. \pi M = ey \frac{\sin. \pi}{r} = PMmp$; dem Elemente

der Fläche $APM = eX. \frac{\sin. \pi}{r}$ oder $eX. \sin. \pi$, für $r = 1$. Wird also der Coordinatenwinkel ein rechter, so ist auch $\sin. \pi = 1$ und $e. PM$ oder $PMmp = ey = eX$, wie vorhin.

74. Zus. Die Summe also aller eX in den Sinus des Coordinatenwinkels multiplizirt, giebt den gesuchten Ausdruck der veränderlichen Fläche APM ; wo e das Element der Abscisse x bezeichnet. Die zu nehmende Summe der über x neben einander liegenden Flächen-Elemente ey , werde ich im Folgenden durch $s(ey)$ anzeigen, welche Bezeichnung mit denen (63 — 66) gebrauchten, ähnlich, und durch den ganzen Integralcalculus bereits eingeführt und gewöhnlich ist.

75. Aufg. 12. Die Quadratur eines gegebenen geradlinichten rechtwinklichen Dreyecks ABC (Fig. 14) zu finden.

Aufl. Es sey $BC = a$; $AB = b$; $AP = x$; und $PM = y$ mit BC parallel, so ist $b : a = x : y$, also

$$y = \frac{ax}{b} = X \quad (73. 1) \text{ die Gleichung für die Linie } AM$$

zwischen den rechtwinklichen Coordinaten AP , PM . Wenn mp dem MP unendlich nahe, so ist $Pp = e$, dem Elemente der Abscisse x ; also $ey = Pp \cdot M$, dem Elemente des veränderlichen Flächenraumes APM .

Weil nun $ey = eX = \frac{eax}{b}$, so ist die Summe aller über der Abscisse AP neben einanderstehenden Flächen-

Elemente, oder $s(ey) = e \cdot \frac{ae}{b} + e \cdot \frac{a \cdot 2e}{b} + e \cdot \frac{a \cdot 3e}{b}$

$$+ e \cdot \frac{a \cdot 4e}{b} \dots + e \cdot \left(\frac{x}{b} \cdot e \right) [73. I] = \frac{e^2 a}{b} (1 + 2 + 3$$

$$+ 4 \dots + \frac{x}{e}) = \frac{e^2 a}{b}, \frac{x^2}{2e^2} (66) = \frac{ax^2}{2b}.$$

Für

Für $x = b$, wird $\Delta APM = \Delta ABC = \frac{ab^2}{2b} = \frac{1}{2}ab$, wie bekannt.

76. Zus. Für einen schiefwinklischen Triangel ABC, (Fig. 15.) sei $CD = c$, das übrige wie vorhin, so ist $\Delta APM = \frac{ax^2}{2b}$. fin. CBD (74) = $\frac{ax^2}{2b} \cdot \frac{CD}{CB}$ = $\frac{ax^2}{2b} \cdot \frac{c}{a}$. Und so findet man, für $x = b$, $\Delta ABC = \frac{ab^2}{2b} \cdot \frac{c}{a} = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}AB \cdot CD$, der halben Basi in das Perpendikel.

77. Aufg. 13. Den parabolischen Raum ApMA (Fig. 16.) zu quadriren.

Aufl. Wenn A, der Scheitel der Parabel, der Anfang der Absissen, und Ap = x; pM = y und p der Parameter ist, so ist $y = \frac{x^2}{p}$, die Gleichung für rechts winkeliche Coordinaten an der äußern Parabel, also $ey = \frac{e}{P} \cdot x^2$ und $f(ey)$ oder $ApMA = \frac{e}{P} \cdot e^2 + \frac{e}{P} \cdot 4e^2 + \frac{e}{P} \cdot 9e^2 \dots + \frac{e}{P} \cdot \left(\frac{x}{e}\right)^2 \cdot e^2 [73.1] = \frac{e^3}{P} \cdot \left(1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \dots + \left(\frac{x}{e}\right)^2\right) = \frac{e^3}{P} \cdot \frac{x^3}{3e^3} \quad (66)$
 $= \frac{x^3}{3P} = \frac{x^2 \cdot x}{3P} = \frac{py \cdot x}{3P} = \frac{1}{3}xy$, oder: Ein Drittheil des rechtwinklischen Parallelogramms ApMP unter den Coordinaten x, y.

78. Zus. 1. Für schiefwinkliche Coordinaten $A\pi = \omega$; $\pi M = z$; wäre $A\pi MA = \frac{1}{3}\omega z$. sin. $M\pi p$, (74) oder: Ein Drittheil des schiefwinklichen Parallelogramms unter den Coordinaten ω, z ; Nun ist aber $\frac{1}{3}\omega z$. sin. $M\pi p = \frac{1}{3}\omega z \cdot \frac{M_p}{M\pi} = \frac{1}{3}\omega z \cdot \frac{y}{z}$, also $A\pi MA = \frac{1}{3}\omega y$, oder: Ein Drittheil des Rechtecks unter der Abscisse ω und der senkrechten zu Ap gehörigen Ordinate Mp , also $\frac{1}{3}A\pi.Mp$.

79. Zus. 2. In der Aufgabe (77) fällt in dem Ausdrucke für den quadrierten Raum, e^3 , so wie in der vorhergehenden Aufgabe (75) e^2 , ganz heraus. Wenn also für eine gegebene Linie $y = Ax^m$, also $ey = e.Ax^m$, so lassen sich alle Quadraturen von der Art, oder $\int (ey) dx$ d. i. $\int (e.Ax^m) dx$ allgemein unter der Formel $e^{m+1} A \left(1 + x^m + 3^m + 4^m + \dots + \frac{x^m}{e^m}\right)$

$$+ 3^m + 4^m + \dots + \frac{x^m}{e^m}) = \frac{e^{m+1} A x^{m+1}}{(m+1)e^{m+1}} = \frac{A x^{m+1}}{m+1}$$

vorstellen, wo m den Exponenten der Abscisse x bedeutet.

Da nun $A \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1}$ ein Product des Coefficienten von x^m

in die unendliche Reihe $(1 + 2^m + 3^m + 4^m + \dots + x^m) =$

$\frac{x^{m+1}}{m+1}$, und dieses Product nichts anders als die

Summe aller Ordinaten ist: so erhellet hieraus, daß mit dieser Summe zugleich der Ausdruck der veränderlichen Fläche gegeben ist; welches eben so viel ist, als ob man in den vorigen Ausdrücken $e = 1$ setzte. Die Richtigkeit dieses Verfahrens läßt sich auch folgendergestalt erweisen. Die eingeschriebenen Rectangel (61) verhalten sich, bey ihren gleichgroßen Grundlinien, wie ihre Höhen; also ihre

ihre Summen, wie die Summen dieser Höhen. Sind nun diese Grundlinien unendlich klein, so ist die Summe von allen Rectangeln zugleich der gegebenen Fläche, (61) so wie die Summe aller Höhen, der Summe aller Ordinaten gleich, und die Verhältnis dieser unendlich kleinen Rectangel noch immer dieselbe; folglich auch die gegebene Fläche wie die Summe dieser Höhen, d. i. nach der Voraussetzung, wie die Summe aller Ordinaten. Wenn also die unendlich kleinen Rechtecke nach der Ordnung $a, b, c, d \text{ &c.}$ die zugehörigen Höhen oder Ordinaten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ &c.}$ die unendlich kleinen Grundlinien $= e$ sind: so ist $a : b = \alpha : \beta$; oder $(a+b+c) : d = (\alpha+\beta+\gamma) : \delta$ u. s. w. und $a+b+c+d \text{ &c.} = e(\alpha+\beta+\gamma+\delta \text{ &c.})$ also $(a+b+c+d \text{ &c.}) : (\alpha+\beta+\gamma+\delta \text{ &c.}) = e : 1 = 1 : 1$, wenn man e für die Einheit annimmt. Also ist $a+b+c+d \text{ &c.} = \alpha+\beta+\gamma+\delta \text{ &c.}$ oder, die Summe aller Rectangel der Summe aller Ordinaten gleich: wenn man also diese gefunden hat, so hat man auch die ganze Fläche. Wäre nun die allgemeine Ordinate, oder $y = Ax^m - Bx^n + Cx^r - Dx^s \dots \pm \text{ &c.}$, so wäre die Summe von allen über der Abscisse x , nächst

$$\text{an einander stehenden Ordinaten} = \frac{Ax^{m+1}}{m+1} - \frac{Bx^{n+1}}{n+1}$$

$$+ \frac{Cx^{r+1}}{r+1} - \frac{Dx^{s+1}}{s+1} \dots \pm \text{ &c.} = f(ey) \text{ dem}$$

Ausdrucke der veränderlichen Fläche, aus welchem man die gegebene durch Substitution findet.

80. Aufg. 14. Den parabolischen Raum A P M A, zwischen dem Bogen A M und den rechtswinklichen Coordinaten A P, P M, zu quadriren.

Aufl. Weil $xy = ApM + APM = \frac{1}{2}xy + APM$ (77) so ist $APM = xy - \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}xy$. Diesen Werth

von APMA fände man auch, unabhängig von ApM folgendergestalt. Durch Verwandlung der Coordinaten (77) kommt für AP = x; PM = y; die Gleichung

$y^2 = px$ für die Axe der Parabel. Hier ist $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$ = X, also das m in (66. 67.) hier = $\frac{1}{2}$, und $f(ey)$ oder

$$f(ex) = p^{\frac{1}{2}} (1 + z^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + 4^{\frac{1}{2}} \dots + x^{\frac{1}{2}}) \quad (79)$$

$$= p^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \quad (67) = \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3} xy,$$

wie vorhin, wodurch also (67) in Absicht auf gebrochene positive Exponenten durch ein Exempel bestätigt wird.

81. Zus. 1. Für schiefwinklige Coordinaten $\Lambda \Pi = \omega$; $\Pi M = z$, wäre $\Lambda \Pi M = \frac{2}{3} \omega z$. sin. $M \Pi P$ (74) $= \frac{2}{3} \omega z \cdot \frac{MP}{M \Pi} = \frac{2}{3} \omega z \cdot \frac{y}{z} = \frac{2}{3} \omega y = \frac{2}{3} \Lambda \Pi \cdot PM$.

82. Zus. 2. Man ziehe die gerade Linie AM, so ist das parabolische Segment AKMA = AKMP — $\Delta AMP = \frac{2}{3} xy - \frac{1}{2} xy = \frac{1}{6} xy$. Also verhalten sich AKMA; AKMP; ΔAMP ; AKMP; gegen einander, wie $\frac{1}{6} xy$; $\frac{1}{3} xy$; $\frac{1}{2} xy$; $\frac{2}{3} xy$; das ist, wie die Zahlen 1; 2; 3; 4.

83. Zus. 3. Für ein PM aus dem Brennpuncte F, wäre $x = \frac{1}{4} p$; $y = \frac{1}{2} p$ (Alg. 358. 359) also, auf den Fall, $\frac{2}{3} xy = \frac{1}{12} p^2$, dem zwölften Theile des Quadrates des Parameters gleich.

84. Zus. 4. Das parabolische Segment PMNQ = AKNQ — AKMP zu quadriren, setze man AP = a; PQ = x; so ist $AQ = \sqrt{ap + px}$; und $NQ^2 = p \cdot AQ = ap + px$; also $NQ = \sqrt{ap + px}$, und $AKNQ = \frac{2}{3} \cdot AQ \cdot QN$

$$QN(80) = \frac{2}{3}(a+x)\sqrt{ap+px}. \text{ Eben so ist } PM^2 \\ = p. AP = ap \text{ und } PM = \sqrt{ap}. \text{ Also } AKMP = \frac{2}{3}AP. \\ PM = \frac{2}{3}a\sqrt{ap} \text{ und } AKNQ - AKMP = \frac{2}{3}(a+x) \\ \sqrt{ap+px} - \frac{2}{3}a\sqrt{ap} = PMNQ = \frac{2}{3}([a+x] \\ \sqrt{ap+px} - a\sqrt{ap})$$

85. Zus. 5. Das hier abzuziehende Glied $\frac{2}{3}a\sqrt{ap}$ hätte man auch aus dem Werthe von $AKNQ = \frac{2}{3}(a+x)$

$\sqrt{ap+px}$ herleiten können, wenn man in ihm $x=0$ gesetzt, und das was alsdenn übrig geblieben, mit in Betrachtung gezogen hätte. Denn für $x=0$ verwandelt sich $AKNQ$ in $AKMP$, in das Stück das man von $AKNQ$ abziehen muß, um $PMNQ$ allein zu bekommen, weil hier nach der Bezeichnung, (84) der Abscissen Anfang in P liegt. Man nennt dieses die Errindung der beständigen Größen, die zu Ergänzung oder Abkürzung des erst gefundenen Wertes der veränderlichen Fläche hinzugeschrieben werden müssen, wenn selbige nicht, wie bey den vorhergehenden Exempeln geschehen würde, für $x=0$, selbst Null wird; welches zu erkennen giebt, daß der gefundene Ausdruck die Quadratur, ohne Hinzuthuung oder Abzug einer beständigen Größe, vollständig giebt. Denn f(ey) bezeichnet überhaupt jede Fläche, die wie $PMNQ$ zwischen zween parallelen Applicaten, PM , NQ , einem Theile der Abscissenlinie PQ , als einer Basi, und einem Bogen MN der krummen Linie, enthalten ist, in welcher jedes NQ ein y vorstellt, das zu der Abscisse x gehört, die sich in Q endigt, bey welcher aber P willkührlich angenommen werden kann. Für $x=0$, wird auch meistentheils die Fläche selbst verschwinden, und das geschieht allemal, wenn P, der Abscissen-

scissen Anfang, auf A liegt, wo die Abscissenlinie die krumme Linie schneidet, und also für $x = 0$ auch die eine Ordinate $PM = 0$ wird. Wenn aber der für die veränderliche Fläche gefundene Ausdruck für $x = 0$ nicht verschwindet, so erkennt man daraus, um wie viel derselbe da für zu groß oder zu klein sey, nachdem das Uebriggebliebene positiv oder negativ ist, und also davon abgezogen oder dazu addirt werden muß. Die Figur erläutert dieses, so wie die folgenden Beispiele, sehr deutlich.

Dass man die Constanſ für $x = 0$ zu bestimmen sucht, ist nicht nothwendig, man kann sie auch für andere Werthe von x bestimmen. Die Vorausſetzung von $x = 0$ ist nur die einfachste; ja zuweilen geschieht es, dass für $x = 0$ das Uebriggebliebene imaginär oder unendlich ist; woraus sich also nichts bestimmen lässt, weil die hieraus gefolgerete Constanſ, die veränderliche Fläche selbst imaginär oder unendlich machen würde, welches beydes ungereimt ist. Auf so einen Fall kann man x einer andern Größe gleich, ja selbst unendlich groß, annehmen, wenn nur bey dieser Vorausſetzung ein endlicher reeller Werth oder Null für die Constanſ folgt; wie man aus folgenden mit mehrern ersehen wird. Diese beständigen Größen oder Constantes pflegt man durch Const. oder auch nur durch ein bloßes C anzugeben.

86. Aufg. 15. Alle krumme Linien zu quadriren, die der Gleichung $y^m = \alpha + x$ zugehören.

Aufl. Man sehe $\alpha + x = \omega$, so ist das Element e der Abscisse $\alpha + x$ mit dem Elemente von ω einerley, oder

el. $x =$ el. ω ; und $y = \omega^{\frac{1}{m}}$ also die Summe aller Ordinaten, das ist hier (79) die veränderliche Fläche

$$Z = 1 + 2^{\frac{1}{m}} + 3^{\frac{1}{m}} + 4^{\frac{1}{m}} + 5^{\frac{1}{m}} \dots + \omega^{\frac{1}{m}}$$

$$= \frac{\frac{1}{m} + 1}{\frac{1}{m} + 1} (67) = \frac{m}{1+m} \cdot \omega^{\frac{1+m}{m}} ; = f(ey)$$

oder, den Werth von ω substituirt,

$$Z = \frac{m}{1+m} (\alpha+x)^{\frac{1+m}{m}} + \text{Const}; \text{ wo die Constans}$$

nur noch zu bestimmen ist, und folgendergestalt gefunden wird. Für $x=0$, soll auch die Fläche $Z=0$ seyn (85).

$$\text{Man setze also in } Z = \frac{m}{1+m} (\alpha+x)^{\frac{1+m}{m}} ; x=0;$$

Dieses giebt $Z = \frac{m}{1+m} \cdot \alpha^{\frac{1+m}{m}}$. Also ist der erste Ausdruck, für $x=0$, um so viel zu groß, und kommt also

$$C = - \frac{m}{1+m} \alpha^{\frac{1+m}{m}} \text{ folglich}$$

$$Z = \frac{m}{1+m} \left([\alpha+x]^{\frac{1+m}{m}} - \alpha^{\frac{1+m}{m}} \right) \text{ In andern Fällen, wenn das, was von } Z \text{ übrig bleibt, nachdem man } x=0 \text{ gesetzt hat, eine negative Größe ist, wird diese Constans positiv zu dem erlangten Ausdrucke von } Z \text{ hinzugezogen. Für die Gleichung } y^m = x - \alpha; \text{ wäre}$$

$$Z = \frac{m}{1+m} (x-\alpha)^{\frac{1+m}{m}} + \text{Const. wo die Constans ver-}$$

verschiedentlich bestimmt werden kann (85) nachdem hier in eine gerade oder ungerade Zahl ist; wenigstens kann hier nicht in beyden Fällen für $Z = 0$; auch $x = 0$ gesetzt werden. Beide Gleichungen $y^m = x + \alpha$ gehören zu dem parabolischen Geschlechte, und ist hier der Parameter $p = 1$ gesetzt worden. In beyden ist der Abscissen Anfang um die Größe α , aber nach entgegengesetzten Richtungen, vom Scheitel A entfernt.

87. Expl. 1. Für $m = 2$; und $\alpha = a$, käme aus der ersten Gleichung $y = (a+x)^{\frac{1}{2}}$ und $f(e y)$ oder

$$Z = \frac{2}{3} ([a+x]^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3} ([a+x] \sqrt{a+x} - a \sqrt{a})$$

für die gemeine oder Apollonische Parabel von dem Parameter $p = 1$. Will man statt 1 den Buchstaben p wieder sehen, so darf man nur darauf Acht haben, was die Gleichheit der Abmessungen für die Fläche Z erfordert.

Dieses giebt $Z = \frac{2}{3} ([a+x] \sqrt{ap+px} - a \sqrt{ap})$, gerade so wie (84). Der Abscissen Anfang liegt hier in P. (85)

Expl. 2. Für $m = 2$; käme aus der andern Gleichung $y = (x-\alpha)^{\frac{1}{2}}$ und hieraus $Z = \frac{2}{3} (x-\alpha)^{\frac{3}{2}} + C$. Sollte nun hier $Z = 0$ für $x = 0$ seyn: so käme $0 = \frac{2}{3} (-\alpha)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{(-\alpha)^3} + C$ oder $C = -\frac{2}{3} a \sqrt{-a}$, also die Constans, und durch sie die veränderliche Fläche selbst, unmöglich. Eben das geschieht, was man auch für eine gerade Zahl statt m substituiert. Man setze also, es solle $Z = 0$ für $x = \alpha$ seyn, so verwandelt

sich der Ausdruck (86) $Z = \frac{m}{1+m} (x-\alpha)^{\frac{1+m}{m}} + C$ in $0 = C$

$o = C$, also ist hier die Constant Null, und $Z = \frac{m}{1+m}$

$(x-\alpha)^m$ für $x=\alpha$ vollständig; und so hätte man auch x einer andern Größe, die nicht kleiner als α ist gleich, und dafür $Z=o$ sehen können.

Für ein ungerades m hingegen, kann auch $Z=o$ für $x=o$ angenommen werden; denn das giebt $o = \frac{m}{1+m}$

$(-\alpha)^m + \text{Const. oder Const.} = -\frac{m}{1+m}$

$\sqrt[m]{(-\alpha)^{1+m}} = -\frac{m}{1+m} \cdot \alpha^{\frac{1}{m}}$ Die gerade Zahl

$(1+m)$ macht nämlich die $(1+m)$ te Potenz von $-\alpha$ positiv (Alg. 31.), und wenn auch das nicht wäre, so ist doch die ungerade Wurzel (hier $\sqrt[m]$) einer Größe, immer möglich, wenn auch diese Größe negativ ist. Also ist

hier $Z = \frac{m}{1+m} ([x-\alpha]^{\frac{1}{m}} - \alpha^{\frac{1}{m}})$ für die

veränderliche Fläche vollständig. Der Abscissen Anfang liegt hier in l , so daß $BA = \alpha = AP$ (87).

Expl. 3. Für unendliche Hyperbeln zwischen ihren Asymptoten, wäre (21) $y^m x^k = \alpha^{m+k}$, also

$y = \frac{\alpha^{\frac{m+k}{m}}}{x^{\frac{k}{m}}} = \alpha^{\frac{m+k}{m}} \cdot x^{-\frac{k}{m}}$ also das Flächenelement

ment, oder $ey = e \cdot \alpha \frac{m+k}{m} - \frac{k}{m}$, und die verän-

$$\text{derliche Fläche oder } Z = \frac{\alpha \frac{x}{m+k} - \frac{k}{m}}{-\frac{k}{m} + 1}$$

$$= \frac{\frac{m+k}{m}}{\frac{m \alpha}{k-m} - \frac{m}{m-k}} \quad \text{beydes für rechtwinklige}$$

$$(m-k)x - m$$

Asymptoten. Wenn $m = 1 = k$ gesetzt wird: so kommt für die gemeine Hyperbel $ey = e \cdot \alpha^2 x^{-1}$ und $f(ey) = \alpha^2 \cdot f\left(\frac{e}{x}\right)$ wo man $\frac{e}{x}$ d. i. ex^{-1} nach 67.

nicht summiren kann, denn sonst käme $f\left(\frac{e}{x}\right) = \frac{x^o}{o}$

$+ C = \frac{1}{o} + \text{Const}$; welches ungereimt ist, weil die veränderliche Fläche Z weder unveränderlich noch unendlich seyn kann (Anal. 219. I—III). Die Art und Weise solche Größen zu summiren, wird weiter unten (118) gezeigt werden. •

Für $m = 1; k = 2$; oder für die cubische Hyperbel $y = \frac{\alpha^3}{x^2}$, wäre $Z = -\alpha^3 x^{-1} + C = -\frac{\alpha^3}{x} + C$

Hier nun kann man, C zu bestimmen, für x jeden endlichen, ja selbst einen unendlich großen Werth annehmen,

men, und dafür $Z = 0$ setzen. Nehme man aber für $Z = 0$ auch $x = 0$; so würde $0 = -\frac{a^3}{0} + C$, oder $C = \infty$, welches nicht statt haben kann. (Expl. 2.) Setzte man $Z = 0$ für $x = b$, so wäre $\text{Const} = \frac{a^3}{b}$, und

hier $Z = \frac{a^3(x-b)}{bx}$. Aber $Z = 0$ für $x = \infty$, giebt $C = 0$; also $Z = -\frac{a^3}{x}$, die zugehörige veränderliche

Fläche vollständig, aber negativ. Die Bedeutung und Lae einer solchen negativen Fläche, hat Herr Hofrath Bästner (Anal. 211) umständlich aus einander gesetzt. Eine negative Fläche ist nämlich bey den Quadraturen so etwas, was die negative Subtangente im vorigen Capitel (21) ist. Sie liegt an eben der Ordinate, die den positiven Raum zwischen ihr und dem Anfange der Abscissen begrenzt, aber nicht an eben der Seite dieser Ordinate, auf welcher der Anfang der Abscissen sich befindet.

Die Erfindung der beständigen Größen findet man ausführlich und schön von dem Hrn. von Segner abgehandelt Calc. Integr. P. I. Sect. VI.

88. Aufg. 16. Die Fläche der Ellipse ADBEA (Fig. 17.) vermittelst des Segmentes CDMP = Z, zwischen der halben kleinen Axe CD und der Ordinate MP zu quadriren.

Aufl. Für $CP = u$; $PM = y$; $CD = \frac{1}{2}c$; $CA = \frac{1}{2}a$; ist $y^2 = \frac{c^2}{4a^2} (a^2 - 4u^2)$ und $y = \frac{c}{2a} \sqrt{(a^2 -$

$(a^2 - 4u^2)^{\frac{1}{2}}$, also, wenn e ein Element der Abscisse u ist, $ey = e \cdot \frac{c}{2a} (a^2 - 4u^2)^{\frac{1}{2}}$ und $f(ey)$ oder $Z = \frac{c}{2a} f(e [a^2 - 4u^2]^{\frac{1}{2}})$

Hier verwandle man den Irrationalausdruck $(a^2 - 4u^2)^{\frac{1}{2}}$ in eine Reihe, vermittelst der bekannten Newtonischen Binomialformel $(P + PQ)^m = P^m + \frac{m}{1}$

$$AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ + \frac{m-3}{4} DQ +$$

$$\frac{m-4}{5} EQ. \dots + \frac{m-n}{n+1} \Omega Q, \text{ wo in dem ißigen}$$

$$\text{Falle } P = a^2; Q = -\frac{4u^2}{a^2}; m = \frac{1}{2} \text{ und } A, B, C, D,$$

E, \dots, Ω die jedesmaligen unmittelbar vorhergehenden einzelnen Glieder der Reihe bedeuten. Dieses giebt

$$\sqrt{a^2 - 4u^2} \text{ oder}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f = a - \frac{2u^2}{a} - \frac{2u^4}{a^3} - \frac{4u^6}{a^5} \\ \quad - \frac{10u^8}{a^7} - \frac{28u^{10}}{a^9} - \frac{84u^{12}}{a^{11}} \dots \\ \Omega = 3 - \frac{(2u)^2}{2a} - \frac{1 \cdot (2u)^4}{2 \cdot 4 \cdot a^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot (2u)^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^5} \end{array} \right.$$

$$(a^2 - 4u^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{array}{l} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2u)^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot a^7} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (2u)^{10}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot a^9} \\ - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot (2u)^{12}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot a^{11}} \end{array} \right.$$

$$\text{und } \frac{c}{2a} (a^2 - 4u^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{2} - \frac{cu^2}{a^2} - \frac{1 \cdot 2^2 \cdot cu^4}{1 \cdot 2 \cdot a^4}$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot cu^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a^6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot cu^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a^8}$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^4 \cdot cu^{10}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^{10}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 2^5 \cdot cu^{12}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot a^{12}}$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-5) \cdot 2^{n-2} \cdot cu^{2n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot a^{2n-2}} = y_3$$

wo man, das nte Glied der Reihe auszudrücken, statt n alle ganze positive Zahlen von 3 an, substituiren kann; weil hier mit dem dritten Gliede alle übrigen nach einem gemeinschaftlichen Gesetze fortgehen. Für n = 4; wird z. B. $2n-5=3$; und $n-1=3$; woraus erhellet, daß man in dem Zähler, die ungeraden Zahlen als Faktoren nur bis auf 3, und in dem Nenner die natürlichen Zahlen eben so weit, und nicht weiter, fortsetzen, also das

vierte Glied = $\frac{1 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot cu^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a^6}$ seyn müsse. Diese Er-

innerung hat auch im folgenden ihren Nutzen. Hätte man aber das Glied, wo das Gesetz anhebt, (hier das dritte Glied) für das erste annehmen wollen, so hätte man für das nte Glied nach dieser Rechnung, oder für das

(n+2)te der Reihe, = $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot 2^n \cdot cu^{2n+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1) \cdot a^{2n+2}}$

\mathbb{E}_2

schreibt

schreiben müssen, wo man statt n auch $1; 2;$ und alle übrige ganze positive Zahlen substituire kann.

Obige Reihe für y stellt nun jede Ordinate, auf oder zwischen den Puncten $C; P;$ der Abscisse $CP,$ allgemein vor, und es giebt hier so viel Ordinaten über $CP,$ so oft e in u enthalten seyn kann, das ist $\frac{u}{e}.$ Man summire

also gehörigermaßen (66) jedes einzelne Glied der Reihe besonders, so bekommt man auf die Art die Summe aller Ordinaten, das ist (79.) die Fläche $CDMP = Z.$ Stellt man sich nun die Abscissen dieser Ordinaten unter der unendlichen Reihe $1, 2, 3, 4, \dots u$ vor, in welcher u gegen 1 unendlich groß ist, weil hier jede Zahl ein Multiplum der unendlich kleinen Einheit e bedeutet, deren u eine unendliche Menge ausdrückt, so giebt, das erste Glied $\frac{cu^0}{2}$

d. i. $\frac{e}{2},$ multiplicirt mit $(1 + 2^0 + 3^0 + 4^0 \dots + u^0)$

zum Producte $\frac{eu}{2}$ (66) als die Summe aller ersten Glieder; also ist $-\int \left(\frac{cu^2}{a^2} \right)$ oder

$$-\frac{e(1+2^2+3^2+4^2\dots+u^2)}{a^2} = -\frac{cu^3}{3.a^2} \text{ die}$$

Summe aller zweyten Glieder; und $-\int \left(\frac{1.2^1.cu^4}{I.2.a^4} \right)$

$$\text{d. i. } -1.2^1.c \frac{(1+2^4+3^4+4^4\dots+u^4)}{I.2.a^4} = -\frac{I.2^1.cu^5}{I.2.5.a^4}$$

die Summe aller dritten Glieder; u. s. w. bey den übrigen.

Am leichtesten kann man sich die Sache auf folgende Art vorstellen. Wenn man, der Kürze wegen, in dem Werthe von y , die Coefficienten der Potenzen von u in den einzelnen Gliedern, nach der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ nennt, so ist

$$y = \alpha u^0 - \beta u^2 - \gamma u^4 - \delta u^6 - \varepsilon u^8 - \zeta u^{10} \dots$$

die allgemeine Ordinate. Aus ihr bekommt man, wenn man in u nach und nach $1e; 2e; 3e; 4e$ u. s. w. substituiert, (73) die erste, zweyte, dritte, vierte ic. Ordinate von C an gerechnet, die alle einander unendlich nahe liegen; und so giebt $\frac{u}{e}$. e statt u substituiert, die $\frac{u}{e}$ te, oder letzte, der Abscisse CP zugehörige Ordinate, und die Summe von allen in die unendlich kleine Basin e multiplizirt, die veränderliche Fläche $CDMP = Z$. Demnach ist

$$\alpha \cdot 1 \cdot e^0 - \beta \cdot 1 \cdot e^2 - \gamma \cdot 1 \cdot e^4 - \delta \cdot 1 \cdot e^6 - \varepsilon \cdot 1 \cdot e^8 \dots \text{die 1ste Ordinate}$$

$$\alpha \cdot 2^0 \cdot e^0 - \beta \cdot 2^2 \cdot e^2 - \gamma \cdot 2^4 \cdot e^4 - \delta \cdot 2^6 \cdot e^6 - \varepsilon \cdot 2^8 \cdot e^8 \dots \text{die 2te Ordinate}$$

$$\alpha \cdot 3^0 \cdot e^0 - \beta \cdot 3^2 \cdot e^2 - \gamma \cdot 3^4 \cdot e^4 - \delta \cdot 3^6 \cdot e^6 - \varepsilon \cdot 3^8 \cdot e^8 \dots \text{die 3te Ordinate}$$

$$\alpha \cdot 4^0 \cdot e^0 - \beta \cdot 4^2 \cdot e^2 - \gamma \cdot 4^4 \cdot e^4 - \delta \cdot 4^6 \cdot e^6 - \varepsilon \cdot 4^8 \cdot e^8 \dots \text{die 4te Ordinate}$$

.

.

.

.

.

$$\text{und } \alpha \left(\frac{u}{e}\right)^0 \cdot e^0 - \beta \left(\frac{u}{e}\right)^2 \cdot e^2 - \gamma \left(\frac{u}{e}\right)^4 \cdot e^4 - \delta \left(\frac{u}{e}\right)^6 \cdot e^6 - \varepsilon \left(\frac{u}{e}\right)^8 \cdot e^8 \dots$$

$$\text{die } \frac{u}{e} \text{ te Ordinate}$$

$$\text{also (66)} \frac{\alpha u}{e} - \frac{\beta u^3}{3e} - \frac{\gamma u^5}{5e} - \frac{\delta u^7}{7e} - \frac{\varepsilon u^9}{9e} \dots \text{die}$$

Summe aller Ordinaten, die in e multiplizirt, und
die Werthe der griechischen Buchstaben substituirt

$$\begin{aligned} Z = & \frac{cu}{2} - \frac{cu^3}{3.a^2} - \frac{1 \cdot 2^1 \cdot cu^5}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot a^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot cu^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot a^6} \\ & - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot cu^9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot a^8} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^4 \cdot cu^{11}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot a^{10}} \\ & - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 2^5 \cdot cu^{13}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 13 \cdot a^{12}} \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-5) \cdot 2^{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)(2n-1)}. \end{aligned}$$

$\frac{cu^{2n-1}}{a^{2n-2}}$ giebt, wo keine Constanſe weder zu addiren noch

subtrahiren nothig ist, weil hier, für $n=0$ die Fläche Z verschwindet (85). Diese Reihe hat bis jetzt noch in keine endliche bestimmte Summe gebracht werden können, weshalb auch die ganz genaue Quadratur der Ellipse nicht kann gegeben werden,

89. Anmerk. Den Ausdruck für die Fläche Z hätte man geschwinder finden können, wenn man nur sogleich die einzelnen Glieder der Reihe für y, d. i. $\alpha u^0 - \beta u^2 + \gamma u^4 \dots$ nach (79) summirt hätte. Ich habe aber hier mit Fleiß die Sache etwas umständlicher auseinander gesetzt, theils um ein für allemal zu zeigen, daß das Verfahren für die Quadraturen immer dasselbe bleibt, die Ordinate mag in einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern gegeben seyn, und wie man sich dabei auf den letzten Fall zu verhalten habe; theils aber auch 79. durch ein Beispiel zu erläutern, woraus man noch deutlicher einsehen lernt, in wiefern man sagen könne, daß die Summe aller Ordinaten über CP, die zu der unendlichen Reihe $1, 2, 3, 4 \dots u$ gehören, mit der Fläche CDM P übereinkomme; und zugleich dadurch dem Vorwurfe auszuweichen, als ob man sich hier wider die ersten Begriffe der Elementargeometrie, die Flächen aus

aus Linien, als Theilen, zusammengesetzt vorstelle: welcher Einwurf einem Ungeübten leicht einfassen kann, wenn er liest, wie la Caille in seinen Anfangsgründen der Algebra (888. 892.) und andere mit ihm, die Quadratur der Flächen, ohne weitere Erinnerung, behandeln.

Endlich ist noch anzumerken, daß man die Entwicklung und Auflösung der Ordinate, so wie jeder andern Größe, in eine unendliche Reihe, von welcher man nachher die Glieder einzeln summirt, nicht eher vornehmen müsse, als bis man sich auf keine andere Art zu helfen weiß. Diese Auflösung muß immer die letzte Zuflucht bleiben, weil die Substitution (86) Verwandlung der Größen, und andere Kunstgriffe von der Art, den vorgegebenen Ausdruck sehr oft in eine solche Form umschaffen, die man nach den bekannten gewöhnlichen Vorschriften behandeln kann.

90. Zus. 1. Für $u = \frac{1}{2}a$, wird $\text{CPMD} = \text{CADC}$

$$= \frac{ac}{4} - \frac{ac}{3 \cdot 2^3} + \frac{\frac{1}{2}ac}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2^4} \dots \text{oder:}$$

$$\text{CADC} = \frac{\frac{1}{4}ac}{6} - \frac{\frac{1}{4}ac}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{\frac{1}{4}ac}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{4}ac}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{1}{4}ac}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \frac{1}{4}ac}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13} \dots$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-5) \cdot \frac{1}{4}ac}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2(n-1)(2n-1)} = \text{dem Quadranten}$$

der Ellipse. Setzt man also überall ac statt $\frac{1}{4}ac$, so hat man den Inhalt der ganzen Ellipse ADBEA (88)

91. Zus. 2. Weil $\text{CPMD} - \Delta \text{CPM} = \text{CMD}$, so findet man den elliptischen Sector

$$\text{CMD} = Z - \frac{1}{2}uy = Z - \frac{1}{2}\left(\frac{cu}{2} - \frac{cu^3}{a^2}\right) - \frac{\frac{1 \cdot 2^1 \cdot cu^5}{1 \cdot 2 \cdot a^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot cu^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a^6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot cu^9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a^8}}{\dots}$$

oder, den Werth für Z aus 88. substituirt, und gehörig addirt:

$$\text{CMD} = \frac{cu}{4} + \frac{cu^3}{6 \cdot a^2} + \frac{3cu^5}{10a^4} + \frac{5cu^7}{7a^6} + \frac{35cu^9}{18a^8} \dots$$

Für $u = \frac{1}{2}a$, wird alsdenn der elliptische Quadrant

$$\text{CADC} = \frac{1}{4}ac\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{3}{80} + \frac{5}{224} + \frac{35}{2304} \dots\right)$$

$= \frac{1}{4}acS$; wenn man S für die Zahlenreihe setzt, und so kommt $a \cdot c \cdot S$ für die ganze Ellipse.

92. Aufg. 17. Die Fläche der Ellipse ADBEA vermittelst des Abschnittes AP M = Q zu quadrieren.

Aufl. Für $AP = x$; $PM = y$; ist $y^2 = \frac{c^2ax - c^2x^2}{a^2}$

und $y = \frac{cx^{\frac{1}{2}}}{a} (a-x)^{\frac{1}{2}}$. Man erhebe $a-x$ zur Potenz $\frac{1}{2}$; so kommt, aus (88) nach gehöriger Bestimmung

der Buchstaben P; Q; m; A; B &c. $y = \frac{cx^{\frac{1}{2}}}{a}$

$(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2a^2} - \frac{x}{8a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^2}{16a^{\frac{5}{2}}} \dots)$ oder $y = \frac{cx^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$

$$\begin{array}{cccc}
 \frac{cx^{\frac{3}{2}}}{2a} & - \frac{1 \cdot cx^{\frac{5}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot a^{\frac{5}{2}}} & - \frac{1 \cdot 3 \cdot cx^{\frac{7}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^{\frac{7}{2}}} & - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot cx^{\frac{9}{2}}}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot a^{\frac{9}{2}}} \\
 \\
 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot cx^{\frac{11}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot a^{\frac{11}{2}}} & - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot cx^{\frac{13}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot a^{\frac{13}{2}}} & \dots \text{also}
 \end{array}$$

(79.) f(ey) das ist:

$$Q = \frac{cx^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}a} - \frac{cx^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2} \cdot 2 \cdot a^{\frac{5}{2}}} - \frac{1 \cdot cx^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot a^{\frac{7}{2}}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot cx^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^{\frac{9}{2}}} \dots$$

$$\text{oder } Q = \sqrt{\frac{x}{a}} \left(\frac{2cx}{3} - \frac{cx^2}{5a} - \frac{1 \cdot cx^3}{7 \times 1 \cdot 4 \cdot a^2} \right)$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot cx^4}{9 \times 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot cx^5}{11 \times 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot a^4}$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot cx^6}{13 \times 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot a^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot cx^7}{15 \times 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot a^6} \dots$$

$$\dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \dots (2n-5) \cdot cx^n}{(2n+1) \times 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \dots 2(n-1) \cdot a^{n-1}})$$

für den Abschnitt APM; wo das Gesetz des Fortgangs der Glieder, wie in 88. mit dem dritten Gliede anfängt.

93. Zus. 1. Für $x = \frac{1}{2}a$, wird APM = ACD, also

$$ACD = \frac{ac}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5 \cdot 2^2} - \frac{1}{7 \times 1 \cdot 4 \cdot 2^3} - \frac{1 \cdot 3}{9 \times 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2^4} \right)$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{11 \times 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 2^5} \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-5)}{(2n+1) \times 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots 2(n-1) \cdot 2^n}$$

$= \frac{ac}{\sqrt{2}} S'$ für den Quadranten der Ellipse. Also

$\frac{4 \cdot ac}{\sqrt{2}} S' = \frac{2^2 ac}{2^{\frac{1}{2}}} S' = 2^{\frac{3}{2}} ac S'$ oder $2 ac S' \sqrt{2}$ für die ganze Ellipse ADBEA (92) wo S' die vorhergehende Zahlenreihe bedeutet.

94. Zus. 2. Weil $APM + \Delta MPC = ACM$, so findet man hieraus den Sector $ACM = Q + \frac{(\frac{1}{2}a - x) \cdot y}{2}$, oder

$$\begin{aligned} ACM &= Q + \left(\frac{\frac{a}{4} - \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{cx^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{cx^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1 \cdot cx^{\frac{5}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot a^{\frac{5}{2}}} \dots \right) \\ &= Q + \frac{\frac{1}{2} cx^{\frac{1}{2}}}{4} - \frac{5 cx^{\frac{3}{2}}}{4 \times 2 \cdot a^{\frac{1}{2}}} + \frac{7 cx^{\frac{5}{2}}}{4 \times 2 \cdot 4 \cdot a^{\frac{3}{2}}} + \frac{9 cx^{\frac{7}{2}}}{4 \times 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^{\frac{5}{2}}} \\ &\quad + \frac{33 cx^{\frac{9}{2}}}{4 \times 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot a^{\frac{7}{2}}} + \frac{195 cx^{\frac{11}{2}}}{4 \times 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot a^{\frac{9}{2}}} \dots \text{ Oder (92).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ACM &= \frac{a^{\frac{1}{2}} cx^{\frac{1}{2}}}{4} \left(1 + \frac{x}{6a} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot a^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot x^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11 \cdot a^5} \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) x^{2n-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2(n-1)(2n-1) a^{n-1}} \right) \end{aligned}$$

95. Zus. 3. Für $x = \frac{1}{2}a$ wird der Elliptische Sector ACM = ACD, also

$$\begin{aligned} ACD &= \frac{ac}{4\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11} \dots \right) = \text{dem ellipti-} \end{aligned}$$

schen Quadranten; und das vierfache hiervon, oder die ganze Ellipse

$$\begin{aligned} ADBEA &= \frac{ac}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1^2 \cdot A}{2 \times 2 \cdot 3} + \frac{3^2 \cdot B}{2 \times 4 \cdot 5} \right. \\ &\quad \left. + \frac{5^2 \cdot C}{2 \times 6 \cdot 7} + \frac{7^2 \cdot D}{2 \times 8 \cdot 9} + \frac{9^2 \cdot E}{2 \times 10 \cdot 11} + \frac{11^2 \cdot F}{2 \times 12 \cdot 13} \dots \right) \end{aligned}$$

wo jeder große Buchstabe das nächstvorhergehende ganze Glied der Reihe ausdrückt.

96. Aufg. 18. Die Fläche des Kreises ADBEA (Fig. 18.) zu quadriren.

Aufz. Da die Ellipse sich in einen Kreis verwandelt, wenn man in der Gleichung für die Ellipse, Parameter große und kleine Axe einander gleich setzt: so findet man sogleich die Quadratur des Kreises aus der berechneten Quadratur der Ellipse. Für den Kreis also, von dem Durchmesser a , ist jedes veränderliche, unbestimmte

$$\begin{aligned} CPMD &= \frac{au}{2} - \frac{u^3}{3 \cdot a} - \frac{1 \cdot 2^1 u^5}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot a^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 2^2 u^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot a^5} \dots \\ &\quad \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-5) \cdot 2^{n-2} \cdot u^{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot (2n-1) \cdot a^{2n-2}} \quad (88) \end{aligned}$$

also der Quadrant des Kreises, oder

CADC

$$\text{CADC} = \frac{1}{4}a^2 \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} \dots \right) [90] = \frac{1}{4}a^2 S, \text{ und der ganze Kreis}$$

$\text{ADBEA} = a^2 S$, oder auch S , für den Durchmesser $a = 1$.

97. Zus. 1. Man sehe den Bogen $DM = \delta$; so ist, für den Halbmesser $CD = 1$; alsdenn $CP = \sin. \delta$; $PM = \cos. \delta$; und $\text{Sect. MCD} + \Delta CPM = \frac{1}{2} DM$. $CD + \frac{1}{2} CP \cdot PM = \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2} \sin. \delta$. $\cos. \delta = \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{4} \sin. 2\delta$ (Trigon. 19. S. 5. Zus.) $= CDMP$ (Anal. 274.) Aus (91) ist der Sector.

$$\text{CMD} = \frac{au}{4} + \frac{u^3}{6a} + \frac{3u^5}{10 \cdot a^3} + \frac{5u^7}{7a^5} + \frac{35u^9}{18a^7} \dots$$

$\equiv \frac{1}{4}a\delta$; und hieraus auch der Bogen δ gegeben, wenn man diese oder eine andere Reihe für CMD mit $\frac{1}{4}a$ dividiert, oder mit $\frac{4}{a}$ multipliziert.

Setzt man in dem Werthe von CMD, $u = \frac{1}{2}a$; so findet man den Quadranten

$$\begin{aligned} \text{CAD} &= \frac{a^2}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{3}{80} + \frac{5}{224} + \frac{35}{2304} \dots \right) \\ &= \frac{a^2}{4} S; \text{ und ADBEA (96) oder den ganzen Kreis} \\ &= a^2 S' \text{ oder auch } S' \text{ für } a = 1. \text{ Hier nähert sich } S' \text{ nicht so geschwind als } S \text{ in (96)} \end{aligned}$$

98. Zus. 2. Eben so ist für den Kreis jedes unbestimmte

$$\text{APM} = \sqrt{\frac{x}{a}} \left(\frac{2ax}{3} - \frac{x^2}{5} - \frac{1 \cdot x^3}{7 \times 1 \cdot 4 \cdot a} \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot x^4}{9 \times 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^2} \cdots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-5)x^n}{(2n+1) \times 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 2(n-1) \cdot a^{n-2}} \right)$$

[92] also der Quadrant

$$\text{ACD} = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5 \times 2^2} - \frac{1}{7 \times 1 \cdot 4 \cdot 2^3} \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 3}{9 \times 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{11 \times 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 2^5} \cdots \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-5)}{(2n+1) \times 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 2(n-1) \cdot 2^n} \right) [93] = \frac{a^2}{\sqrt{2}} S$$

und 4ACD , oder der ganze Kreis

$$\text{ADBEA} = \frac{4a^2}{\sqrt{2}} S = 2a^2 S \sqrt{2} \text{ oder } 2S\sqrt{2}$$

für $a=1$.

99. Zus. 3. Für $AC=1$; und den Bogen $AM=d$, ist $PM=\sin d$; $CP=\cos d$; also $\text{Sect. ACM} = \Delta MPC = \frac{1}{2}d - \frac{1}{4}\sin 2d$ (97) = APM ; und $\text{APM} + \text{CDMP}$, oder der Quadrant $\text{ACD} = \frac{1}{2}(d+d) + \frac{1}{4}(\sin 2d - \sin 2d)$ [97] also, wenn $d=d=45^\circ$, $\text{ACD} = \frac{1}{2}\text{AD} = \frac{1}{2}$, für den Halbmesser 1.

100. Zus. 4. Aus (94) Fâme des Kreises Ausschnitt

$$\text{ACM} = \frac{a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{4} \left(1 + \frac{x}{6 \cdot a} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^2}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot a^3} \cdots \right. \\ \left. \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)x^{n-\frac{1}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2(n-1)(2n-1)a^{n-\frac{1}{2}}} \right)$$

und

und hieraus, wenn man $x = \frac{1}{2} a$ setzt, der Quadrante

$$ACD = \frac{a^2}{4\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \dots \right)$$

und der ganze Kreiß

$$\begin{aligned} ADBEA &= \frac{a^2}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1^2 A}{2 \times 2 \cdot 3} + \frac{3^2 B}{2 \times 4 \cdot 5} \right. \\ &\quad \left. + \frac{5^2 C}{2 \times 6 \cdot 7} \dots \right) [95] \end{aligned}$$

101. Aufg. 19. Den Kreiß ADBEA vermitstet der Tangente AT zu quadriren.

Aufl. Der Secante CT sei eine andere Ct so nahe, daß der Winkel TCT kleiner als jeder gegebene geradlinichte Winkel sey. Man setze die Tangente AT = z; das Element dieser Tangente, oder TT = e, so ist für den Halbmesser AC = 1 = CM; $TC^2 = 1 + zz$. Mit der Secante CT als einem Halbmesser, stelle man sich den unendlich kleinen Bogen TS eezogen vor, so ist in dem Triangel TT S der Winkel TT S unendlich wenig von ATC, und TSt unendlich wenig von dem rechten Winkel TAC verschieden, also $TtS = ATC$; und $TSt = TAC$, folglich $\Delta tST \sim \Delta TAC$, und

$$TC^2[1+zz]:CA^2[1]=tT^2[e^2]:ST^2=\frac{e^2}{1+zz}$$

und, wegen der ähnlichen Sectoren CTS; CMm;

$$TC^2[1+zz]:TS^2[\frac{e^2}{1+zz}]=CM^2[1]:Mm^2=$$

$\frac{e^2}{(1+zz)^2}$ oder $Mm = \frac{e}{1+zz}$; und der unendlich kleine

Sector

$$\text{Sector } CMm = \frac{1}{2} \text{Min. } MC = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{1+z^2} = \frac{e}{2} \left(\frac{1}{1+z^2} \right)$$

$\approx \frac{1}{2} \cdot e (z^0 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 \dots)$ wenn man (in Alg. 13) statt des dortigen x hier durchgängig z^2 schreibt.
 Dieser unendlich kleine Sector CMm ist nun ein Element des endlichen veränderlichen Sectors ACM , folglich ACM die Summe aller MCm , oder aller Elemente innerhalb des Bogens AM , und $ACM = \frac{1}{2} f(e[z^0 - z^2 + z^4 \dots]) = \frac{1}{2} (f(ez^0) - f(ez^2) + f(ez^4) \dots)$ oder endlich

$$ACM = \frac{1}{2} \left(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \frac{z^{11}}{11} \dots \right)$$

[79]

102. Zus. I. Wenn $AM = 45^\circ$, so ist Tang. AM oder $z = 1$; also der achte Theil der Kreisfläche $= \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots)$ und der Quadrant $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots \frac{1}{2n-1}$; wo das allgemeine

oder nte Glied negativ oder positiv ist, nachdem die Zahl n gerade oder ungerade ist. Das vierfache der letzten Reihe ist also dem ganzen Kreisinhalt gleich.

Diese Quadratur scheint in der That, ihrer Simplicität wegen, vor allen übrigen den Vorzug zu verdienen; aber die Reihe convergiert viel zu wenig, so daß die Summe der ersten fünf Glieder die Fläche noch nicht einmal in den Zehnttheilchen berichtigt. Aber Leibniz, ihr Erfinder, hat, wie Herr Hofrath Rästner (Anal. 201.) erinnert, nur dadurch zeigen wollen, daß sich die Quadratur des Kreises durch eine Reihe geben läßt, deren Gesetz man so leicht übersehen kann. Ein sinnreiches Verfahren, die Summe einer beträchtlichen Anzahl von Gliedern dieser Reihe geschwind und ziemlich genau zu finden.

finden, zeigt Herr Lambert in seiner lesenswürdigen Abhandlung von Verwandlung der Brüche. Beytr. zur Math. 2. Th. 1. Abth. p. 116 - 125.

103. Zus. 2. Will man in den Quadranten (102) statt des Halbmessers 1, den Durchmesser a hineinbringen, so darf man nur jedes Glied der Reihe in das Quadrat des Halbmessers $\frac{1}{2}a$, also in $\frac{1}{4}a^2$, multiplizieren, so kommt, für diesen Durchmesser a, der Quadrant

$$ACD = \frac{a^2}{4} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \dots \right)$$

$$\text{also } a^2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots \right) = \frac{a^2 P}{4} \text{ für den Innenhalt des}$$

ganzen Kreises; daß also die Summe der Leibnizischen Zahlenreihe $= \frac{1}{4}P$, dem vierten Theile des berechneten Ludolphischen Kreisumfangs P gleich ist.

104. Zus. 3. Auf eine ähnliche Art findet man für die Ellipse (Fig. 17.) für welche α, γ , die halben, große und kleine, Apen, die Tangente AT = z seyn mögen, den Sector

$$CAM = \frac{1}{2} \left(\alpha z - \frac{\alpha z^3}{3\gamma^2} + \frac{\alpha z^5}{5\gamma^4} - \frac{\alpha z^7}{7\gamma^6} + \frac{\alpha z^9}{9\gamma^8} \dots \right)$$

und eben so, für die Tangente TD = w; den Sector

$$CMD = \frac{1}{2} \left(\gamma w - \frac{\gamma w^3}{3\alpha^2} + \frac{\gamma w^5}{5\alpha^4} - \frac{\gamma w^7}{7\alpha^6} + \frac{\gamma w^9}{9\alpha^8} \dots \right)$$

Wenn nun AT = CD, oder $z = \gamma$; so ist auch TD = AC oder $w = \alpha$; Man sehe also diese Werthe von z, w, in die Reihen, so kommt $CAM = \frac{1}{2} (\alpha\gamma - \frac{1}{3}\alpha\gamma + \frac{1}{5}\alpha\gamma - \frac{1}{7}\alpha\gamma \dots) = CMD$; also beyder Summe, oder CAM + CMD d. i. der elliptische Quadrant

$$ACD = \alpha\gamma \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots \right)$$

und,

und, für α, γ , ihre Werthe $\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}c$ gesetzt; $CAD = \frac{ac}{4}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots)$ also, wenn $a = c$, oder für den Cirkel, $CAD = \frac{a^2}{4}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots)$ wie vorhin (103)

105. Zus. 4. Der elliptische Quadrant lässt sich also immer (90. 91. 93. 95. 104.) als ein Product $ac\Sigma$ der beyden Aren in eine Zahlenreihe Σ ausdrücken. Wenn also (Fig. 19. 20.) $ACD = ac\Sigma$; für den elliptischen Quadranten eines Kreises um den Ellipsen-Durchmesser a . Also verhalten sich beyde Quadranten, und folglich auch die ganze Ellipse zum ganzen Cirkel $= c : a$, wie die kleine Ellipsenaxe zur großen, oder umgekehrt, nachdem nun hier c kleiner oder größer angenommen wird als a , d. i nachdem man zum Durchmesser a des Cirkels die große (Fig. 19) oder kleine (Fig. 20) Axe der Ellipse nimmt, den Cirkel um, oder in die Ellipse schreibt. Eben so verhalten sich die elliptischen Ausschnitte ACM, MCD zu den gleichnamigsten correspondirenden Cirkelausschnitten $ACM', M'CD'$; ingleichen die Stücke $APM, CPMD$ der Ellipse, zu den zugehörigen Stücken $APM', CPM'D'$ im Cirkel $= c : a$, wie man aus der Vergleichung ihrer berechneten Werthe sowohl, als auch daraus abnehmen kann, weil die Flächen dieser Stücke mit den Summen der zugehörigen Ordinaten (79) übereinkommen, deren Verhältniß in beyden die vorerwähnte ist.

105. Zus. 5. Wenn von einem beliebigen Puncte E in dem Durchmesser a eines Cirkels, nach den Endpuncten M, M' der gemeinschaftlichen Ordinate $PM M'$ des Cirkels und einer damit verbundenen ein- oder umgeschriebenen Ellipse, deren beyde Aten a, c ; seyn

gen, die geraden Linien EM, EM' gezogen werden: so verhält sich auch der Cirkelausschnitt AEM' zu dem Ellipsenausschnitte AEM = $a:c$, wie die Cirkelaxe zu der andern Ellipsenaxe. Denn weil $\Delta P M': P M = a:c$ (105) und $\Delta P E M': \Delta P E M = P M': P M = C D': C D = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}c = a:c$; also $A P M' = \frac{a}{c} \cdot A P M$ und $P E M' = \frac{a}{c} \cdot P E M$; also $A P M' + \Delta P E M'$ oder $A E M' = \frac{a}{c} (A P M + \Delta P E M) = \frac{a}{c} \cdot A E M$, so ist $A E M': A E M = \frac{a}{c} : 1 = a:c$. Also ist der elliptische Ausschnitt AEM = $\frac{c}{a}$ von dem zugehörigen Cirkelausschnitt AEM', oder $A E M = \frac{c}{a} \cdot A E M'$; den letztern Ausschnitt aber kann man aus dem Cirkel so genau berechnen, als es nur immer die vorgesehete Schärfe erfordert, und also auch den elliptischen aus ihm finden. Dieser Sach hat in der Astronomie seinen vielfachen Nutzen, besonders in der Voraussezung, wenn E in dem einem Brennpuncte der Ellipse liegt.

107. Zus. 6. Wären a, c ; und α, γ ; zwey Paare Aren zweier verschiedenen Ellipsen E und E'; so wäre $E': E = a c \Sigma : \alpha \gamma \Sigma$ (105) oder $E': E = a c : \alpha \gamma = (a : \alpha) + (c : \gamma)$ also das Verhältniß zweier Ellipsen gegen einander aus den Verhältnissen ihrer Aren zusammengesetzt. Wäre auch $a = \alpha$; so wäre $a : \alpha$ als ein Verhältniß der Gleichheit bei der Zusammensetzung als 0 zu betrachten, und $E': E = c : \gamma$, in ratione simplici directa der beiden ungleichen Aren.

108. Zus. 7. Wenn C einen Kreiß vom Durchmesser a bedeutet, so ist $C:E = a^2 : \alpha\gamma$. Soll nun $C = E$, Kreiß und Ellipse einander gleich seyn, so muß auch $a^2 = \alpha\gamma$ seyn; also $a = \sqrt{\alpha\gamma}$ genommen werden: Es ist also die Ellipse einem Kreise gleich, dessen Durchmesser die mittlere Proportionale zwischen den beyden Axen der Ellipse ist. Da nun der Innenhalt des Kreises $C = \frac{a^2 P}{4}$, so ist der Ellipsen Innenhalt oder $E = \frac{\alpha\gamma P}{4}$; wo P die berechnete Ludolphische Peripherie 3, 141... bedeutet. Das Product also der beyden Ellipsenaxen in das Viertel der Ludolphischen Zahl, oder in 0, 7853... giebt die Quadratur der Ellipse (104) desto genauer, jemehr man Decimalen von dieser Zahl nimmt.

Da nun die Zahl P heut zu Tage weiter berechnet ist, als man sie bey dem Gebrauche zu irgend einer Absicht nöthig hat, so ist es allemal vortheilhafter die Quadratur der Ellipse auf den Cirkel zu reduciren, als eine der vorhergefundenen Zahlenreihen für die Ellipse daben zu gebrauchen, deren Richtigkeit und Schärfe sich auch, wenn es nöthig ist, aus der Zahl P übersehen lässt. Eben so bringt man auch die Berechnung einzelner Stücke der Ellipse auf den Cirkel, wie 106. zum Theil geschehen ist:

109. Aufg. 20. Die Quadratur einer hyperbolischen Fläche zu finden.

Aufl.

1) für die Fläche CpMA (Fig. 21.) wo $Cp = PM = y$; $pM = CP = u$; die Hauptaxe = a die andere c ist:

Die Gleichung einer solchen Hyperbel für die Abscissen (u) auf der Hauptaxe aus dem Mittelpuncte, ist bekanntermassen $y^2 = \frac{c^2 u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}$; also, durch Ver-

wandlung der Coordinaten, $u^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 y^2}{c^2} = \frac{a^2}{4 c^2}$

$(c^2 + 4y^2)$ die Gleichung für die Abscissen (y) auf einer der Hauptaxe senkrechten Linie pK durch den Mittelpunct C der Hyperbel. Hier ist also die Ordinate

$$u = \sqrt{\frac{a^2}{4c^2}(c^2 + 4y^2)} = \frac{a}{2c} \sqrt{c^2 + 4y^2} = \frac{a}{2c}$$

$(c^2 + 4y^2)^{\frac{1}{2}}$ und die Vergleichung dieses Ausdrucks mit (88) zeigt, daß man in der dortigen Reihe, nur a , c , $-u^2$ mit c , a , $+y^2$ verwechseln darf (welches also die geraden Glieder der Reihe positiv macht) um aus jener Reihe, die Reihe für die allgemeine Ordinate der Hyperbel

$$u = \frac{a}{2} + \frac{ay^2}{c^2} - \frac{1 \cdot 2' ay^4}{1 \cdot 2 \cdot c^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 2^2 ay^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c^6} - \dots$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 ay^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot c^8} \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-5) \cdot 2^{n-2} \cdot ay^{2n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) c^{2n-2}}$$

(positiv oder negativ, nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist) herzuleiten.

Und so kommt (66. 79)

$$CpMA = \frac{ay}{2} + \frac{ay^3}{3 \cdot c^2} - \frac{1 \cdot 2' ay^5}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot c^4}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot ay^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot c^6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 ay^9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9 c^8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^4 ay^{11}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 11 c^{10}}$$

$$-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 2^5 \cdot ay^{13}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 13 \cdot c^{12}} \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-5) 2^{n-2} \cdot ay^{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) (2n-1) c^{2n-2}},$$

wo die Erinnerung (88) wegen n hier nicht aus der Acht zu lassen ist. Denn sonst gäbe z. B. n = 1 oder n = 2 gesetzt, etwas ungereimtes oder widersprechendes in den Zahlencoeffienten, welches nicht zu verwundern ist, da das Gesetz, aus welchem das nte Glied der Reihe ausgedrückt worden ist, erst mit dem dritten Gliede anfängt, und sich also auf die ersten beyden Glieder nicht mit erstreckt. Eine ähnliche Erinnerung findet man (Alg. 733, II, p. 421.)

2.) Die Fläche $A\pi MA$ findet man, wenn man von $CpMA$ das Rectangel $ACp\pi = AC \cdot Cp = \frac{ay}{2}$ abzieht; dieses giebt

$$A\pi MA = \frac{ay^3}{3c^2} - \frac{1 \cdot 2^1 \cdot ay^5}{1 \cdot 2 \cdot 5 c^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot ay^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 c^6}$$

$$-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot ay^9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9 c^8} \text{ u. s. w.}$$

3.) Die Fläche AMP d. i. $CPMp - CAMP$ oder auch $APM\pi - AM\pi$ ist also $= xy - \frac{ay^3}{3 \cdot c^2}$
 $+ \frac{1 \cdot 2^1 \cdot ay^5}{1 \cdot 2 \cdot 5 c^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot ay^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 c^6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot ay^9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9 c^8} \text{ u. s. w.}$

wenn $x = AP$ ist. Wollte man hier x in y ausdrücken, so dürfte man nur den Werth von x aus der Gleichung $y^2 = \frac{c^2}{a^2} (ax + xx)$ in einer unendlichen Reihe suchen,

dieselbe in y multipliciren, und die gefundenen Glieder

mit den übrigen algebraisch addiren. Will man aber diesen Raum durchgängig in x haben, so suche man

$$y = \frac{c}{a} (ax + xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{cx^{\frac{1}{2}}}{a} (a+x)^{\frac{1}{2}} \text{ in einer unend-}$$

lichen Reihe, wo in (92) alles unverändert bleibt, ausser daß die geraden Glieder der Reihe hier positiv werden, weil in dem Binomio statt des dortigen $-x$ hier $+x$ befindlich ist. Also kommt

$$y = \frac{cx^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{cx^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{3}{2}}} - \frac{1 \cdot cx^{\frac{5}{2}}}{2 \cdot 4 a^{\frac{5}{2}}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot cx^{\frac{7}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^{\frac{7}{2}}} - u.s.w.$$

und $f(cy)$ oder

$$\begin{aligned} APM &= \sqrt{\frac{x}{a}} \left(\frac{2cx}{3} + \frac{cx^2}{5 \times 1 \cdot a} - \frac{1 \cdot cx^3}{7 \times 1 \cdot 4 \cdot a^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot cx^4}{9 \times 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot cx^5}{11 \times 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot a^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot cx^6}{13 \times 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot a^5} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot cx^7}{15 \times 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot a^6} \right) u.s.w. \end{aligned}$$

4) Den hyperbolischen Sector CAM zu berechnen, darf man nur von CAM p ein halbes Cp. p M $= \frac{1}{2}yu$ abziehen, und statt u die Reihe (no. 1.) substituieren, so kommt:

$$\begin{aligned} CAM &= \frac{ay}{2} + \frac{ay^3}{3c^2} - \frac{1 \cdot 2^3 ay^5}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot c^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 2^2 a y^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 c^6} \\ &\quad - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 ay^9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot c^8} \dots = \frac{y}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{ay^2}{c^2} - \frac{1 \cdot 2^3 ay^4}{1 \cdot 2 \cdot c^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 2^2 ay^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 c^6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 ay^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot c^8} \dots \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 2^2 a y^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c^6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 a y^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot c^8} \dots \text{ und nach}$$

gehöriger Verkürzung:

$$\begin{aligned} CAM &= \frac{ay}{4} - \frac{1 \cdot ay^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c^2} + \frac{3 \cdot ay^5}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot c^4} \\ &- \frac{10ay^7}{1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot c^6} + \frac{35ay^8}{1 \cdot 2 \cdot 9 \cdot c^8} - \frac{126ay^{10}}{1 \cdot 2 \cdot 11 \cdot c^{10}} \\ &+ \frac{462ay^{12}}{1 \cdot 2 \cdot 13 \cdot c^{12}} \text{ und so weiter} \end{aligned}$$

Das Gesetz der Divisoren fällt hier in die Augen. Die Zahlen, Coeffizienten der Zähler aber kommen mit den figurirten Zahlen (ver Rästn. Tabelle Alg. 726, welche die Alten Tabulam mirificam nennen) nach folgender Ordnung überein. Der Zähler 1; des zweyten Gliedes ist die erste Zahl derer in natürlicher Ordnung von 1 an fortgehenden Zahlen: der Zähler 3; des dritten Gliedes, die zweyte Triangularzahl: der Zähler 10; des vierten Gliedes, die dritte Quadrangularzahl: der Zähler 35; des fünften Gliedes, die vierte Quinquangularzahl: der Zähler 126; des sechsten Gliedes, die fünfte Sexangularzahl: der Zähler 462; des siebenden Gliedes, die sechste Septangularzahl; also der Zähler in des nten Gliedes die $(n-1)$ te ntangularzahl. Ich nenne hier Triangular-Quadrangular-Quinquangular- u. s. w. Zahlen, die Zahlen der dritten, vierten, fünften u. s. w. Columnne der angeführten Tafel, um sie dadurch ist von den Trigonals-Tetragonal-Pentagonal u. s. w. Zahlen (70—72) zu unterscheiden, mit welchen sie zwar einerley Ursprung (72) aber nicht immer einerley Bedeutung haben; weil bey den Zahlen (70—72) jede arithmetische Progession, bey den figurirten Zahlen hingegen, nur allein die Progression der in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen, zum Grunde liegen kann. Daher, wenn man in den

allgemeinen Gliedern (71) der Reihen C, D, E . . . durchgängig $d = 1$ setzt; so kommt $\frac{n}{2} (2 + [n - 1])$ für die allgemeine Formel der Triangularzahlen; $\frac{n \cdot n + 1}{2 \cdot 3}$ $(3 + [n - 1])$ für die allgemeine Formel der Quadrangularzahlen; $\frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ $(4 + [n - 1])$ für die allgemeine Formel der Quinquangularzahlen; also $\frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2 \dots [n + m - 3]}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots [m - 1]} ([m - 1] + [n - 1])$ für die allgemeine Formel der mtangularzahlen der Tafel, wo z. B. für die Quinquangularzahlen $m = 5$ u. s. w. ist. Von den Trigonal, Tetragonal-Pentagonal-rc. Zahlen in (70-72) hingegen, kommt es auf die Bestimmung von d an, so daß jede der hier angeführten Formeln (71) Trigonal-Tetragonal-Pentagonal rc. Polygonal-Pyramidal-Zahlen in der 72. festgesetzten Bedeutung g. ben kann. Daraus nun, daß man benderley Zahlen insgemein mit einerley, griechischen oder lateinischen, Namen benennt, können leicht Verwirrungen entstehen, die sich aber vermeiden lassen, wenn man die Zahlen (70-72) durchgehends Trigonal oder Triangular rc. Polygonal, Pyramidalzahlen, die Zahlen der Tafel (Alg. 726.) hingegen figürliche Trigonal- oder Triangular-rc. Zahlen nennt. Der figürlichen Triangular-Quadrangular- u. s. w. Zahlen Verhältniß zu den Binomialcoefficienten findet man bei dem Herrn Hofrath Kästner am angeführten Orte umständlich auseinander gesetzt. Die Bernoullischen Formeln der figur. Zahlen: $\frac{x \cdot x + 1}{1 \cdot 2}; \frac{x \cdot x + 1 \cdot x + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ &c. Art. Coniect.

P. H. C. 3. lassen sich aus den obigen, mit denen sie einerley sind, leicht herleiten.

5.) Den

5.) Den hyperbolischen Sector CAM (Fig. 22.) auf eine ähnliche Art, wie den Kreisausschnitt (101) zu berechnen, sehe man Tang. AT = z, CT = w; das übrige wie sonst, und nehme noch einen andern Sector CAN, dessen Unterschied von dem vorigen, oder CMN, kleiner sei als jede angebliche Fläche beträgt, und nenne das Element von z, oder Tt = e. Zieht man nun die unendlich kleinen Bogen TS, Mm, so sind außer den ähnlichen Sectors CTS, CMm auch CPM & CAT &

$$TSt(101) \text{ und } CT(w): AC\left(\frac{a}{2}\right) = Tt(e): TS = \frac{ea}{2w};$$

$$\text{ungleichen } AC\left(\frac{a}{2}\right) : CT(w) = CP(u) : CM = \frac{2uw}{a};$$

$$\text{und } CT(w) : TS\left(\frac{ea}{2w}\right) = CM\left(\frac{2uw}{a}\right) : Mm = \frac{eu}{w};$$

$$\text{also } CMm \text{ d. i. } \frac{1}{2} CM \cdot Mm = \frac{uw}{a} \cdot \frac{eu}{w} = \frac{eu^2}{a}. \text{ Der}$$

Sector CMm ist aber das Element des endlichen Sectors CAM, der aus der Summe aller zwischen dem Bogen AM enthaltenen Elementarssectoren zusammen gesetzt ist.

Diese Summe zu finden, muß man zuvor u in z ausdrücken, auf welches sich das e bezieht. Es ist aber

$$CA^2\left(\frac{a^2}{4}\right) : AT^2(z^2) = CP^2(u^2) : PM^2 = \frac{4u^2z^2}{a^2}$$

$$= \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4} \quad (\text{Alg. 402.}) \text{ also } u^2 = \frac{a^2c^2}{4(c^2 - 4z^2)};$$

welcher Werth von u^2 in $\frac{eu^2}{a}$ substituirt, $CMm =$

$$\frac{eac^2}{4(c^2 - 4z^2)} = \frac{eac^2}{4} \cdot \frac{1}{c^2 - 4z^2} \text{ giebt. Wenn}$$

man also 1 durch $c^2 - 4z^2$ gehörig dividirt, und die daher entstandene Reihe mit $\frac{eac^2}{4}$ multiplizirt, so kommt

$$e\left(\frac{az^0}{4} + \frac{az^2}{c^2} + \frac{4az^4}{c^4} + \frac{4^2az^6}{c^6} + \frac{4^3az^8}{c^8} \dots\right) =$$

C M m; und aus der Summe aller einzelnen Glieder (79)

$$\begin{aligned} CAM = & \frac{az}{4} + \frac{az^3}{3c^2} + \frac{4az^5}{5c^4} + \frac{4^2az^7}{7c^6} \\ & + \frac{4^3az^9}{9c^8} \dots \end{aligned}$$

110. Ann. Die von 1-5. berechneten Flächen beziehen sich auf die schiefwinklige oder ungleichseitige Hyperbel, so lange a und c verschiedene Größen haben. Setzt man aber in ihnen $a = e$, so bekommt man die Reihe dieser Flächen für die rechtwinklige oder gleichseitige Hyperbel. Noch ist zu erinnern, daß man bey den Quadraturen, und so auch bey den Rectificationen, Cubaturen, so wie überhaupt bey allen Größen, die durch eine unendliche Reihe gegeben sind, wohl Acht haben müsse, ob auch, und wie schnell die Reihe convergirt; welches von der Verhältniß des für die darin befindliche veränderliche Größe angenommenen Wertes, gegen die beständigen Größen, abhängt. Meistens kann man die Ordinate (y) in einer doppelten Reihe ausdrücken, von welcher die eine bey einer Kleinen die andere bey einer großen Abscisse (x) geschwind convergirt, für das Gegentheil aber divergiren und unbrauchbar seyn würde. Für $y = A \sqrt{a^2 + xx}$ oder $y = B \frac{x}{b+x}$, convergiren die daher entstehenden Reihen desto stärker, je kleiner x gegen a oder b ist. Für ein großes x hingegen, müste man

man für y den gleichgeltenden Ausdruck $A \sqrt{xx + aa}$
oder $B \frac{\alpha}{x+b}$ entwickeln, wenn die Reihe convergiren soll.

III. Aufg. 21. Den hyperbolischen Raum BPMD (Fig. 23.) zwischen zweien Ordinaten BD, PM, auf der Asymptote CT zu quadriren.

Aufl. Für $CB = \alpha$; $BD = \beta$; $BP = x$; $PM = y$;
den Asymptotenwinkel $FCT = k$; ist $(CB + BP) PM$
 $= CB \cdot BD$ (Alg. 412.) d. i. $(\alpha + x) y = \alpha \beta$, oder
 $y = \frac{\alpha \beta}{\alpha + x}$; also, wenn $p m$ dem PM unendlich nahe,

und $Pp = e$ gesetzt wird, $ey = \alpha \beta \cdot \sin. k \cdot \frac{e}{\alpha + x}$ (74)

$$= \alpha \beta \cdot \sin. k \cdot e \left(\frac{x^0}{\alpha} - \frac{x}{\alpha^2} + \frac{x^2}{\alpha^3} - \frac{x^3}{\alpha^4} \dots \right) = PpmM,$$

dem Elemente von BPMD, und die Summe aller
Elemente (79.) oder $BPMD = \alpha \beta \cdot \sin. k \times$

$$\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{x^3}{3\alpha^3} - \frac{x^4}{4\alpha^4} \dots \right) \text{ welche Reihe desto}$$

geschwindiger convergirt je kleiner x gegen α ist (110.)

112. Zus. 1 An die Endpunkte D, M, der beyden
Ordinaten BD, PM; ziehe man CD, CM; so ist $\Delta CDB = \frac{1}{2} CB \cdot BD \cdot \sin. k$ und eben so $\Delta CMP = \frac{1}{2} CP \cdot PM \cdot \sin. k$ oder, weil $CB \cdot BD = CP \cdot PM$; (Alg. 412.)
 $\Delta CDB = \Delta CMP$. Folglich auch $CDB - BOC + DOM = CMP - BOC + DOM$ d. i. Sect. hyp. DCM
 $=$ Trapez. hyp. BPMD. Eben so sind auch die hyper-
bolischen Ausschnitte MCN; NCS; SCV &c. den
jedesmaligen correspondirenden hyperbolischen Trape-

zen MPQN; NQRS; SRTV &c. über den Basibus PQ, QR, RT u. s. w. auf der Asymptote, gleich; daß also die Reihe (III.) eben sowohl für diese hyperbolischen Ausschnitte als für die asymptotischen Räume gilt.

113. Zus. 2. Für den Raum QNRS auf der Basi QR, zwischen den Ordinaten QN, RS, sey $CQ = \gamma$; $QR = z$; $RS = y$; also $(CQ + QR) RS = CB \cdot BD$, d. i. $(\gamma + z) y = \alpha \beta$; oder $y = \frac{\alpha \beta}{\gamma + z}$. Dieses giebt

$$(III.) QNRS = \alpha \beta \cdot \sin. k \left(\frac{z}{\gamma} - \frac{z^2}{2\gamma^2} + \frac{z^3}{3\gamma^3} \right)$$

$$- \frac{z^4}{4\gamma^4} \dots \text{ und } BPMD: QNRS = \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} \right)$$

$$+ \frac{x^3}{3\alpha^3} - \dots \right): \left(\frac{z}{\gamma} - \frac{z^2}{2\gamma^2} + \frac{z^3}{3\gamma^3} - \dots \right) \text{ Soll}$$

$$\text{nun } BPMD = QNRS \text{ seyn, so muß auch } \frac{x}{\alpha} = \frac{z}{\gamma},$$

d. i. $\alpha: x = \gamma: z$ oder $\alpha: \alpha + x = \gamma: \gamma + z$ d. i. $CB: CP = CQ: CR$ seyn. Man nehme also auf der Asymptote CT, einer Hyperbel, von C an so viel gleiche Verhältnisse als man will, so werden die hyperbolischen Räume, deren Bases die Differenzen der jedesmaligen beyden Glieder dieser Verhältnisse sind einander durchgehends gleich seyn.

114. Zus. 3. Wenn also CB, CP, CQ, CR, CT, &c. in geometrischer Progression auf der Asymptote genommen werden, so sind die hyperbolischen Räume über den Grundlinien CP — CB, d. i. BP; CQ — CP, d. i. PQ; CR — CQ, d. i. QR; CT — CR, d. i. RT &c. oder die Trapezen BM; MQ; QS; ST;

ST; &c. so wie die zugehörigen Ausschnitte DCM; MCN; NCS; SCV alle einander gleich, (112. 113.) so daß $BN = 2BM$; $BS = 3BM$; $BV = 4BM$ &c. Nun ist aber in der angenommenen Progression, $CP: CB = (CP: CB)^1$; $CQ: CB = (CP: CB)^2$; $CR: CB = (CP: CB)^3$; $CT: CB = (CP: CB)^4$ &c. oder, diese Verhältnisse sind der einfachen, der verdoppelten (duplicata) verdreifachten, vervierfachten u. s. w. Verhältniß, der als einfach betrachteten Verhältniß $CP: CB$ gleich. Also verhalten sich die Räume BM; BN; BS; BV; zu einander; wie die Logarithmen der Verhältnisse $CP: CB$; $CQ: CB$; $CR: CB$; $CT: CB$; d. i. wie die Zahlen 1; 2; 3; 4; oder wie die hier aufeinander folgenden Exponenten der einfachen Verhältniß $CP: CB$. Die Trapezen BM; BN; BS; BV; oder die ihnen gleiche (112) Sektoren DCM; MCN; NCS; SCV; können also als die Maße oder Logarithmen der nurgedachten Verhältnisse $CP: CB$; $CQ: CB$; $CR: CB$; $CT: CB$; angenommen werden, wenn man gleich anfangs BM als das Maß der einfachen Grundverhältniß $CP: CB$ d. i. $BM = \log. (CP: CB)$ fest setzt, so daß die Größe der übrigen Maße von der Größe des ersten Maßes BM abhängt. Die Größe aber eines solchen Maßes oder Logarithmen, läßt sich für eine gegebene Hyperbel allemal in einer Reihe wie (111.) ausdrücken, bey welcher es auf die Größe des eingeschriebenen Parallelogramms (welches man den Modul zu nennen pflegt) $CBDK = \alpha\beta \cdot \sin. k = CI \cdot IA \cdot \sin. k$, oder des Productes aus der Hyperbelpotenzen in den sinum des Asymptotenwinkels,

$$= \frac{a^2 + c^2}{16} \sin. k. \text{ (Alg. 413.) ankommt; und so er-}$$

fennst man schon hieraus überhaupt die Möglichkeit, wie sich ein logarithmisches System durch die Hyperbel dar-

darstellen lasse; das folgende wird dieses noch mehr aufklären.

115. Zus. 4. Die Abscissen CP, CQ, CR &c. auf der Asymptote CT, mögen zu einer angenommenen CB eine Verhältniß haben, welche sie wollen, so werden ihre asymptotischen Räume, so wie die zugehörigen Sectoren, sich allemal wie die Maße oder Logarithmen dieser Verhältnisse unter einander verhalten. Nun beschreibe man zwischen eben diesen Asymptoten noch eine andere, also ähnliche (Alg. 416. V.) Hyperbel LEH, und seze EB = δ , so verhalten sich die zu einerley Verhältnisse OP: CB gehörigen Maße oder Logarithmen in beyden Hyperbeln, oder BM: BH = $\alpha\beta$. sin. k

$$\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} \dots \right) : \alpha\delta. \sin. k \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} \dots \right)$$

[111.] = $\alpha\beta. \sin. k : \alpha\delta. \sin. k$, wie die eingeschriebenen Parallelogramme BK, BG; oder (wie man sich hier auszudrücken pflegt) wie die Modeln (114) beyder logarithmischen Systeme; oder auch wie $\alpha\beta : \alpha\delta$ d. i. wie die Potenzen $C1^2, Ci^2$ beyder Hyperbeln (Alg. 413.) Wenn also die Verhältnisse sowohl als die Hyperbeln, denen sie zugehören, verschieden sind: so verhalten sich die asymptotischen Räume, oder die correspondirenden Sectoren, gegen einander, zusammen wie die Maße oder Logarithmen der anliegenden Verhältnisse und die Modeln oder eingeschriebenen Parallelogrammen BK, BG.

116. Zus. 5. Es können also der Maße oder Logarithmen für ein und ebendasselbe Verhältniß, und also auch für andere, aus diesem auf irgend eine Art zusammengesetzte oder getheilte, Verhältnisse, so unzählig viele und verschiedene angenommen werden, als die Potenzen der Hyperbeln nur immer gegeneinander

verschieden seyn können. Ist aber diese Potenz, und mit ihr der Modus (118) des logarithmischen Systems einmal festgesetzt, so ist auch zugleich dadurch die Größe aller asymptotischen Hyperbelräume, aus welchen die Verhältnisse der Abscissen auf der Asymptote gemessen werden, bestimmt, so daß jede Hyperbel ein vollständiges logarithmisches System giebt, wenn einmal eine Verhältniß der Abscissen auf der Asymptote als eine einfache Grundverhältniß fest gesetzt worden ist.

117. Ann. Logarithmen der Zahlen, oder der in Zahlen ausgedrückten Verhältnisse, werden eigentlich dieselben Zahlen genannt, welche anzeigen, wie eine gewisse gegebene Verhältniß $p:q$, aus einer andern, die man als eine einfache Verhältniß zum Grunde legt, durch Zusammensetzung oder Theilung der letztern, entstehen könne. Es sey die gegebene Verhältniß $p:1$ (wo $q=1$ gesetzt wird) und $n:1$ sey die einfache Grundverhältniß, die Einheit, aus welcher man $p:1$ messen will; so ist, wenn $p:1 = (n:1)^m$ befunden wird, die gegebene Verhältniß $p:1$ aus m Verhältnissen, jede wie $n:1$, zusammengesetzt, (die intuplicata von $n:1$) oder m ist der Logarithme von $p:1$ und also auch, auf den Fall, der Logarithme von $\frac{p}{1}$

oder von der Zahl p . Für $p:1 = (n:1)^{\frac{1}{m}}$ wäre $p:1$ nur $\frac{1}{m}$ mal so gross wie $n:1$ (die sub-intuplicata von $n:1$) oder $\frac{1}{m}$ wäre der Logarithme von $p:1$ oder von der Zahl p . Bei der Hyperbel werden die geometrischen Verhältnisse durch die Abscissen auf der Asymptote, also durch gerade Linien, ausgedrückt, zu denen die anliegenden asymptotischen Räume als Logarithmen gehör-

ren, die sich auf das eingeschriebene Parallelogramm BK (114) oder den Model als eine beständige Größe oder Einheit beziehen. Man begreift leicht, daß das, was hier von der Hyperbel, in Absicht auf die Logarithmen gesagt worden ist, sich auch auf alle Arten von Größen anwenden lasse, und daß überhaupt jede Linie, jede Fläche, jede ausgedehnte Größe, jede Zahl u. s. w. den Logarithmen einer angenommenen Grundverhältniß $n : m$ vorstellen könne; so daß $l, 2l, 3l, 4l, \&c.$ als Maasse oder Logarithmen der Verhältnisse $\frac{n}{m}, \frac{n^2}{m^2}, \frac{n^3}{m^3}, \frac{n^4}{m^4}, \&c.$ anzusehen sind, wenn einmal l zum Maasse der als einfach betrachteten Verhältniß $n : m$ angenommen werden ist.

Bey der logarithmischen Linie z. E. deren Gleichung $y = c^x$ (Anal. 213 II.) für die Grundverhältniß $c : 1$ ist, werden die Verhältnisse oder Zahlen in einer geometrischen Reihe der Ordinaten c^x , die Logarithmen hingegen in einer arithmetischen Reihe der Abscissen x vorgestellt. Die Verbindung beider Reihen giebt hier ein logarithmisches System, dessen Model die beständige Substanz genente = 1 der logarithmischen Linie, und c die Basis ist; denn dasjenige Glied der geometrischen Reihe, oder die Zahl, zu welcher der Logarithme 1 gehört, wird die Basis oder das Fundamentalglied des Systems genannt, weil dadurch bestimmt wird, was für Logarithmen zu den Verhältnissen oder Zahlen gehören. Die Verhältniß eines solchen Fundamentalgliedes zur Einheit, wird vom Cotesius die Modularkarverhältniß genannt. Sie ist mit derjenigen Verhältniß, deren Logarithme dem Model des Systems gleich ist, einerley; und diese ist für jedes System eine und eben dieselbe, also eine beständige Verhältniß.

Diese Elementarbegriffe, die größtentheils aus den Anfangsgründen bekannt sind, muß man bey Betrachtung und Behandlung der Logarithmen immer gegenwärtig haben.

118. Zus. 6. Weil $BPMD = \text{Log.} (CP : CB)$
 (114) so ist $PpmM = \text{el. Log.} (CP : CB) = PM \cdot Pp$
 $= \frac{BK}{CP} \cdot Pp = BK \cdot \frac{\text{elem. CP}}{CP}$ d. i. $\alpha\beta \cdot \sin. k \cdot \frac{e}{\alpha+x}$,

wenn $Pp = e$ gesetzt wird. Also ist die Summe aller dieser Elemente, oder $BPMD$ d. i. $\text{Log.} (CP : CB) =$

$$\alpha\beta \cdot \sin. k \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{x^3}{3\alpha^3} \dots \right) [111] \text{ oder } BK.$$

$$f\left(\frac{\text{elem. CP}}{CP}\right) = M \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{x^3}{3\alpha^3} \dots \right) \text{ wenn}$$

man den Modell BK oder $\alpha\beta \cdot \sin. k = M$ setzt. Das Element des Logarithmen einer Größe ist also dem Elemente dieser Größe, durch die Größe selbst dividirt, gleich; folglich $\text{Elem. log. } y = \frac{e}{y}$; Elem.

$$l(\alpha \pm z) = \pm \frac{e}{\alpha \pm z}; \text{ und umgekehrt: } f\left(\frac{e}{y}\right) =$$

$$\log. y; f\left(-\frac{e}{x}\right) = -\log. x = \log. \frac{1}{x}; f\left(\pm \frac{e}{\alpha \pm z}\right)$$

$= \log. (\alpha \pm z)$; wo e immer das Element der im Divisor befindlichen veränderlichen Größe bedeutet; und also (67. u. 87. Ex. 3.) hierdurch ergänzt wird. Wenn

also el. log. $(CP : CB) = \frac{BK}{CP} \cdot Pp$, so ist $Pp : CP = \text{el.}$

$\text{Log.} (CP : CB) : BK$, welches zu Erfindung des Modells $M = BK$ gebraucht werden kann.

119. Zus. 7. Den Raum $BPMD$ in den beyden Axen a, c , der Hyperbel auszudrücken, sehe man BK
 oder $M = \frac{a^2 + c^2}{16} \sin. k$. (114) so kommt El. $BPMD$

$$\text{oder PM. Pp d. i. BK. } \frac{Pp}{CP} = \frac{a^2 + c^2}{16} \sin. k \frac{\text{el. CP}}{CP};$$

wo CP als eine Zahl anzusehen ist. Nimmt man nun für selbige CB = α zur Einheit an: so giebt die Summe aller $\frac{\text{el. CP}}{CP}$, oder $\int (\frac{Pp}{CP})$ den Logarithmen von $\frac{CP}{CB}$,

$$(118) \text{ woraus BPMD} = \frac{a^2 + c^2}{16} \sin. k. \text{Log. } \frac{CP}{CB} \text{ folgt.}$$

Für die gleichseitige oder rechtwinklige Hypothenuse wäre sin. k = 1; a = c; und die asymptotische Fläche

$$\text{BPMD} = \frac{a^2}{8} \cdot \log. \frac{CP}{CB} = \frac{a^2}{8} \cdot \log. \left(\frac{\alpha+x}{\alpha} \right) =$$

DCM, dem zugehörigen hyperbolischen Ausschnitte.

Für x = 0, wird die gesuchte Fläche = $\frac{a^2}{8} \cdot \log. \frac{\alpha}{a}$
 $= \frac{a^2}{8}$, log. 1. verschwinden, weil log. 1 = 0, daß also

hier keine Constante weiter hinzutun ist.

120. Zus. 8. Wenn man in dem Verhältnisse CP: CB; CB oder $\alpha = 1$ setzt, so kann CP jede positive, ganze oder gebrochene Zahl vorstellen, weil CP auch kleiner als CB angenommen, also auch BP = -x werden kann. Als dann wird BPMD = log. (CP: 1) = log. CP = 1(x+1) und

Log. (1+x) = M (x - $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \dots$)
 (111) Für ein negatives BP, zwischen B und C, darf man nur in die vorhergehende Reihe -x statt +x setzen, oder die ungeraden Potenzen von x mit entgegengesetzten Zeichen schreiben, so kommt

Log.

$\text{Log. } (1-x) = M \left(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \dots \right)$ also negativ, wie es für einen Bruch sein muß.
 Hier nun wird, weil $\text{Log. } 1 = 0$; in beiden Fällen, für $x = 0$, auch $\text{log. } (1+x); 1(1-x)$; so wie die diesen Logarithmen zugehörigen Reihen, gleich Null, daß also beide Reihen, ohne Zuthitung einer beständigen Größe, vollständig sind. Setzt man hier $x = \frac{z}{a}$ so kommt

$$\text{Log. } \left(\frac{a+z}{a} \right) = M \left(\pm \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} \mp \frac{z^3}{3a^3} - \frac{z^4}{4a^4} \dots \right)$$

$$\begin{aligned} \text{oder Log. } (a \pm z) - \text{Log. } a &= M \left(\pm \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{z^3}{3a^3} - \frac{z^4}{4a^4} \dots \right) \end{aligned}$$

$$\text{und Log. } (a \pm z) = \text{Log. } a + M \left(\pm \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} \pm \dots \right)$$

121. Zus. 9. Wenn in einer Hyperbel der Modus $M = 1$ gesetzt wird, so werden die asymptotischen Räume, die sich auf diesen Modus beziehen, natürliche Logarithmen der anliegenden Verhältnisse (denn die Voraussetzung von $M = 1$ ist unter allen die einfachste und natürlichste) auch hyperbolische Logarithmen genannt; nicht deswegen als ob nur das natürliche, nicht auch die anderen logarithmischen Systeme, sich durch die Hyperbel darstellen ließen, sondern weil die natürlichen Logarithmen mit der Quadratur der Hyperbel zusammenhängen. In dem Verstande ist BPMD der natürliche Logarithme der Verhältnis CP: 1 oder $(1+x):1$ oder der Zahl $1+x$; also BPMD oder

$$\text{Log. hyp. } (1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \dots$$

und eben so

$$\text{Log. h}\ddot{\text{y}}\text{p. } (1-x) = -(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \dots)$$

und

$$\begin{aligned} \text{Log. hyp. } (\alpha+x) &= \log. \alpha + \frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{x^3}{3\alpha^3} \\ &\quad - \frac{x^4}{4\alpha^4} \dots = \log. \alpha + \frac{x}{\alpha + \frac{1}{2}x} * + \frac{x^3}{12\alpha^3} + \dots \end{aligned}$$

wie daraus erhellet, wenn man $\frac{x}{\alpha + \frac{1}{2}x}$ wirklich divi-

dirt, $\frac{x^3}{12\alpha^3}$ zu dem Quotienten addirt, und das Re-
sultat davon, mit den ersten Gliedern des vorigen Wer-
thes vergleicht. Verlangt man nur wenige Decimalen
des Logarithmen, nur die ersten genau, so werden die-
selben aus $\text{Log. hyp. } (\alpha+x) = \log. \alpha + \frac{x}{\alpha + \frac{1}{2}x}$ schon
hinlänglich berichtigt.

Die natürlichen Logarithmen pflegt man insgemein auch Nepperische Logarithmen zu nennen, wiewohl diese mit jenen nicht völlig überein kommen; worüber man Hr. Karsten in seinem vortrefflichen Lehrbegriffe der gesammten Mathematik 2. Theil S. 146. 147. nach-
lesen kann.

122. Zus. 10. Die asymptotischen Räume hingegen,
für welche der Modell M größer oder kleiner als 1 ange-
nommen wird, geben die künstlichen Logarithmen; und obzwar die Systeme dieser Logarithmen so verschieden, als die Hyperbeln selbst gegen einander seyn können: so lassen sie sich doch alle in einer und eben derselben Hyperbel dar-
stellen, nach der verschiedenen Benennung, die man dem

Modell

Model oder dem eingeschriebenen Parallelogramme giebt. Die gewöhnlichen Briggischen Logarithmen der berechneten Tafeln gehören zu den künstlichen; denn da man gleich ansangs die Logarithmen blos zu Abkürzung der beschwerlichsten arithmetischen Operationen brauchte; so fand man die berechneten Nepperischen nicht bequem genug dazu, deswegen versorgte Brigge, auf Neppers Anrathen, ein anderes System, von der Grund-Verhältniß 10:1, welches mit der eingeführten Decimal-Eintheilung der Zahlen besser harmonirt als die übrigen. Seitdem man aber, ausser diesem Vortheile, die logarithmischen Größen auch selbst zu brauchen genötigt worden ist, indem viele Aufgaben gerade zu darauf führen: so haben die hyperbolischen oder natürlichen Logarithmen nun angefangen unentbehrlich zu werden.

123. Zus. 11. Von A, dem Scheitel der rechtwinklischen Hyperbel GAMN (Fig. 24.) [denn das natürliche Logarithmen-System läßt sich unter allen Hyperbeln in der rechtwinklischen am deutlichsten darstellen] falle man auf die Asymptote CQ, den Perpendikel AB = 1; so ist CB = CI = AB = 1, die Seite der Hyperbels potenz BAIC, die hier zugleich den Model M = 1 abgibt. Wüßte man nun BP = x so zu bestimmen, daß ABPM = BAIC = M = 1 würde: so wäre die Ab-

scisse CP, und mit ihr die Zahl $\frac{CP}{CB} = 1 + x$, oder die
jenige Zahl, zu welcher die asymptotische Fläche ABPM
= 1, als Logarithme gehörte, und also die Basis oder
das Fundamentalglied (117.) des natürlichen Loga-
rithmensystems gefunden, auf welchem die Beschaffen-
heit und Einrichtung des ganzen Systems beruhet. Man
setze Log. $(1+x)$: 1 = L, so ist (120)

$L = M \left(x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \dots \right)$ also durch
Umkehrung dieser Reihe (Alg. 690. seqq.)

$$x = \frac{L}{M} + \frac{L^2}{1 \cdot 2 \cdot M^2} + \frac{L^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot M^3} + \frac{L^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot M^4} \dots$$

folglich ist

$$\frac{1}{1+x} : 1 = \left(1 + \frac{L}{M} + \frac{L^2}{1 \cdot 2 \cdot M^2} + \frac{L^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot M^3} + \frac{L^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot M^4} \dots \right) : 1, \text{ die Verhältnis, deren Logarithme } L \text{ ist, und für den angenommenen Fall, d. i. für das natürliche Logarithmen-System, in welchem } L = M = 1$$

$$1+x = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \dots = 2, 7182818284590452 \dots \text{ die}$$

Verhältnis dieser Zahl, oder der Basis zur Einheit, oder
2, 718281828 \dots : 1, d. i. 1 : 0, 367879441 \dots
gibt das Modularverhältnis (117.) des natürlichen
Logarithmen-Systems.

124. Aufg. 22. Den natürlichen Logarithmen
einer Zahl, die kleiner ist als 2. zu finden.

Aufl. In eine der beyden Reihen (121) für Log.
(1+x); Log. (1-x) substituire man in x einen solchen
Werth, daß 1+x, oder 1-x, der gegebenen Zahl, des-
sen Logarithmen man sucht, gleich sey, so giebt die Sum-
me einer beträchtlichen Anzahl von Gliedern, den Loga-
rithmen um so genauer, je kleiner x gegen 1 ist; denn wenn

enn die Reihen (121) convergiren sollen, so muß
 $x < 1$, also $1+x < 2$ seyn. Dies rechtfertige die Ein-
 hränkung des Sahes.

125. Exemp. Für den Logarithmen des Verhälts-
 nisses $4:3$, oder $\frac{4}{3}:1$; d. i. der Zahl $\frac{4}{3}$, wäre, $x = \frac{1}{3}$ ges-
 etzt, Log. $(1+x)$ oder

$$\begin{aligned} \text{Log. } \frac{4}{3} &= \frac{\frac{1}{1}}{1 \cdot 3} - \frac{\frac{1}{1}}{2 \cdot 3^2} + \frac{\frac{1}{1}}{3 \cdot 3^3} - \frac{\frac{1}{1}}{4 \cdot 3^4} + \\ &\quad \frac{\frac{1}{1}}{5 \cdot 3^5} - \frac{\frac{1}{1}}{6 \cdot 3^6} + \frac{\frac{1}{1}}{7 \cdot 3^7} - \frac{\frac{1}{1}}{8 \cdot 3^8} \dots = \text{Log. } (4:3) \end{aligned}$$

Man löse also $\frac{1}{3}$ in einen Decimalbruch auf, und di-
 vidiere ihn mit 3 , den Quotienten wieder mit 3 , und so
 weiter fort, nach dem man viel oder wenig Glieder sum-
 mieren will: so geben die, auf so eine Art gefundenen Zah-
 len, in ihrer Ordnung mit $1; 2; 3; 4; \dots$ c. dividiert, die
 einzelnen Glieder der Reihe und ihre algebraische Summe
 den gesuchten Logarithmen. Nun ist

$$\frac{1}{3} = 0,333333333\dots = A \text{ oder } 0,33333333 = \frac{A}{1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3^2} = 0,11111111\dots = B \text{ und } 0,055555555 = \frac{1}{2} B = \frac{1}{2 \cdot 3^2}$$

$$\frac{1}{3^3} = 0,037037037\dots = C \quad - 0,012345679 = \frac{1}{3} C = \frac{1}{3 \cdot 3^3}$$

$$\frac{1}{3^4} = 0,012345679\dots = D \quad - 0,003086419 = \frac{1}{4} D = \frac{1}{4 \cdot 3^4}$$

$$\frac{1}{3^5} = 0,004115226\dots = E \quad - 0,000823045 = \frac{1}{5} E = \frac{1}{5 \cdot 3^5}$$

$$\frac{1}{3^6} = 0,0001371742.. = F \text{ und } 0,000228623 = \frac{1}{6} F = \frac{1}{6 \cdot 3^6}$$

$$\frac{1}{3^7} = 0,000457247.. = G - 0,000065321 = \frac{1}{7} G = \frac{1}{7 \cdot 3^7}$$

$$\frac{1}{3^8} = 0,000152415.. = H - 0,000019051 = \frac{1}{8} H = \frac{1}{8 \cdot 3^8}$$

$$\frac{1}{3^9} = 0,000050805.. = I - 0,000005645 = \frac{1}{9} I = \frac{1}{9 \cdot 3^9}$$

$$\frac{1}{3^{10}} = 0,000016935.. = K - 0,000001693 = \frac{1}{10} K = \frac{1}{10 \cdot 3^{10}}$$

$$\frac{1}{3^{11}} = 0,000005645.. = L - 0,00000513 = \frac{1}{11} L = \frac{1}{11 \cdot 3^{11}}$$

$$\frac{1}{3^{12}} = 0,000001881.. = M - 0,000000161 = \frac{1}{12} M = \frac{1}{12 \cdot 3^{12}}$$

also $A + \frac{1}{3} C + \frac{1}{5} E + \frac{1}{7} G + \frac{1}{9} I + \frac{1}{11} L - (\frac{1}{2} B + \frac{1}{4} D + \frac{1}{6} F + \frac{1}{8} H + \frac{1}{10} K + \frac{1}{12} M) = \text{Log. } \frac{4}{3} = 0, 2876820. 34$
bis auf 7. Decimalstellen vollkommen genau. Dieser Logarithme negativ genommen, wäre der Logarithme des Verhältnisses 3: 4 oder $\frac{3}{4}: 1$ oder der Zahl $\frac{3}{4}$.

Eben so käme $x = \frac{1}{3}$ in $\text{Log.}(1-x)$ substituiert,
 $\text{Log.}(1-x)$ oder

$$\text{Log. } \frac{2}{3} = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{4 \cdot 3^4} + \frac{1}{5 \cdot 3^5}\right)$$

$$+ \dots = - (A + \frac{1}{2} B + \frac{1}{3} C + \frac{1}{4} D \dots + \frac{1}{12} M) = - 0, 405465.038 = \text{Log. } (2: 3) \text{ Dieser Logarithme positiv genommen, wäre der Logarithme des Verhältnisses } 3: 2 \text{ oder } \frac{3}{2}: 1, \text{ d. i. der Logarithme der Zahl } \frac{3}{2}.$$

In

In beyden Reihen muß man hier viel Glieder berechnen, wenn man den Logarithmen auf wenige Decimalen genau haben will; und die Logarithmen der Zahlen über 2. findet man durch sie gar nicht, weil die Reihen alsdenn divergiren. Dieser Unbequemlichkeit wird durch nachstehende Aufgabe mit ihren Zusätzen abgeholfen.

126. Aufg. 23. Die natürlichen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10; durch eine Reihe zu finden, die geschwinder convergiert als die beyden vorrigen.

$$\text{Aufl. Weil (120) } \log. (\alpha + x) = l \alpha + M \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{x^3}{3\alpha^3} \dots \right) \text{ und } \log. (\alpha - x) = l \alpha - M \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{x^3}{3\alpha^3} \dots \right) \text{ so ist } L(\alpha + x) - L(\alpha - x)$$

oder $L \left(\frac{\alpha + x}{\alpha - x} \right) = 2M \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{x^3}{3\alpha^3} + \frac{x^5}{5\alpha^5} + \frac{x^7}{7\alpha^7} \dots \right)$

$$L \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2M \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \dots \right)$$

allgemein für jedes System. Für das natürliche ist auch $M = 1$ also

$$L \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \dots \right)$$

Nun sey $\frac{1+x}{1-x} = n$, einer willkürlichen ganzen Zahl, deren Logarithmen man sucht, so ist $x = \frac{n-1}{n+1}$; ein eigentlicher Bruch, und die Reihe für $L\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, deren Glieder von zween zu zween Graden steigen, wird um so schneller convergiren, je kleiner n ist, und so kann man den Logarithmen jeder gegebenen ganzen Zahl n , aus $L\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ allemal unmittelbar finden, weil die Reihe dafür niemals divergit so groß auch n ist.

Für $x = \frac{1}{n}$, wäre $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n-1}$, so wie für $x = \frac{1}{2n}$ die Zahl $\frac{1+x}{1-x} = \frac{2n+1}{2n-1}$, also in beyden Fällen ein Asterbruch, wo die Reihe für ein größeres n sich schneller nähert. Dieses dient, die Logarithmen solcher Brüche durch Reihen zu finden, die sehr schnell convergiren, aus denen man nachher die Logarithmen größerer Zahlen geschwind haben kann. Man seze z. E. $x = \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \frac{1}{9}; \frac{1}{13}$; so giebt die Reihe für Log. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ die Logarithmen von $\frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{7}{6}$; viel geschwinder als die beyden Reihen in (125) und so findet man aus diesen Logarithmen unzählig andere. Wenn also

Log. $\frac{3}{2} = 0,4054651\dots$ Log. $\frac{4}{3} = 0,2876820\dots$;

[125]

$\text{Log. } \frac{5}{4} = 0, 2231435\dots$ $\text{Log. } \frac{7}{6} = 0, 1541506\dots$
so ist

$\text{Log. Nat. } 1 = 0, 00000\ 00000\ 00000\ 00000$
 $00000 = \text{Log. } 1.$

$\text{Log. } \frac{3}{2} + \text{Log. } \frac{4}{3} = 0, 69314\ 71805\ 59945\ 30941$
 $72321 = \text{Log. } 2.$

$\text{Log. } \frac{3}{2} + \text{Log. } 2 = 1, 09861\ 22886\ 68109\ 69139$
 $52451 = \text{Log. } 3.$

$2 \text{ Log. } 2 = 1, 38629\ 43611\ 19890\ 61883$
 $44642 = \text{Log. } 4.$

$\text{Log. } \frac{5}{4} + \text{Log. } 4 = 1, 60943\ 79124\ 34100\ 37460$
 $07593 = \text{Log. } 5.$

$\text{Log. } 2 + \text{Log. } 3 = 1, 79175\ 94692\ 28055\ 00081$
 $24773 = \text{Log. } 6.$

$\text{Log. } \frac{7}{6} + \text{Log. } 6 = 1, 94591\ 01490\ 55313\ 30510$
 $54639 = \text{Log. } 7.$

$3 \text{ Log. } 2 = 2, 07944\ 15416\ 79835\ 92825$
 $16964 = \text{Log. } 8.$

$2 \text{ Log. } 3 = 2, 19722\ 45773\ 36219\ 38279$
 $04905 = \text{Log. } 9.$

$\text{Log. } 2 + \text{Log. } 5 = 2, 30258\ 50929\ 94045\ 68401$
 $79914 = \text{Log. } 10.$

Die Logarithmen dieser Zahlen, so weit berechnet, sind aus Hrn. Eulers Introd. ad Anal. infin. P. I. §. 123. genommen.

127. Zus. 1. Auf diese Art kann man die Logarithmen aller Zahlen, selbst der Primzahlen, immer so genau finden, als es die vorhabende Absicht verlangt. Man kann auch hierzu die bereits gefundenen Logarithmen mit Vortheil gebrauchen. Denn wenn man den Logarithmen von

von α hat, so findet man hieraus (120) den natürlichen

$$L(\alpha \pm x) = \text{Log. } \alpha \pm \frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} \pm \frac{x^3}{3\alpha^3} - \frac{x^4}{4\alpha^4} \dots$$

oder, wenn sich diese Reihe noch zu langsam nähert,

$$L(\alpha+x) = L(\alpha-x) + 2\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{x^3}{3\alpha^3} + \frac{x^5}{5\alpha^5} + \frac{x^7}{7\alpha^7} \dots\right)$$

128. Exemp. Für $\alpha=10$; $x=1$, wäre der Primzahlglied Logarithme, oder

$$\begin{aligned} \text{Log.}(10+1) &= \text{Log.}(10-1) + \frac{2}{10} + \frac{2}{3 \cdot 10^3} + \frac{2}{5 \cdot 10^5} \\ &+ \frac{2}{7 \cdot 10^7} \dots \text{ d. i.} \end{aligned}$$

$$\text{Log. } 9 = 2, 197224577336219382560 \dots$$

$$\frac{2}{10} = 0, 20000000000000000000 \dots$$

$$\frac{2}{3 \cdot 10^3} = 666666666666666666 \dots$$

$$\frac{2}{5 \cdot 10^5} = 400000000000000000 \dots$$

$$\frac{2}{7 \cdot 10^7} = 28571428571428 \dots$$

$$\frac{2}{9 \cdot 10^9} = 222222222222 \dots$$

$$\frac{2}{11 \cdot 10^{11}} = 1818181818 \dots$$

$$\frac{2}{13 \cdot 10^{13}} = 15384615 \dots$$

Log.

$\frac{2}{15 \cdot 10^{15}}$	=	133333 . . .
$\frac{2}{17 \cdot 10^{17}}$	=	1176 . . .
$\frac{2}{19 \cdot 10^{19}}$	=	10 . . .

also Log. Nat. 11. = 2, 3978952727983705438.28 . . .

128. Zus. 2. Hyperbolische (121) oder natürliche Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100; ingleichen der Zahlen von 1 bis 10, nach allen 100ten Theilen, findet man bis auf 7. Decimalstellen berechnet, in des großen Berliner Geometrae Hrn. Lamberts Zusätzen zu den logar. und trigon. Tabellen Tab. 13. 15. Die erste Tafel hat Herr Lambert selbst, die letztere der Engländer Simpson berechnet, und kann selbige nach Hrn. Lamberts Erinnerung zugleich als eine Logarithmen-Tafel der Zahlen von 100. bis 1000. gebraucht werden, wenn man zu den Simpson. Logarithmen den Log. 100 = 4, 6051702 addirt, so ist z. E. Log. 2, 91 + 4, 6051702 = Log. 291.

129. Zus. 3. Durch Hülfe dieser Tafeln kann man auch die Logarithmen solcher Zahlen finden die zwischen zwei nächst auf einander folgende ganze Zahlen fallen, und dabei die erste Formel (127) gebrauchen. Denn weil

$$\text{Log. } (\alpha + x) = \log \alpha + \frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{x^3}{3\alpha^3} \dots = \log \alpha + \frac{x}{\alpha + \frac{1}{2}x} + \frac{x^3}{12\alpha^3} \dots \quad (121)$$

so ist es schon hinlänglich

$L(\alpha + x)$

$L(\alpha+x) = \log \alpha + \frac{x}{\alpha + \frac{1}{2}x}$ zusehen, wenn man den Logarithmen der Zahl nur in wenigen Decimalen verlangt. Gesetzt man wollte den Logarithmen von $3, 1415926\dots$ dem berechneten Umfange des Kreises, suchen: so nehme man aus der 15. Tabelle den Logarithmen von $3, 14$; so ist alsdenn $\alpha=3, 14$; $x=0, 0015926$; und $\frac{1}{2}x=0, 0007963$, also $\frac{x}{\alpha + \frac{1}{2}x} = \frac{0, 0015926}{3, 1407963} = 0, 0005071$

und hierzu Log. $3, 14 = 1, 144227$ aus der Tafel addirt, kommt Log. $3, 1415926 = 1, 1447298\dots$ für diese Decimalen genau.

130. Aufg. 24. Die Zahl zu finden, die einem gegebenen hyperbolischen Logarithmen zugehört.

Aufl. Weil Log. hyp. $(\alpha+x) = \log \alpha + \frac{x}{\alpha + \frac{1}{2}x}$

(121) so ist $\log. (\alpha+x) - \log. \alpha = \frac{x}{\alpha + \frac{1}{2}x} = \delta$, der

Differenz beyder Logarithmen, und $x = \frac{\alpha \delta}{1 - \frac{1}{2} \delta}$. Nun

kann man die Zahl, die dem gegebenen Logarithmen zugehört, immer als eine zweytheilige Zahl $\alpha+x$ ansehen, von welcher man den ersten Theil α sogleich haben kann, indem man für $\log. \alpha$ denjenigen Logarithmen aus der Tafel nimmt, der dem $\log. (\alpha+x)$ am nächsten kommt. Beyder Differenz giebt δ ; und so findet man $\alpha+x =$

$\alpha + \frac{\alpha \delta}{1 - \frac{1}{2} \delta} = \frac{\alpha(1 + \frac{1}{2} \delta)}{1 - \frac{1}{2} \delta}$. Ist der gegebene Loga-

rithme, ohne Rücksicht auf das vorstehende Zeichen, grösser als $\log. 10$; so addirt oder subtrahirt man den Loga-

rithmen

rithmen von 10, so oft, bis die Summe oder der Rest kleiner ist als $\log. 10$, und erniedrigt oder erhöht sobalden die Ziffern der gefundenen Zahl $\alpha + x$, auf so viel Decimalstellen, so vielfach man ansänglich für den gegebenen negativen oder positiven Logarithmen, den Logarithmen von 10 dazu addirt, oder davon subtrahirt gehabt hat.

131. Expl. Es sey der gegebene Logarithme = 4, 8546310, so ziehe man zuerst hiervon 2 log. 10 = 4, 6051702 ab, und sehe den Rest

$$0,2494608 = \log. (\alpha + x)$$

Nun ist $\log. 1,28 = 0,2468600$; (Lamb. T. 15.) = $\log. \alpha$;

also $\alpha = 1,28$; und $0,0026008 = 1(\alpha + x) - 1\alpha = i$

$$\text{und } 0,0013004 = \frac{1}{2} \delta$$

$$\text{und } 1 - \frac{1}{2} \delta = 0,9986996;$$

$$\text{Folglich } \frac{\alpha \delta}{1 - \frac{1}{2} \delta} = \frac{0,003329024}{0,9986996} = 0,0033333 \cdot 5 \dots = x$$

wo alle Zahlen, bis auf die letztere, zuverlässig sind. Hieraus bekommt man $\alpha + x = 1,2833333 \dots$ oder die Zahl, die dem Logarithmen 0,2494608 zugehört; und 128,33333 ... für die Zahl des gegebenen Logarithmen 4,6051702. [130]

132. Zus. Insgemein kann man mit dieser Regel zufrieden seyn, zumal wenn man die Zahl nicht auf viele Decimalstellen genau verlangt. Man bedient sich aber auch hierbei sehr oft folgender Reihe

$$z = y \left(1 + \frac{\delta l \varepsilon}{1} + \frac{\delta^2 (l \varepsilon)^2}{1 \cdot 2} + \frac{\delta^3 (l \varepsilon)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\delta^4 (l \varepsilon)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \dots \right)$$

Hier

Hier bedeutet z die zu suchende Zahl des gegebenen $\log. z$; y die Zahl desjenigen Logarithmen der Tafel, der dem Logarithmen von z am nächsten kommt. Beyder Differenz, oder $1z - 1y$ giebt δ , und die Reihe wird um so schneller convergiren, je kleiner δ ist. Für $1s$ muß man hier immer den natürlichen Logarithmen der Basis des logarithmischen Systems nehmen, zu welchem $\log. z$ gehört. Für hyperbolische Logarithmen ist also $1s = 1$; für das Briggische System hingegen $1s = \log. \text{hyp. } 10 = 2$, $3025 \dots$. Für $\log. \text{hyp. } z = 0,2494608$ wäre $\log. y = 0,2468600$ und $y = 1,28$ also $\log. z - \log. y$ oder $\delta = 0,0026008$ dieses giebt sodann $z = 1,28 \times (1 + 0,0026008 + 0,000033820 + 0,000000029 \dots) = 1,2833333 \cdot 54$ also die gesuchte Zahl nicht genauer wie vorhin (131) weil $\log. z$ wenig Decimalstellen gehabt hat, und man auch nicht immer $1y$, und folglich auch $1z - 1y$ in vielen Decimalstellen aus den Tafeln nehmen kann, wenn auch schon $1z$ sehr weit und genau gegeben wäre.

133. Aufg. 24. Aus dem gegebenen natürlichen Logarithmen L einer Zahl, den künstlichen Logarithmen l eben derselben Zahl eines andern Systems, dessen Model m seyn soll, zu finden.

Aufl. Weil (126) $\log. \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ d. i. $1 = 2m$
 $(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots)$ also für $m = 1$, oder für das natürliche System, $\log. \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ oder $L = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots \right)$ so ist $L:l = 2:2m = 1:m$, und es verhalten sich die Logarithmen einer Zahl aus verschiedenen

nen Systemen, wie ihre Modeln (115.) auch ist $l = mL$, oder, der künstliche Logarithme (122) einer Zahl kommt heraus, wenn man den natürlichen Logarithmen eben derselben Zahl mit dem Modell des künstlichen Systems multiplicirt. Weil nun die

Reihe für Log. $\left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ sich allemal nähert, (126) wie

groß auch die Zahl $\frac{1+x}{1-x}$ ist, so wird hierdurch die Be-

denklichkeit gehoben, die Herr Hofrath Kästnern (An. 229.) veranlasset hat, diesen Satz aus andern Gründen herzuleiten (227. 228.) als diejenigen sind, deren man sich insgemein zu bedienen pflegt.

134. Exemp. In dem Briggischen Systeme ist 10 ; die Basis, also (117) Log. Brigg. $10 = 1$. Um nun den Briggischen Logarithmen einer Zahl, aus dem gegebenen natürlichen Logarithmen derselben Zahl, zu finden, darf man nur suchen, was man in 133 statt in sezen müsse, daß $\log. 10 = 1$ werde. Da nun $l = mL$, das ist hier, $\log. \text{Brigg. } 10 = m \cdot \log. \text{Nat. } 10$. so ist

$$m = \frac{\log. \text{Brigg. } 10}{\log. \text{Nat. } 10} = \frac{1}{2,3025850\dots} \text{ oder, wenn man}$$

wirklich dividirt, $m = 0,434294481\dots$ der Modell des Briggischen Systems, womit man also den natürlichen Logarithmen einer Zahl multipliciren muß, (133) um den Briggischen Logarithmen derselben Zahl, wie solcher in den gewöhnlichen Tabellen steht, zu finden. Eben so fände man den natürlichen Logarithmen einer Zahl, aus dem Briggischen, wenn man diesen mit dem Quo-

tienten $\frac{1}{0,43429\dots}$ oder mit der Zahl $2,3025850\dots$ multiplicirte.

135. Zus. Ueberhaupt, wenn die Modeln m , m' zweener Systeme gegeben sind, so findet man aus einem gegebenen Logarithmen l des einen Systems, den zugehörigen Logarithmen l' derselben Zahl, in dem andern Systeme sogleich, wenn man den gegebenen Logarithmen l

mit dem Quotienten $\frac{m'}{m}$ multiplicirt; und so ist $l' = \frac{l m'}{m}$

und eben so $l = \frac{l' m}{m'}$, wenn l , m und l' m' zusammen gehörige Größen bezeichnen.

136. Anm. Was bisher von den natürlichen Logarithmen gesagt worden ist, kann hinlänglich seyn, sich einen deutlichen Begriff von diesem Systeme zu machen, aus welchem die andern alle hergeleitet werden können, (135) und das man genau verstehen muß, wenn man in dem höhern Calculo, besonders bey den Exponentialgrößen, gut fortkommen will. Herr Hausen, dem man hier größten Theils gefolgt ist, hat hiervon Arithm. Prop. XXVII. und Sect. Con. Prop. L. so wie, nach ihm, Herr Barsten Math. Subl. Sect. XXI. sehr ausführlich und schön gehandelt und zugleich den Zusammenhang der Hyperbel mit der logarithmischen Linie (Hausl. p. 281, 9.) und wie diese aus jener hergeleitet werden kann, erklärt. Die logarithmische Linie wird auch die Quadratrix der Hyperbel genannt, in so fern sich zeigen läßt, daß die Quadratur der letztern von jener abhängt.

137. Die im vorhergehenden gezeigte Methode, krumme Linien zu quadriren, erstreckt sich übrigens nicht nur auf algebraische Linien, sondern sie läßt sich eben so leicht auf transcendentische anwenden, wie ich in einigen Beispielen noch zeigen will, bey denen man zugleich sehen wird, wie viel öfters die Betrachtung der Figur, oder auch der für

die

die Linie gegebenen Gleichung, darzu beträgt, die Rechnung abzukürzen, und die dabei vorfallenden Schwierigkeiten zu erleichtern.

138. Aufg. 25. Die Fläche der gemeinen Cycloide AFBA (Fig. 25.) zu quadriren.

Aufl. Für den Halbmesser $AC = r$, ist $Ad \delta B$, oder des beschreibenden Kreises (circuli generatoris) halbe Peripherie $= Pr = BF$, und dieses Kreises Innhalt oder $C = Pr^2$. Nun nehme man $Ad = B\delta$; $Ae = B\epsilon$; $Ag = B\gamma$; u. s. w. so sind nach der bekannten Eigenschaft der Cycloide, die Kreisbögen oder Abscissen (x) Ad ; Ae ; Ag ; $A\gamma$; $A\epsilon$; $A\delta$; &c. den zugehörigen Ordinaten (y) db ; ek ; gf ; $\gamma\varphi$; ϵx ; $\delta\beta$ &c. gleich, oder $x = y$; (Alg. 610.) so daß $db + \delta\beta = ek + \epsilon x = gf + \gamma\varphi \dots = Ad \delta B = BF = Pr$; also beständig und unveränderlich. Stellt man sich nun in der Cycloidenfläche AFBA unendlich viel Ordinaten neben einander vor, die durchgängig um die unendlich kleine Distanz $DE = e$, von einander abstehen: so ist ihre Summe offenbar $= \frac{2r}{e}$, so vielmehr nämlich e in dem Durchmesser $AB = 2r$ enthalten seyn kann; also die Menge aller wie db , $\delta\beta$ u. s. w. zusammen gehörigen Paare $= \frac{r}{e}$, der

Hälften von voriger Summe. Die Summe nun zweier solchen Ordinaten, in die gemeinschaftliche Basis e multiplizirt, giebt ein unendlich kleines Rechteck, wie $e(db + \delta\beta) = e.BF = e.Pr$, welchem die übrigen, auf gleiche Art bestimmten, unendlich kleinen Rechtecke, durchgehends gleich sind, indem alle BF zur Höhe, e zur Grundlinie haben. Das Product also von ePr in die

Summe $\frac{r}{e}$ aller Paare, oder $ePr \frac{r}{e}$, giebt die Flä-
che $AFBdA = Pr^2 = C$, dem beschreibenden Kreise.
Folglich ist $AFB\ddot{d}dA + Ad\ddot{d}BA = C + \frac{1}{2}C = \frac{3}{2}C =$
 $AFB A$, der halben Cycloide; und $2AFBA$, oder die
ganze Cycloide $= 3C$, d. i. dreyen beschreibenden
Kreisen gleich.

139. Zus. Für $Ad = u$; $AD = x$; $Db = y$;
 $Ac = r$; ist, weil $Db = db + Dd = Ad + Dd$; so-

dann $y = u + \sqrt{2rx - xx}$, eine andere Gleichung der Cycloide, in welcher die Abscissen, wie gewöhnlich, auf einer geraden Linie AB , nicht auf dem Umfange des be-
schreibenden Kreises, genommen werden, die aber dem-
ohngeachtet transcendentisch bleibt, weil u einen Cirkel-
bogen bezeichnet. Wollte man nun hier die Quadratur
der Cycloide aus dem Flächen-Elemente $ey = e$

$(u + \sqrt{2rx - xx})$ suchen, so müßte man zuvor den
Bogen u in x ausdrücken, weil sich e auf x bezieht, und
alsdenn wie gewöhnlich verfahren. Die Vergleichung
dieses Verfahrens und der vorhergehenden Methode, wird
zeigen, daß die erstere weit kürzer sey als die letztere.

140. Aufg. 26. Die archimedische Spirale,
CMBAC (Fig. 26.) zu quadriren.

Aufl. Wenn $CM = y$; der Kreisbogen $AP = x$;
der Kreisumfang $APP = p$ und $AC = CP = r$, ge-
setzt wird, so ist $p : x = r : y$ oder $y = \frac{rx}{p}$, die Gleis-
chung für die Archimedische Spirale (Alg. 580.) in
welcher die Ordinaten alle aus einem Puncte C gehen,
den man den Pol der krummen Linie zu nennen pflegt.
So wie es hier verschiedene Theile der Spirallinie, nach
den

den verschiedenen Umläufen des Halbmessers um den Pol C giebt (Alg. 594.) so heißtt auch der zwischen dem Halbmesser CA und der krummen Linie CMBA enthaltene Raum CMBAC, die erste Fläche, und das, zwischen dem Halbmesser CA, der krummen Linie CMBA 2 M 2 B 2 A und der Verlängerung A 2 A des Halbmessers begränzte Stück CA 2 M 2 B 2 AA, die zweyte Fläche; die dritte Fläche fängt sich an der Gränze A 2 A an, und endigt sich mit 2 A 3 A; (Fig. 27.) und so bey den übrigen, der Menge nach, unzähligen Flächen, weil sich der Halbmesser CA durch Ansehung von A 2 A; 2 A 3 A; 3 A 4 A... = CA ohne Ende verlängern läßt.

Nun sey (Fig. 26.) CMC die veränderliche erste, der Abscisse $x = AP$ zugehörige Fläche, so fällt CMm, oder das Element dieser veränderlichen Fläche, zwischen zween ähnlichen Ausschritte von Kreisen, die CM, Cm zu Halbmessern haben, so daß man, weil hier der Winkel MCM, und also der Bogen Mm unendlich klein angenommen wird, dieses CMm = $\frac{1}{2} CM \cdot MR$ sehen kann, weil die Halbmesser CM, Cm weniger als jede angebliche endliche Größe beträgt, von einander unterschieden sind. Der Abscisse AP Element d. i. Pp, nenne man e, so geben die ähnlichen Sectoren beyder Kreise,

$$CP(r) : Pp(e) = CM(y) : MR = \frac{ey}{r}, \text{ also } \frac{1}{2} CM$$

$$MR = \frac{ey^2}{2r} = \frac{erx^2}{2p^2}, \text{ für das Flächen-Element der}$$

Archimedischen Spirale, und (66) $\frac{rx^3}{6p^2}$ oder
 $\frac{py^3}{6r^2}$ für die veränderliche Fläche CMC selbst, ohne
dass weiter etwas zu addiren, oder zu subtrahiren nöthig
H 3 wäre,

wäre, weil der gesundene Werth der Fläche, für $x = 0$ oder $y = 0$ verschwindet (85.)

141. Zus. 1. Für $x = p$, verwandelt sich der Kreisbogen AP in den ganzen Umsang des Kreises, und CMC, oder $\frac{rx^3}{6p^2}$ wird nun für die ganze erste Fläche CMB

$AC = \frac{1}{8}pr$; folglich sich zu dem Kreise APPA wie $\frac{1}{8}pr$: $\frac{1}{2}pr$ oder, wie $1:3$ verhalten; also nur $\frac{1}{3}$ von dem Kreise seyn, in welchen die Spirallinie beschrieben ist.

Eben so findet man die Fläche für ein x das kleiner als p ist. Im folgenden wird auch gezeigt werden, wie man für ein x das grösser ist als p , die zugehörigen Flächen berechnen müsse.

142. Zus. 2. Wenn man sich die Erzeugung der Spirale, durch einen Punct (wie Alg. 592) vorstellt, der auf dem beweglichen Halbmesser CA, von C an, gleichförmig dergestalt fortrückt, daß er die Länge CA in der Zeit durchläuft, in welcher dieser Halbmesser mit gleichförmiger Bewegung seinen Kreis beschreibt, so wird die fortgesetzte gleichförmige Bewegung der verlängerten CA mit dem in ihr gleichförmig fortrückenden Punkte, bey den vorigen Geschwindigkeiten, die zweyte, dritte u. s. w. Umlaufung vollenden, und dadurch die zweyte, dritte u. s. w. Spiralfäche bestimmen.

143. Zus. 3. Hierauf gründet sich folgende Methode, jede verlangte ganze Spiralfäche, so wie jeden Theil derselben, deren Abscisse ein gegebenes Stück des beschreibenden Kreishumfanges p ist, zu quadriren. Indem die umdrehende Linie CA (Fig. 27.) einen gewissen Bogen in der Peripherie p des beschreibenden Kreises durchlaufen hat, hat der auf ihr oder ihrer Verlängerung, fortrückende Punct M, einen proportionellen Theil seines Halb-

Halbmessers r vollendet (142) daß also zu den Abscissen $\frac{1}{m} p; \frac{n}{m} p$; die Werthe von $\frac{1}{m} r; \frac{n}{m} r$; als Ordinaten gehören; $\frac{n}{m}$ mag nun eine ganze Zahl, ein eigentlicher oder uneigentlicher Bruch seyn. Für die Abscisse o ist auch die Ordinate o , und wenn die umdrückende Linie bey dem Anfange ihrer Bewegung einen unendlich kleinen Kreisbogen $= \pi$ beschreibt, so rückt auch der beschreibende Punct um einen unendlich kleinen Theil s des Halbmessers, auf dieser Linie fort, so daß allemal $\pi: p = s: r$. Die Ordinaten $s; 2s; 3s; 4s \dots y$; liegen also alle, um den gemeinschaftlichen Pol C, hergestalt neben einander, daß jede zween, nächst aufeinander folgende, einen Winkel machen, der den unendlich kleinen Kreisbogen π zum Maße hat. Diese Ordinaten, als Halbmesser, bestimmen die concentrischen Kreise $P\epsilon^2; 4P\epsilon^2; 9P\epsilon^2; 16P\epsilon^2; \dots Py^2$; von denen die zugehörigen

Flächen: Elemente der Spirale, durchgängig die $\frac{s}{r}$ ten

Theile sind; und so erhält man von der ersten Ordinate s an bis auf y , für alle neben einander liegende und immer um unendlich kleine Unterschiede wachsende Flächen: Elemente, die Reihe: $\frac{\epsilon}{r} \cdot P\epsilon^2 + \frac{s}{r} \cdot 4P\epsilon^2 + \frac{\epsilon}{r} \cdot 9P\epsilon^2 \dots + \frac{\epsilon}{r} \cdot (\frac{y}{s})^2 P\epsilon^2$ oder $\frac{P\epsilon^3}{r} (1+2^2+3^2+\dots+\frac{y^2}{s^2})$ weil y in der Reihe die $\frac{y}{s}$ te Ordinate

ist. Die Summe (66) aller dieser Elemente, giebt als-

denn die gesuchte Spiralfäche = $\frac{Ps^3}{r} \cdot \frac{y^3}{3\varepsilon^3} = \frac{Py^3}{3r}$

oder $\frac{Py^3}{6r^2}$, wenn man $\frac{P}{2r}$ statt der Zahl P substituiert; welches dient, die gesuchte Fläche sogleich mit dem gleichvielbedeutenden Ausdrucke (141.) $\frac{rx^3}{6p^2}$ zu vergleichen,

den man erhält, wenn man $\frac{rx}{P}$ statt y in $\frac{Py^3}{6r^2}$ setzt.

144. Zus. 4. Weil der Abscisse $x = \frac{n}{m} p$, die Ordinate $y = \frac{n}{m} r$ zugehört (143.) so darf man, die Fläche die sich auf diese Abscisse oder Ordinate bezieht, zu quadriren, nur in eine der beyden Formeln $\frac{Py^3}{3r}$;

$\frac{Py^3}{6r^2}$; den gedachten Werth von y substituiren, so erhält

man $\frac{Pn^3r^2}{3m^3}; \frac{pn^3r}{6m^3}$. So lange $\frac{n}{m} < 1$ oder auch = 1,

findet sich dabei keine Schwierigkeit, und im lehtern Falle erhält man $\frac{1}{3}Pr^2$ oder $\frac{1}{6}pr$ wie (141) für die Quadratur der ganzen ersten Spiralfäche C M B A C. Wenn man aber die zweyte, dritte u. s. w. Fläche (140) berechnen will, für welche, wenn $m = 1$ angenommen wird, $n = 2; 3; \dots$ u. s. w. gesetzt werden muß; so muß man bedenken, daß weil hier in der Figur, bei mehrern Umrundungen, die Elementar-Sectoren, die alle ihren gemeinschaftlichen Mittelpunct in C haben, neben und auf

auf einander zu liegen kommen, die Formel $\frac{Pn^3r^2}{3m^3}$,

die sich auf diese Voraussetzung gründet, diese Flächen alle zu groß geben müsse. Denn ob gleich bey der ersten Umwindung der Spirale um ihren Pol, die gedachte Formel nur allein die erste Fläche giebt, so kommen doch bey der zweyten Umwindung, zu der ersten Fläche mit der zweyten, noch einmal die erste, und bey der dritten Umwindung, zu den vorhergehenden Flächen mit der dritten, noch einmal die erste, und zweyte aus der Formel hinzu; so daß hier bey der qten Umwindung, für welche $\frac{n}{m} = q$ gesetzt werden müsse, die Formel einen solchen Werth giebt, nach welchem, zu den Flächen bey der $(q-1)$ ten Umwindung, noch die Summe aller Flächen von der ersten bis mit der qten hinzukommt; woraus man sehr leicht die Quadratur jeder verlangten Spiral-Fläche finden kann.

145. Zus. 5. Denn wenn man die Flächen, so wie sie von der ersten an, in der Ordnung auf einander folgen, mit den Buchstaben A, B, C, D, E... bezeichnet, so kommt, wenn man durchgängig $m=1$; aber n nach und nach $= 1; 2; 3; 4; \text{ u. s. w.}$ seht:

$$\frac{1}{3} Pr^2 = A = \frac{1}{6} pr; \quad \frac{2^3}{3} Pr^2 = 2A + B = \frac{2^3}{6} pr;$$

$$\frac{3^3}{3} Pr^2 = 3A + 2B + C = \frac{3^3}{6} pr; \quad \frac{4^3}{3} Pr^2 = 4A$$

$$+ 3B + 2C + D = \frac{4^3}{6} pr \text{ u. s. w. und wenn } \mathfrak{x} \text{ die}$$

unbestimmte $(q-1)$ te, \(\Omega\), die qte Fläche bezeichnet:

$$\text{so ist } \frac{(q-1)^3}{3} \cdot Pr^2 = (q-1)A + (q-2)B + (q-3)$$

$$C \dots + \Psi = \frac{(q-1)^3}{6} pr; \text{ und } \frac{q^3}{3} Pr^2 = qA +$$

$$(q-1)B + (q-2)C \dots + \Psi + \Omega = \frac{q^3}{6} pr; \text{ woraus}$$

man die Summe aller, von der ersten an bis mit der qten, auf einander folgenden Spiralfächen, segleich haben kann, wenn man von der letzten Formel die vorher-

$$\text{gehende abzieht; dieses giebt } \frac{q^3 - (q-1)^3}{3} Pr^2 \text{ d. i.}$$

$$(q[q-1] + \frac{1}{3}) Pr^2 = A + B + C + D \dots + \Psi + \Omega = \\ (q[q-1] + \frac{1}{3}) \frac{1}{6} pr.$$

146. Zus. 6. Für $q=1$, kommt $A = \frac{1}{2} Pr^2 = \frac{1}{6} pr$; (145) und $B = 2 Pr^2 = pr$, für $q=2$. Also ist B der doppelten Fläche des Kreises gleich, in welchen die Spirale beschrieben worden ist, und 6mal größer als A . Weil $\frac{1}{2} Pr^2 = A$, so folgt aus dem vorhergehenden: $q(q-1) Pr^2 = B+C+D\dots+\Psi+\Omega$ und $q-1$ statt q substituiert $(q-1)(q-2) Pr^2 = B+C+D\dots+\Psi$; also ist b. yder Reihen Differenz, oder $(q-(q-2)) (q-1) Pr^2 = \Omega = 2(q-1) Pr^2$, der qten Fläche; oder für $2 Pr^2$ seinen Werth B gesetzt, $\Omega = (q-1)B$; wo Ω jede Fläche, nur nicht A bedeuten kann, weil A in den beyden Reihen, deren Differenz man hier genommen hat, nicht mit befindlich ist, folglich auch $(q-1)B$ für $q=1$ verschwindet. Also ist jede dieser Spiralfächen der zweyten Fläche so vielmehr genommen gleich, als die um eins verminderde Zahl der Fläche beträgt also die zweyte Fläche $B = 1 B$; die dritte $C = 2 B$ die vierte $D = 3 B$ u. s. w. Auf eben die Art verfährt man,

man, wenn man nur einen Theil von diesen Flächen, nicht die ganzen Flächen quadrirren will.

Zus. 7. Die Quadratur der Spirale, so wohl als der Cycloide, (138) sieht also die Quadratur des Kreises voraus, und lässt sich dieserhalb nicht geometrisch genau finden. Man begnügt sich aber durchgehends, wenn man die Quadratur einer Fläche nicht genau geben kann, dieselbe auf die Quadratur einer andern zu bringen, durch welche man jene finden kann, wenn diese gegeben ist. Was übrigens hier von der Quadratur der Cycloide gesagt worden ist, gilt nur von ihrer unbestimmten (60) Quadratur, die allemal transcendentisch bleibt; aber das hindert nicht, daß nicht die bestimmte Quadratur, für gewisse Stellen der Cycloide, einen algebraischen Raum sollte geben können; wie bereits Hugenius bey der Cycloide, und andere nach ihm, auch bey andern krummen Linien gefunden haben.

148. Zus. 8. Für unzählige Spiralen, für welche

$$p^n : r^n = x^m : y^m = \frac{r^n x^m}{p^n}, \text{ oder } y = \left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{n}{m}} x; \text{ darf}$$

man nur den Werth von $y^2 = \left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{2n}{m}} x^2$, in das vorhergefundene (140) Flächen-Element $\frac{e y^3}{2 r}$, substituiren, so findet sich für diese Spiralen das Element

$$\frac{1}{2} CM. MR = \frac{e r^{\frac{m}{2n}} x^2}{2 p^{\frac{m}{2n}}}; \text{ und aus der Summe}$$

(66) aller Elemente $\frac{r}{\frac{2n}{m}} \frac{x^3}{\frac{2n}{m}}$, oder
 $6p$

$\frac{x^3}{6} m\sqrt{\left(\frac{r^{2n}-m}{p^{2n}}\right)}$ die veränderliche erste Fläche,

so daß sich diese erste ganze Fläche, zu der Fläche ihres Kreises wie $1: 3 m\sqrt{\left(\frac{r}{p}\right)^{2(m-n)}}$ verhält; und so

kann man, auf eine ähnliche Art, wie vorher geschehen, auch die Quadratur der übrigen Flächen, oder einzelner Theile von ihnen, leicht finden.

149. Aufg. 27. AM (Fig. 28.) sey ein Bogen einer krummen Linie, der durchgehends gegen seine Abscisse hohl oder erhaben ist, und MT, die Tangente dieses Bogens, habe mit ihm den unendlich kleinen Theil Mm gemein. Durch den Punct m ziehe man pm mit PM und πm mit πp , bis an die durch A aufgerichtete senkrechte Linie $A\pi$ parallel, so daß Pp , $\pi\pi$, die Elemente der zugehörigen AP , $A\pi$, und pM , πM oder Pm , πm , die Flächen-Elemente von AMP , $AM\pi$ sind: Man soll die Verhältniß von Pm , πm , den auf den hohlen und erhabenen Bogen sich beziehenden Flächenelementen, finden.

Aufl. Aus den ähnlichen Triangeln TPM, MRm, folgt:

$$\frac{TP: PM = MR (Pp): Rm (\Pi\pi)}{also RM oder \Pi\pi = \frac{Pp \cdot PM}{TP}}$$

und

und weil $\pi M = AP$

$$\text{so ist } \pi \pi \cdot \pi M = Pp \cdot PM \frac{AP}{TP}$$

$$\text{und } \pi \pi \cdot \pi M : Pp \cdot PM = \frac{AP}{TP} : 1 = AP : TP$$

oder $\pi M : pM = x : \text{subt. } AM$; wo die letzte Verhältniß, und dadurch auch die Verhältniß der Flächen-Elemente πM , pM , oder πm , Pm , vermittelst der Gleichung für die Linie, gegeben ist, weil man die Subtangente für den Bogen AM aus (17. 21.) leicht haben kann.

150. Zus. Man kann die Punkte m auf dem Bogen AM so annehmen, daß die zugehörigen MR oder Pp durchgehends gleich groß und unveränderlich, die zugehörigen $\pi \pi$ hingegen, veränderlich werden. Eben so können, im Gegentheil, die $\pi \pi$ unveränderlich und die Pp veränderlich angenommen werden. Bei beyden Voraussetzungen werden aber doch immer zween zusammen gehörige Flächen-Elemente wie πM , pM , in der Verhältniß der correspondirenden Abscisse AP (x) zur Subtangente bleiben. Aus der Vergleichung dieser Flächen-Elemente, besonders, wenn ihrs Verhältniß, wie oft geschieht, eine beständige Verhältniß ist, kann man nun sehr leicht die Quadratur einer krummen Linie finden; wie sogleich gezeigt werden soll.

151. Aufg. 28. Die Quadratur unzähliger Parabeln, für welche $y^m = p^k x^n$, zu finden.

Aufl. Weil (Fig. 28.) $\pi M : pM = x : \text{subt. } AM$

$$(149) \text{ d. i. hier, } \pi M : pM = x : \frac{mx}{n} \quad (21) = 1 : \frac{m}{n},$$

oder

oder $\pi M : pM = n : m$, und die Verhältniß jeder solchen zusammengehörigen Elemente hier dieselbe (150) bleibt, was auch x ist: so ist auch die Summe aller πM d. i. $A \Pi M$, zu der Summe aller pM d. i. APM , in der selben Verhältniß, (Eucl. 5. B. 12. S.) Folglich $A \Pi M : APM = n : m$, und $A \Pi M = \frac{n}{m} APM$; $APM = \frac{m}{n} A \Pi M$,

$$A \Pi M, \text{ also } A \Pi M + APM = \frac{n}{m} APM + APM =$$

$$\left(\frac{n}{m} + 1 \right) APM = \frac{n+m}{m} APM = xy; \text{ also } APM =$$

$$= \frac{m}{n+m} xy \text{ und eben so } A \Pi M = \frac{n}{n+m} xy$$

152. Exemp. Für $m = 2$; $n = 1 = k$; oder für die Apollonische Parabel, kommt $APM = \frac{2}{3} xy$; (80) $A \Pi M = \frac{1}{3} xy$ (77) Für die Teilische Parabel, wo $m = 3$; $n = 2$; $k = 1$; wäre $APM = \frac{2}{5} xy$; $A \Pi M = \frac{1}{5} xy$ u. s. w. bey den übrigen Parabeln, die sich gleichfalls alle vollkommen quadriren lassen. Ich enthalte mich, mehrere Anwendungen hiervon, auf andere krumme Linien, zu machen, weil die Sache keine Schwürigkeit hat. Vor andern ist hier der Ausdruck

$$\pi \pi. \Pi M = \frac{Pp. PM. AP}{TP} \quad (149) \quad d. i.$$

$$\text{Elem. } A \Pi M = \frac{\text{ex. } PM}{\text{subt. } AM} \text{ zu merken, wo sich sowohl}$$

ex als subt. AM auf x bezieht, in welcher Abscisse sich auch PM aus der Gleichung ausdrucken lässt. Die Summe hiervon giebt sodann die Fläche $A \Pi M$.

Setze man in den obigen Werth des Elementes von $\Delta \Pi M$, statt des Quotienten $\frac{PM}{Subt. A}$, den gleichgelten-
den $\frac{mR}{MR}$ oder $\frac{s}{e}$, so fâme Elem. $\Delta \Pi M = ex$, einer-
ley mit dem Flächenelemente (73) weil hier x die Or-
dinate für den erhabenen Bogen, s das Element der zu-
gehörigen Abscisse y dieses Bogens bedeutet.

153. Ann. In (149) ist angenommen worden, daß
die Tangente einen unendlich kleinen Theil mit dem gegebenen
Bogen gemein haben solle. Die Richtigkeit dieser Forde-
rung wird im Folgenden umständlich erwiesen werden.

III.

Von der
Rectification der Regelschnitte.

154. Erklärung.

Eine krumme Linie, oder einen Bogen von ihr,
rectificiren, heißtt, eine gerade Linie finden; die
der gegebenen krummen Linie, oder ihrem Bos-
gen, gleich ist.

155. Aufg. 29. Eine allgemeine Formel für
das Element M in eines Bogens $\Delta M = \Delta$ (Fig. 29.)
einer krummen Linie zu finden.

Aufl. Wenn Pp ein Element der Abscisse AP ist,
so ist Ap unendlich wenig von AP ; und p in unendlich
wenig

wenig von PM; und Am unendlich wenig von AM unterschieden: also Am — AM, oder Mm, ein Element des Bogens AM. So lange nämlich Pp noch eine endliche Größe hat, ist auch das Bogenstück Mm, um eine endliche Größe d, von dem geraden Stücke Mm auf der Tangente, verschieden. Aber d, dieser Unterschied, kann unendlich abnehmen; denn die Sehne dieses Bogens kann ihrem Bogen so nahe kommen, als man nur will. Indem dieses aber geschieht, wird auch der Winkel, den die Sehne des Bogens, bey M mit der Tangente TG macht, immer kleiner, dergestalt, daß für den unendlich kleinen Bogen Mm, dieser Bogen mit seiner Sehne und dem Tangentenstücke Mm in einander fallen. Man kann also das Bogenelement Mm als eine gerade obgleich unendlich kleine Linie, d. i. als einen unendlich kleinen Theil, Mm, der nach G zu verlängerten Tangente TM ansehen. Wenn also das Abscissen-element Pp = e = MR; das Ordinaten-element mR = ε, so findet man sogleich für das Bogenelement Mm, aus den ähnlichen Triangeln TMP; MmR; MNP; folgende Proportionen:

- 1) PT: TM = MR: Mm also Mm = e. $\frac{\text{Tang. A}}{\text{Subt. A}}$
- 2) PM: MN = MR: Mm oder Mm = ε. $\frac{\text{Norm. A}}{y}$
- 3) PM: MT = mR: Mm oder Mm = ε. $\frac{\text{Tang. A}}{y}$
- 4) PN: MN = mR: Mm oder Mm = ε. $\frac{\text{Norm. A}}{\text{Subn. A}}$

von welchen man sich diejenige wählen kann, die nach Beschaffenheit der vorkommenden Fälle die bequemste ist.

Die

Die 1ste und 3te Proportion haben jedoch den Vorzug, daß man aus ihnen das Bogen-Element Mm , für schiefwinklische Coordinaten so wie für rechtwinklische, sogleich ausdrücken kann, da die 2te und 4te Proportion nur allein für die letztern gelten. Endlich ist auch, bey rechtwinklischen Coordinaten:

5) $Mm = \sqrt{MR^2 + mR^2} = \sqrt{e^2 + \varepsilon^2}$, mit den Werthen für Mm aus den vorhergehenden Proportionen einerley, wie daraus erheslet, wenn man die aus 1; und 3; ingleichen aus 2; und 4; zu findenden Werthe von e^2, ε^2 , in den Irrationalausdruck für Mm substituirt. Dieses Wurzelausdrucks bedient man sich auch in dem höhern Calculo insgemein, als einer allgemeinen Formel für das Bogenelement einer gegebenen krummen Linie.

156. Anm. Die Forderung, daß die Tangente eines Bogens einen unendlich kleinen Theil desselben mit ihm gemein habe, läßt sich sowohl aus dem was gleich ißt gesagt worden ist, als auch durch folgende Betrachtung rechtfertigen, die ich aus meiner Abhandlung über die Hauptheigenschaften der Regelschnitte §. XXXIV. fürzlich hier wiederholen will:

Wenn man sich den Gang einer krummen Linie durch die Bewegung eines Punctes vorstellt, der nach und nach in ihre verschiedenen Stellen rückt, dergestalt, daß er seinen Weg beständig ändert, also in jeden Augenblicke von der Richtung des nächst vorhergehenden Augenblickes abweicht: so kann man überall Puncte in der krummen Linie annehmen, und es wird kein endlicher bestimmter Theil derselben eine gerade Linie ausmachen. Wenn man aber die Stelle, in der sich ein Punct ißt befindet, und die Stelle, in die er den nächsten Augenblick rückt, als eine Entfernung ansieht, die der Punct in der augenblicklichen Bewegung zurück legt: so hat es nichts widersprechendes, sich den Weg des Punctes in dieser

Entfernung, als eine, obgleich unendlich kleine gerade Linie vorzustellen, weil sich die Richtung des Punctes nicht ändern kann, wenn man nicht zugleich annimmt, daß er vorher, in dieser kleinen Entfernung, eine gewisse festgesetzte Richtung gehalten hat. Man kann also die krummen Linien als Polygone von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten betrachten, die blos durch die Winkel, die diese unendlich kleinen Seiten einschließen, verschieden sind: und so ist die Tangente $T M$ (Fig. 29.) nichts anders, als eine endliche Verlängerung der unendlich kleinen Polygonalseite Mm an dem gegebenen Puncte M ; und dadurch (149. 155.) hinlänglich gerechtfertigt.

157. Aufg. 30. Die Länge eines gegebenen Bogens $AM = A$ einer krummen Linie zu finden.

Aufl. Man drücke das Element Mm des Bogens A aus einer der (155) erwiesenen Formeln aus, in welche man die Werthe von Tang. A ; Subt. A ; Norm. A ; Subn. A ; in x oder y , aus dem vorigen Capitel überhaupt, für die Regelschnitte, und aus (21. 39.) besonders, auch für andere kurme Linien substituirt, wobei man die Bedeutung (155) von e und ϵ nicht aus der Acht lassen muß. Die Summe (66. 67.) aller Elemente, giebt die Länge des veränderlichen Bogens, in einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern. Die Vollständigkeit dieser Summe beurtheilt man hier, wie bey den Quadraturen, (85. 87.) indem man die Constant zu dem für einen gewissen Werth von x oder y verschwindenden Bogen, zu bestimmen sucht, wenn selbiger nicht für x oder $y = 0$ selbst Null wird.

158. Aufg. 31. Die Neilische Parabel zu rectificiren, für welche $y^3 = px^2$ oder $y^3 = x^2$, wenn man den Parameter $p = 1$ setzt.

Aufl.

Auf. Aus (155) wähle man einen von den gefundenen Werthen für das Bogenelement Mm , z. B. den aus der 3ten Proportion, wo $Mm = \frac{\varepsilon \cdot \text{Tang. A}}{y}$ und

substituiere hierin den Werth von Tang. A aus der gegebenen Gleichung $y^2 - x^2 = 0$. Aus (21) ist Subt. A

$$= \frac{3y^3}{2x} = \frac{3y^3}{2y^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}, \text{ also } y^2 + (\text{Subt. A})^2 \text{ oder}$$

$(\text{Tang. A})^2 = y^2 + \frac{9}{4}y^2$ also $\text{Tang. A} = \frac{1}{2}y \sqrt{4+9y}$
und $\frac{\varepsilon \cdot \text{Tang. A}}{y} = \frac{1}{2}\varepsilon \sqrt{4+9y} = Mm$, dem Längenelemente der Teilischen Parabel, für den Parameter

$$1, \text{ also } \frac{1}{2}\varepsilon \sqrt{4+9y} \text{ für den Parameter } p.$$

Um nun den Bogen A aus seinen Elementen zu summiren, sehe man $\sqrt{4+9y} = z$, also $Mm = \frac{1}{2}\varepsilon z$; wo man ε , als das Element von y , in z ausdrücken muß. Man betrachte also $\sqrt{4+9y} = z$ d. i. $4+9y = z^2$ als eine Linie, in welcher y die Ordinate, z die Abscisse, und ε das Element von z , so wie ε das Element von y ist, und suche die Verhältniß beider Elemente für diese Linie, so

$$\text{ist (155, 1; 3)} \quad \frac{e \cdot \text{Tang. A}}{\text{Subt. A}} = \frac{\varepsilon \cdot \text{Tang. A}}{y}, \text{ also } \frac{e}{\text{Subt. A}}$$

$$= \frac{\varepsilon}{y} \text{ und Subt. A: } e = y: \varepsilon, \text{ also } \varepsilon = \frac{ey}{\text{Subt. A}} \text{ oder}$$

$$\varepsilon = \frac{2ez}{9}, \text{ wenn man aus der Gleichung } 4+9y = z^2$$

$= 0$; Subt. $A = \frac{9y}{2z}$ (21) substituirt; woraus man endlich $\frac{1}{2}\epsilon z$ oder $Mm = \frac{1}{9} \cdot \epsilon z^2$, das Längenelement der Kreislichen Parabel ganz in z ausgedrückt, findet. Hieraus folgt $A = \frac{1}{9} \cdot f(\epsilon z^2) = \frac{1}{3 \cdot 9} \cdot z^3$, und für z seinen Werth gesetzt:

$$A = \frac{1}{27} (4 + 9y)^{\frac{3}{2}} + \text{Const}$$

Soll nun der Bogen A für $y = 0$ verschwinden, so muß $0 = \frac{1}{27} \cdot 4^{\frac{3}{2}} + \text{Const}$, also $\text{Const} = -\frac{1}{27} \cdot 4^{\frac{3}{2}} = -\frac{8}{27}$ seyn. Dieses giebt also

$$A = \frac{1}{27} (4 + 9y)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} = \frac{1}{27} ([4 + 9y] \cdot \sqrt{4 + 9y} - 8)$$

Den Parameter p wieder zu ergänzen, darf man nur darauf sehen, was die Gleichheit der einfachen Abmessung für den Bogen A erfordert, so findet man

$$A = \frac{1}{27} ([4p + 9y] \cdot \sqrt{\left(\frac{4p + 9y}{p}\right)} - 8p)$$

Eben das würde man bekommen haben, wenn man in

$\frac{1}{2}\epsilon \sqrt{4 + \frac{9y}{p}}$, dem Längenelemente für den Parameter p ;

gleich Anfangs $\sqrt{4 + \frac{9y}{p}} = z$ gesetzt, und aus dem

daraus folgenden Elemente $\frac{\epsilon p z^2}{9}$, den Bogen A summiert hätte.

159. Anim. Wenn man in dem Ausdrucke des Bogenelements der Teilischen Parabel, die Wurzelgröße $\sqrt{4+9y}$ in eine Reihe (88) aufgelöst, und alsdenn die einzelnen Glieder derselben gehörig summirt hätte, so hätte man zwar, ohne einige Substitution, den Werth von AM, aber nicht in einer endlichen Anzahl von Gliedern, und also nur approximatorisch gefunden; auch da, wo $(4+9y)^{\frac{3}{2}}$ für gewisse Werthe von y rationell wird, und also der Bogen A sich vollkommen genau finden lässt, welches geschieht wenn $4+9y$ eine Quadratzahl wird. Hieraus also, und daß die Reihe für viele Werthe von y divergiert, (110) und folglich anders eingerichtet werden muß, erhellt der Vorzug des Ausdrucks (158) vor der Reihe, und mit ihr die Wichtigkeit der Erinnerung (89). Die Teilische Parabel ist übrigens die erste krumme Linie, deren vollständige Rectification man gefunden hat. Man sehe hiervon Herrn Hofrath Rästn. Anal. 269.

160. Zus. Man setze das Längenelement (158)

$$\frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{\frac{4p+9y}{p}} = \frac{\varepsilon w}{a}, \text{ dem Flächenelemente einer krummen Linie, durch eine beständige Größe } a \text{ dividiert; wo } w \text{ der krummen Linie Ordinate, } y \text{ die Abscisse und } \varepsilon \text{ das Element von } y \text{ bedeutet. Nach Wegschaffung der Irrationalität erhält man alsdenn, } w^2 = \frac{9a^2y}{4P} + a^2 = \frac{9a^2}{4P}$$

$(y + \frac{a^2}{9}p)$ oder, $y + \frac{a^2}{9}p = u$ gesetzt, $w^2 = \frac{9a^2}{4P} u$, die Gleichung der gemeinen oder Apollonischen Parabel von dem Parameter $\frac{9a^2}{4P}$. Das Längenelement der

Neilischen Parabel ist also dem Flächenelemente der Apollonischen, durch eine beständige Größe (a) dividiert, gleich; so daß die Rectification der einen und die Quadratur der andern wechselseitig von einander abhängen. Da man nun die Apollonische Parabel quadriren kann, so kann man auch die Neilische rectificiren, wodurch also die Rectification der letztern begreiflich wird (Anal. 270). Die Berechnung der Neilischen Parabel aus der Apollonischen, kann man bey Wolfen, Anfangsgr. der Alg. 225. nachsehen. Man vergleiche hiermit was (136) von der Hyperbel und der logarithmischen Linie gesagt worden ist.

161. Aufg. 32. Unendliche Parabeln, deren Gleichung $y^m - p^n x^k = 0$; zu rectificiren.

Aufz. Für $y^m = p^n x^k$, ist $x = \frac{y^{\frac{m}{k}}}{p^{\frac{n}{k}}}$; und

$$\text{Subt. } A = \frac{mx}{k} \quad (21) = \frac{my^{\frac{m}{k}}}{n}; \text{ also } y^2 + (\text{Subt. } A)^2$$

$$\text{oder } (\text{Tang. } A)^2 = y^2 + \frac{m^2 y^{\frac{2m}{k}}}{k^2 p^{\frac{2n}{k}}}, \text{ und Tang. } A$$

$$= y \sqrt{1 + \frac{m^2 y^{\frac{2m-2k}{k}}}{k^2 p^{\frac{2n}{k}}}} = \frac{y}{p^{\frac{n}{k}}} \times$$

$$\sqrt{\left(k^2 p^{\frac{2n}{k}} + m^2 y^{\frac{2m-2k}{k}}\right)} \text{ also. (155, 3)}$$

§. Tang.

$$\frac{\varepsilon \cdot \text{Tang. A}}{y} \text{ oder } Mm = \frac{\varepsilon}{kp^{\frac{n}{k}}} \sqrt{k^2 p^{\frac{2n}{k}} + m^2 y^{\frac{2m-2k}{k}}} =$$

$$\varepsilon \sqrt{\left(1 + \frac{m^2 y^{\frac{2m-2k}{k}}}{k^2 p^{\frac{2n}{k}}}\right)} = \varepsilon (1+V)^{\frac{1}{2}}, \text{ wenn man}$$

$$\frac{m^2 y^{\frac{2m-2k}{k}}}{k^2 p^{\frac{2n}{k}}} = V \text{ setzt.}$$

Die Elemente für den Bogen A zu summiren, verwandle man die Wurzelgröße $(1+V)^{\frac{1}{2}}$ nach der Formel (88) in eine Reihe, für welche die dortigen P; Q; m; hier I; V; $\frac{1}{2}$; sind; und die Buchstaben A, B, C... dieselbe Bedeutung behalten; so kommt:

$$\varepsilon (1+V)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2}V - \frac{1}{2 \cdot 4}V^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}V^3\right)$$

$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}V^4 \dots$) und den Werth für V gehörig substituiert,

$$\varepsilon \left(1 + \frac{m^2 y^{\frac{2m-2k}{k}}}{k^2 p^{\frac{2n}{k}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon \left(y^{\circ} + \frac{m^2}{2k} y^{\frac{2m-2k}{k}}\right)$$

$$-\frac{1 \cdot m^4}{y} \frac{4m - 4k}{k}$$

$$\frac{4n}{2 \cdot 4 \cdot k^4 p \frac{k}{k}}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot m^6}{y} \frac{6m - 6k}{k}$$

$$\frac{6n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot k^6 p \frac{k}{k}}$$

$$-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot m^8}{y} \frac{8m - 8k}{k}$$

$$\frac{8n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot k^8 p \frac{k}{k}}$$

also $f(s(1 + \frac{m^2 y}{k})^{\frac{1}{2}})$ oder
 $k^2 p \frac{k}{k}$

$$A = y + \frac{m^2}{2(2m-k)kp \frac{k}{k}} y \frac{2m-k}{k}$$

$$-\frac{1 \cdot m^4}{y} \frac{4m - 3k}{k}$$

$$\frac{4n}{2 \cdot 4 \cdot (4m - 3k) k^3 p \frac{k}{k}}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot m^6}{y} \frac{6m - 5k}{k}$$

$$\frac{6n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (6m - 5k) k^5 p \frac{k}{k}}$$

$$-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot m^8}{y} \frac{8m - 7k}{k}$$

$$\frac{8n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot (8m - 7k) k^7 p \frac{k}{k}}$$

162. Zus. 1. Für die Neilische Parabel wäre hier
 $m = 3$; $n = 1$; $k = 2$; also der Bogen

$$A = y + \frac{3^2}{2 \cdot 4 \cdot 2^1 p} y^2 - \frac{1 \cdot 3^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2^3 p^2} y^3 \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 3^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 2^5 p^3} y^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 2^7 p^4} y^5 \dots$$

dem Ausdrucke (158) $\frac{1}{27} p ([4 + \frac{9y}{p}]^{\frac{3}{2}} - 8)$ vollkommen gleich,

weil selbiger, die Wurzelgröße $(4 + \frac{9y}{p})^{\frac{3}{2}}$, in
 eine unendliche Reihe aufgelöst, mit $\frac{1}{27} p$ multiplizirt,
 und $\frac{8}{27} p$ davon abgezogen, eben dieselben Glieder geben
 würde. Hieraus findet man, (die Zahlencoefficienten
 der Kürze wegen, nach der Ordnung $\alpha; \beta; \gamma \dots$ gesetzt,
 und den Werth der Potenzen von y aus der Gleichung
 substituirt) den Bogen

$$A = p^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} + \frac{\alpha x^{\frac{4}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}} - \frac{\beta x^{\frac{6}{3}}}{p^{\frac{2}{3}}} + \frac{\gamma x^{\frac{8}{3}}}{p^{\frac{5}{3}}} - \frac{\delta x^{\frac{10}{3}}}{p^{\frac{7}{3}}} \dots$$

In x ausgedrückt; wo für $p = 1$, die Potenzen von p nur
 weggestrichen werden dürfen.

163. Zus. 2. Hätte man das Bogenelement aus
 der Formel (155, 1) suchen, und alles in x ausdrücken
 wollen, so wäre

$$Mm = e \cdot \frac{\text{Tang. } A}{\text{Subt. } A} = \frac{e}{3x} (9x^2 + 4p^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} \text{ gefunden worden.}$$

Wenn man hier die Wurzelgröße in eine
 Reihe auflöset, so findet man (88)

$$Mm = e \left(1 + \frac{2p^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}}{9} - \frac{2p^{\frac{4}{3}}x^{-\frac{4}{3}}}{9^2} + \frac{4p^{\frac{6}{3}}x^{-\frac{6}{3}}}{9^3} \right)$$

$$= \frac{10p^{\frac{8}{3}}x^{-\frac{8}{3}}}{9^4} + \frac{28p^{\frac{10}{3}}x^{-\frac{10}{3}}}{9^5} \dots \text{ und hieraus}$$

$$A = x + \frac{2p^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2p^{\frac{4}{3}}x^{-\frac{1}{3}}}{3 \cdot 9} - \frac{4p^{\frac{6}{3}}x^{-\frac{1}{3}}}{9^3}$$

$$+ \frac{2p^{\frac{8}{3}}x^{-\frac{5}{3}}}{3 \cdot 9^3} - \frac{4p^{\frac{10}{3}}x^{-\frac{7}{3}}}{3 \cdot 9^4} \dots \text{ oder, den Parameter}$$

$p = 1$ gesetzt,

$$A = x + \frac{2x^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2}{3 \cdot 9^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}} - \frac{4}{9^3 x} + \frac{2}{3 \cdot 9^3 x^{\frac{5}{3}}}$$

$$- \frac{4}{3 \cdot 9^4 x^{\frac{7}{3}}} \dots = \frac{8}{27} \left(\left[\frac{9}{4}x^{\frac{2}{3}} + 1 \right]^{\frac{3}{2}} - 1 \right) =$$

$\frac{8}{27} \left(\left[\frac{9y}{4} + 1 \right]^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$ aus (158) wo die letztere Reihe von A für ein großes, die erstere (162) für ein kleines x geschwind convergirt.

164. Ann. Es wäre nicht nöthig gewesen, für den Bogen der $\sqrt{1+x^2}$ Parabel diese Reihen zu suchen, da man seine vollständige Rectification aus (158) haben kann. Aber es ist nützlich, wenigstens durch ein Beispiel sich zu überzeugen, daß der Irrationalausdruck, den man aus der dortigen Substitution für den Bogen findet, in eine Reihe verwandelt, eben dieselben Glieder giebt, welche die, ohne Substitution

sion gefundene, nach ihren Theilen summierte, Reihe hat, für welche keine Constanſ weder zu addiren noch zu subtrahiren ist, wie auch daraus erhellet, daß für x oder y Null gesetzt, der Bogen A verschwindet (85.)

165. Zus. 3. Für die Apollonische Parabel, für welche $m = 2$; $n = 1 = k$ ist, bekommt man aus (161.) das Element

$$Mm = \frac{\varepsilon}{p} \sqrt{p^2 + 4y^2} = \varepsilon \sqrt{1 + \frac{4y^2}{p^2}}, \text{ so wie}$$

den Bogen

$$\begin{aligned} A = y &+ \frac{2y^3}{3p^2} - \frac{2y^5}{5p^4} + \frac{4y^7}{7p^6} - \frac{10y^9}{9p^8} \\ &+ \frac{28y^{11}}{11p^{10}} - \frac{84y^{13}}{13p^{12}} \dots \end{aligned}$$

wenn man die dortigen Zahlencoeffizienten, hier in den kleinsten Zahlen ausdrückt. Weil nun $y + \frac{2y^3}{3p^2} - \dots = y(1 + \frac{2y^2}{3p^2} - \dots)$ so findet man hierdurch den

Bogen

$$\begin{aligned} A = \sqrt{px} \left(1 + \frac{2x}{3p} - \frac{2x^2}{5p^2} + \frac{4x^3}{7p^3} - \frac{10x^4}{9p^4}\right) \\ + \frac{28x^5}{11p^5} - \frac{84x^6}{13p^6} \dots \text{ in } x \text{ ausgedrückt; wo sowohl} \end{aligned}$$

y als x kleiner als p seyn müssen, wenn diese Reihen convergiren sollen. Für ein großes y hingegen, muß man in dem Binomio der IrrationalgröÙe, $4y^2$ zum ersten Theile

Theile machen, (110) und so kommt, die Wurzelgröße in $\frac{\varepsilon}{P} (4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}$ gehörig entwickelt, (88) und mit $\frac{\varepsilon}{p}$ multiplicirt, das Bogenelement

$$Mm = \frac{2}{P} \varepsilon y + \frac{p \cdot \varepsilon}{4y} - \frac{p^3}{64} \varepsilon y^{-3} + \frac{p^5}{512} \varepsilon y^{-5} \dots$$

und hieraus der parabolische Bogen

$$A = \frac{y^2}{p} + \frac{1}{4} p \cdot \log y + \frac{p^3}{2 \cdot 64 y^2} - \frac{p^5}{4 \cdot 512 y^4} \dots$$

für welchem das erste, dritte und die folgenden Glieder des Werthes von Mm nach 66. 67. das zweyte aber, oder $\frac{1}{4} p \cdot \frac{\varepsilon}{y}$ nach 118. summirt worden sind; denn

$\frac{\varepsilon}{y}$ ist das Element des Logarithmen von y; also die

Summe aller dieser Elemente, oder $s\left(\frac{\varepsilon}{y}\right) = \log y$;

wo log. y den natürlichen oder hyperbolischen (121.) Logarithmen von y bedeutet. Hier nun braucht man den Logarithmen nicht zu Abkürzung der Rechnung, sondern die logarithmische Größe (122.) selbst, die hier einen Theil des Werthes von A ausmacht, und die man, wenn y in Zahlen bestimmt wird, aus Herrn Lamberts Tafeln für die hyperbolischen Logarithmen (Taf. 13. 15.) finden, oder doch leicht berechnen kann.

166. Zus. 4. Aus 109. kommt $u = \frac{a}{2c} \sqrt{c^2 + 4y^2}$ für die schiefwinklige Hyperbel, also, beyde Arten und den Parameter, oder $a=c=p$ gesetzt, $u = \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + 4y^2}$, für

für die rechtwinklige oder gleichseitige Hyperbel, wo y die Abscissen auf einer, der Hauptaxe senkrechten Linie, durch der Hyperbel Mittelpunct; u die zugehörigen senkrechten Ordinaten bedeuten. Also ist $s u = \frac{1}{2} s \sqrt{p^2 + 4y^2}$ das Flächenelement der gleichseitigen Hyperbel; welches mit $M m = \frac{s}{p} \sqrt{p^2 + 4y^2}$ (165) dem Bogenelemente der gemeinen Parabel verglichen, $\frac{1}{2} M m = \frac{s u}{p}$, das halbe Längenelement der Apollonischen Parabel, dem Flächen Elemente der gleichseitigen Apollonischen Hyperbel durch p dividirt, gleich macht; so, daß die Rectification der gemeinen Parabel in einem endlichen algebraischen Ausdrucke geben seyn würde, wenn man die Hyperbel auf die Art quadriren könnte. Die Unmöglichkeit aber einer solchen Quadratur, die auf Logarithmen führt, welche transzendente Functionen (Alg. 571.) ihrer Zahlen sind, hat Herr Hofrath Kästner (Anal. 272.) zum Theil gezeigt. Wenn man also die Reihe (109, 1.) für die veränderliche hyperbolische Fläche $C p M A$, mit $\frac{2}{p}$ multiplizirt, so

findet man hieraus den unbestimmten parabolischen Bogen für eine kleine Ordinate y auf der Axe, oder

$$A = y + \frac{2y^3}{3p^2} - \frac{1 \cdot 2^2 \cdot y^5}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot p^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot y^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot p^6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^4 \cdot y^9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot p^8} \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-5) 2^{n-1} y^{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) (2n-1) p^{2n-2}}$$

vollkommen einerley mit dem ersten Werthe von A in (165). Das nte Glied der Reihe ist hier positiv oder negativ, nachdem n gerade oder ungerade ist (88).

167. Aufg. 33. Einen elliptischen, oder hyperbolischen Bogen $AM = A$ (Fig. 10. 11.) zu rectificiren.

$$\text{Aufl. In (155, 1) ist } Mm^2 = e^2 \frac{(\text{Tang. } A)^2}{(\text{Subt. } A)^2}$$

$$= e^2 \left(\frac{PT^2 + PM^2}{PT^2} \right) = e^2 \left(1 + \frac{PM^2}{PT^2} \right) = e^2 \left(1 + \frac{PN}{PT} \right)$$

$$\text{woraus } Mm = e \sqrt{1 + \frac{PN}{PT}}, \text{ und ebenso } Mm = \varepsilon \sqrt{1 + \frac{pn}{pt}}$$

$$\text{folgt. Demnach ist (56) } \varepsilon \sqrt{1 + \frac{pn}{pt}} = \varepsilon \sqrt{1 + \frac{a^2 y^2}{\frac{1}{4} c^4 + c^2 y^2}}$$

$$= \varepsilon \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4} c^4 + c^2 y^2 + a^2 y^2}{\frac{1}{4} c^4 + c^2 y^2} \right)} = \varepsilon \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4} c^4 + f^2 y^2}{\frac{1}{4} c^4 + c^2 y^2} \right)}$$

wenn man $a^2 - c^2$ für die Ellipse, und $a^2 + c^2$ für die Hyperbel, in beiden Fällen = f setzt. Also ist

$$Mm = \varepsilon \left(\frac{1}{4} c^4 + f^2 y^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{4} c^4 + c^2 y^2 \right)^{-\frac{1}{2}};$$

wo y die Abscisse (56) aus dem Mittelpuncte auf der zweyten oder Neben-Axe; ε das Element dieser Abscisse bedeutet. Nun ist, wenn man P; Q; m; in 88. gehörig bestimmt:

$$\left(\frac{1}{4} c^4 + f^2 y^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{c^2}{2} + \frac{f^2 y^2}{c^2} - \frac{1 \cdot 2^1 f^4 y^4}{1 \cdot 2 \cdot c^6}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 2^2 f^6 y^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c^{10}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 f^8 y^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot c^{14}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^4 f^{10} y^{10}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot c^{18}}$$

$\vdots \ddots = K$; und

$$\left(\frac{1}{4} c^4 + c^2 y^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{4}c^4 + c^2y^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{c^2} \pm \frac{4y^2}{c^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 2^3 y^4}{1 \cdot 2 \cdot c^6}$$

$$\pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^4 y^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c^8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^5 y^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot c^{10}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 2^6 y^{10}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot c^{12}}$$

$$\dots = L; \text{ und } Mm = sKL.$$

Man multipliziere also die Reihe L ; nach und nach mit den einzelnen Gliedern der Reihe K ; so kommt, wenn man der Kürze wegen die Zahenkoeffizienten des dritten, vierten u. s. w. Gliedes in K ; hier α, β, γ &c. und die Coeffizienten eben dieser Glieder der Reihe $L; \alpha', \beta', \gamma' \&c.$ seht, und jedes Glied von KL sogleich summirt (66)

$$y \pm \frac{2y^3}{3c^2} + \frac{\alpha'y^5}{5 \cdot 2c^4} \pm \frac{\beta'y^7}{7 \cdot 2c^6} + \frac{\gamma'y^9}{9 \cdot 2c^8} + \frac{\delta'y^{11}}{11 \cdot 2c^{10}} \dots = M$$

$$+ \frac{2f^2y^3}{3 \cdot c^4} \pm \frac{4f^2y^5}{5 \cdot c^6} + \frac{\alpha'f^2y^7}{7c^8} \pm \frac{\beta'f^2y^9}{9c^{10}} + \frac{\gamma'f^2y^{11}}{11c^{12}} \dots = N$$

$$- \frac{2\alpha f^4 y^5}{5c^8} \pm \frac{4\alpha f^4 y^7}{7c^{10}} - \frac{\alpha \alpha' f^4 y^9}{9c^{12}} + \frac{\alpha \beta' f^4 y^{11}}{11c^{14}} \dots = O$$

$$+ \frac{2\beta f^6 y^7}{7c^{12}} \pm \frac{4\beta f^6 y^9}{9c^{14}} + \frac{\alpha' \beta f^6 y^{11}}{11c^{16}} \dots = P$$

$$- \frac{2\gamma f^8 y^9}{9c^{16}} \pm \frac{4\gamma f^8 y^{11}}{11c^{18}} \dots = Q$$

$$+ \frac{2\delta f^{10} y^{11}}{11c^{20}} \dots = R$$

$$\text{und } y + \frac{2(f^2 + c^2)}{3c^4} y^3 + \frac{\frac{1}{2}\alpha'c^4 + 4f^2c^2 - 2\alpha f^4}{5c^8} y^5$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\pm \frac{1}{2} \beta' c^6 + \alpha' f^2 c^4 \mp 4 \alpha f^4 c^2 + 2 \beta f^6}{7 c^{12}} y^7 \\
 & + \frac{\frac{1}{2} \gamma' c^8 \pm \beta' f^2 c^6 - \alpha \alpha' f^4 c^4 \pm 4 \beta f^6 c^2 - 2 \gamma f^8}{9 c^{16}} y^9 \\
 & + \left(\frac{\pm \frac{1}{2} \delta' c^{10} + \gamma' f^2 c^8 \mp \alpha \beta' f^4 c^6 + \alpha' \beta f^6 c^4}{11 c^{20}} \right. \\
 & \quad \left. \mp \frac{4 \gamma f^8 c^2 + 2 \delta f^{10}}{11 c^{20}} \right) y^{11} \dots = M + N + O +
 \end{aligned}$$

$$P + Q + R \dots = f(\varepsilon KL) == A$$

Oder, wenn $a^2 \mp c^2$ statt f^2 , und statt der griechischen Buchstaben die Zahlen gehörig wieder substituirt werden:

$$\begin{aligned}
 M &= y + \frac{2 a^2}{3 c^4} y^3 \pm \frac{2 a^2 (4 c^2 \mp a^2)}{5 c^8} y^5 \\
 &+ \frac{4 a^2 (8 c^4 \mp 4 a^2 c^2 + a^4)}{7 c^{12}} y^7 \\
 \pm & \frac{2 a^2 (64 c^6 \mp 48 a^2 c^4 + 24 a^4 c^2 \mp 5 a^6)}{9 c^{16}} y^9 \dots
 \end{aligned}$$

für den Bogen AM der Ellipse und Hyperbel, jenen aus den oberen, diesen aus den unteren Zeichen.

168. Zus. 1. Wenn man in der letzten Reihe für den Bogen $A = AM$ der Ellipse, die Buchstaben c, a, y mit a, c, u verwechselte, so käme

$$\begin{aligned}
 A' &= u + \frac{2 c^2}{3 a^4} u^3 + \frac{2 c^2 (4 a^2 - c^2)}{5 a^8} u^5 \\
 &+ \frac{4 c^2 (c^4 + 8 a^4 - 4 a^2 c^2)}{7 a^{12}} u^7
 \end{aligned}$$

+

$$+ \frac{2c^2(64a^6 - 48a^4c^2 + 24a^2c^4 - 5c^6)}{9a^{16}} u^9 \dots$$

wo $u = CP$, nun auf der großen Axe AB liegt; also A' hier nicht den Bogen AM, sondern den Bogen aM (Fig. 10.) bedeutet. Für die Hyperbel ist die (167) gefundene Reihe bequemer als die verwandelte seyn würde.

169. Zus. 2. Man setze $a = n c$ (Alg. 371.) so kommt (168.)

$$\begin{aligned} A' = u &+ \frac{2}{3n^4c^2} u^3 + \frac{2(4n^2 - 1)}{5n^8c^4} u^5 \\ &+ \frac{4(8n^4 - 4n^2 + 1)}{7n^{12}c^6} u^7 \\ + \frac{2(64n^6 - 48n^4 + 24n^2 - 5)}{9n^{16}c^8} u^9 \dots &= aM \end{aligned}$$

und (167)

$$\begin{aligned} A = y &+ \frac{2n^2}{3c^2} y^3 + \frac{2n^2(4 + n^2)}{5c^4} y^5 \\ &+ \frac{4n^2(8 + 4n^2 + n^4)}{7c^6} y^7 \\ \pm \frac{2n^2(64 + 48n^2 + 24n^4 + 5n^6)}{9c^8} y^9 \dots &= AM \end{aligned}$$

Für $n = 1$ wäre $a = c$; also für den Bogen eines Kreises von dem Diameter c, aus den oben Zeichen:

$$A = y + \frac{2[1]}{3c^2} y^3 + \frac{2[3]}{5c^4} y^5 + \frac{2[10]}{7c^6} y^7 + \frac{2[35]}{9c^8} y^9 \dots$$

$+ \frac{2[126]}{11c^{10}} y^{11} + \frac{2[452]}{13c^{12}} y^{13} \dots$ in welcher Reihe die eingeschlossenen Zahlen, mit den figurirten (Alg. 726.) Zahlen, nach der 109, 4. bemerkten Ordnung übereinkommen.

Diese Reihe ist nun offenbar der Reihe M (168.) gleich, (wenn man in ihr statt der griechischen Buchstaben die Zahlen setzt, und alles gehörig verkürzt) wie auch schon daraus erhellet, weil für den Kreis, $a^2 - c^2$ d. i. $f^2 = 0$ wird, und also die übrigen Reihen N, O, P &c. hier wegfallen. Die Substitution der Zahlen giebt hier die Reihe M, d. i. den Kreisbogen

$$\begin{aligned} A = y + \frac{2}{3c^2} y^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 2^2}{1 \cdot 2 \cdot 5c^4} y^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7c^6} y^7 \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9c^8} y^9 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 2^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 11c^{10}} y^{11} \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 2^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 13 \cdot c^{12}} y^{13} \dots = y + \frac{2[1]}{3c^2} y^3 + \frac{2[3]}{5c^4} y^5 \dots \end{aligned}$$

wie vorhin. Für die rechtwinklige Hyperbel fâme, für $n = 1$, aus den untern Zeichen:

$$\begin{aligned} A = y + \frac{2}{3c^2} y^3 - \frac{10}{5c^4} y^5 + \frac{52}{7c^6} y^7 \\ - \frac{282}{9c^8} y^9 \dots \end{aligned}$$

170. Aufg. 34. Den Bogen $AM = A$, eines Kreises (Fig. 18.) zu rectificiren.

Aufl. Ein Ausdruck für diesen Bogen findet sich im vorhergehendem Abschnitte. Auch kann man, aus denen im vorigen Capitel berechneten Werthen der Kreisausschnitte (96. seqq.) für den Durchmesser a , den zugehörigen Bogen sogleich finden, wenn man den berechneten Ausschnitt mit $\frac{a}{4}$ dividirt, oder mit $\frac{4}{a}$ multiplicirt (97).

Hier will ich nur noch zeigen, wie man den Kreisbogen vermittelst der Tangente, oder des Sinus berechnen könne.

Für die Tangente $AT = z$; sey $Tt = el. z = e$. Weil nun (101) das Bogenelement eines Kreises dem Elemente der zugehörigen Tangente durch das Quadrat der Secante dividirt, gleich, oder

$$Mm = \frac{e}{1+zz} \text{ ist; so ist } s\left(\frac{e}{1+zz}\right) \text{ oder}$$

$$A = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots = z \left(1 - \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{5}z^4\right)$$

$$- \frac{1}{7}z^6 + \frac{1}{9}z^8 - \frac{1}{11}z^{10} \dots \pm \frac{1}{2n-1}z^{2n-2})$$

das nte Glied positiv oder negativ, nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist. Für den Bogen $AM = 45^\circ$, wäre $z = 1$ also, der achte Theil der Peripherie

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots = Q = 2\left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11}\right)$$

$$+ \frac{1}{13 \cdot 15} \dots \text{ für den Halbmesser } 15 \text{ und } 4Q = 4$$

$$(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots) = 8 \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} \dots \right)$$

die ganze Peripherie eines Kreises, für den Durchmesser 1.

Diese Reihe nun ist zu Berechnung des Kreisumfanges unbequem, weil sie viel zu langsam convergiert (102.) Man muß daher den Kreisbogen A so bestimmen, daß z ein kleiner Bruch des Halbmessers wird, für den alsdenn die Reihe sich geschwinder nähert. Man setze also $A = 30^\circ$, so ist, für den Halbmesser 1, alsdenn

$$\sin A = \frac{1}{2}; \cos A = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \text{ und } \cos A (\frac{1}{2}\sqrt{3}): \sin A [\frac{1}{2}] = 1: \tan A [z] \text{ also hier}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ und der Bogen von } 30 \text{ Graden, als der 12te}$$

Theil der Peripherie, aus obiger Reihe für A, durch die Zahlenreihe

$$\sqrt{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \frac{1}{11 \cdot 3^5} \dots \right) \text{ gegeben. Das sechsfache dieser Reihe}$$

gibt alsdenn, weil $6\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{36}{3}} = \sqrt{12}$, wenn man mit $\sqrt{12}$ wirklich multipliziert:

$$\begin{aligned} \text{Die halbe Peripherie} &= \frac{\sqrt{12}}{1} - \frac{\sqrt{12}}{3 \cdot 3} + \frac{\sqrt{12}}{5 \cdot 3 \cdot 3} \\ &- \frac{\sqrt{12}}{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{\sqrt{12}}{9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} - \frac{\sqrt{12}}{11 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\sqrt{12}}{13 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \dots \text{ für den Halbmesser } 1,$$

also die ganze Peripherie, oder P, für den Durchmesser 1

Die Summe dieser Reihe findet man, wenn man, auf eine ähnliche Art, wie in 125, die IrrationalgröÙe $\sqrt{12} = 3,46 \dots$ mit 3, den Quotienten wieder mit 3, den neugefundenen Quotienten abermal mit 3, und so ferner dividirt, die Irrationalzahl alsdenn, nebst denen dergestalt aus ihr nach und nach gefundenen Zahlen, in ihrer Ordnung durch die von 1 an auf einander folgenden ungeraden Zahlen theilt, und das was auf die Art heraus kommt, in eine algebraische Summe bringt. Der Columnme A, (welche die Irrationalzahl $\sqrt{12}$, mit allen, durch fortgesetzte Division der Zahl 3 aus ihr gefundenen Quotienten enthält) seze man die ungeraden Zahlen in ihrer Ordnung zur Seite: so giebt, das erste, dritte, fünfte &c. Glied (die ungeraden Glieder) von A, durch die jedesmal daneben stehenden ungeraden Zahlen dividirt, das erste, zweyte, dritte &c. Glied in der Columnme B; das zweyte, vierte, sechste &c. Glied (die geraden Glieder) von A hingegen, durch die zugehörigen daneben stehenden ungeraden Zahlen dividirt, das erste, zweyte, dritte &c. Glied in der Columnme C; so daß B den positiven, C den negativen Theil der Reihe enthält, und so giebt $B - C$ die Peripherie P um so genauer,

jemehr man Decimalstellen für $\sqrt{12}$ gesucht hat. Die Rechnung dafür ist folgende:

A	B	C
1) 3,464101615138(3,464101615138 = $\sqrt{12}$	
3) 1,154700538379		(0,384900179460
5) 384900179460(76980035892	
7) 128300059820		(18328579974
9) 42766586607(4751854072	
11) 14255562203		(1295960200
13) 4751854067(365527236	
15) 1583951356		(105596757
17) 527983785(31057870	
19) 175994595		(9262873
21) 58664865(2793565	
23) 19554955		(850215
25) 6518318(260733	
27) 2172773		(80473
29) 724258(24974	
31) 241419		(7788
33) 80473(2438	
35) 26824		(766
37) 8941(242	
39) 2980		(76
41) 993(24	
43) 331		(8
45) 110(2	
47) 37		(1

$$\underline{\quad B = + \ 3,546233172181 \ (0,404640518591)}$$

$$\underline{- \ C = - \ 0,404640518591}$$

$$\text{also } B - C = 3,141592653590\dots = P, \text{ bis auf 9}$$

Decimalstellen genau, weil $\sqrt{12}$ nur auf 12 Stellen ist berechnet worden.

S. Rästn. Anal. 306. 307. 308. wo zugleich aus dem Herrn Euler eine bequeme Methode angegeben wird, den Bogen von 45° aus seinen beyden unbestimmt.

stimmten Theilen $a + b$ vermittelst der Tangente der Summe dieser Bogen zu berechnen, wobey man die schwerliche Ausziehung einer Wurzelgröſſe nicht nöthig hat.

171. Aufg. 35. Die Peripherie des Kreises vermittelst des Sinus eines Bogens $AM = A$ (Fig. 30.) zu finden.

Aufl. Für den Halbmesser $AC = r = CD$, sey PM oder $\sin. A = y$; PC oder $\cos. A = \sqrt{r^2 - yy}$; Man ziehe mP der Linie MP unendlich nahe, und MR mit AC parallel; so ist $\triangle MPC \sim \triangle MRM$; also, wenn man mR , das Element des Sinus von A , oder el. $y = \epsilon$ sieht; $PC(\sqrt{r^2 - yy}) : MC(r) = mR(\epsilon)$;

$Mm = \frac{s}{\sqrt{r^2 - yy}}$, oder, statt r den Halbmesser r gesetzt,

$Mm = \frac{sr}{\sqrt{r^2 - y^2}}$, das Bogenelement des Kreises dem Producte aus dem Halbmesser in das Element des Sinus, dividirt durch den Cosinus, gleich; welche Formel mit $Mm = \frac{s \cdot \text{Norm. } A}{\text{Subn. } A}$ aus (155, 4)

einerley ist, weil die Normale für den Durchmesser des Kreises, in allen Puncten $= r$, dem Halbmesser des Kreises; also die Subnormale $= \sqrt{r^2 - y^2}$ seyn muß.

Wenn also, für $r = 1$; Mm d. i. Elem. $A = \frac{\text{el. Sin. } A}{\text{Cos. } A}$; so findet man hieraus, Elem. $\sin. A = \text{el. } A \times \text{Cos. } A$; Beyde Formeln muß man, ihres vielfachen Gebrauchs wegen, wohl merken.

$$\text{In dem Ausdrucke } \frac{\varepsilon r}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}}}$$

$= \varepsilon \left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ verwandele man die IrrationalgröÙe
in eine Reihe, indem man P; Q; m in 88. hier 1;
 $-\frac{y^2}{r^2} - \frac{1}{2}$; setzt; so kommt

$$\begin{aligned} Mm &= \varepsilon \left(1 + \frac{y^2}{2r^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot y^4}{1 \cdot 2 \cdot 2^2 r^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot y^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3 r^6}\right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot y^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4 r^8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot y^{10}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5 r^{10}} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3) y^{2n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) 2^{n-1} r^{2n-2}} \right) \end{aligned}$$

und hieraus, von den einzelnen Gliedern der Reihe die Summe (79) genommen,

$$\begin{aligned} A &= y + \frac{y^3}{6r^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot y^5}{1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 5 r^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot y^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 7 r^6} \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot y^9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4 \cdot 9 r^8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot y^{11}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5 \cdot 11 r^{10}} \dots \\ &\quad \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3) y^{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) (2n-1) 2^{n-1} r^{2n-2}} \end{aligned}$$

172. Expl. Wenn $A = 30^\circ$, also Sin. A oder $y = \frac{1}{2}$, für $r = 1$; gesetzt wird, so kommt für den rectificirten Bogen von 30 Graden hier

$$A = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{6 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2^7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^{10}}$$

+ $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 2^{13}} \dots$ und das sechsfache dieser Reihe,

oder die halbe Peripherie für den Halbmesser 1, d.i.

$$6A = 3 + \frac{3}{3 \cdot 2^3} + \frac{3^2}{4 \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{5 \cdot 3^2}{4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^7}$$

$$+ \frac{7 \cdot 5 \cdot 3^2}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 2^8} + \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3^2}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 2^{10}}$$

$$+ \frac{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3^2}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 2^{13}} \dots$$

und, wenn A, B, C, D, &c. die jedesmaligen vorhergehenden ganzen Glieder bedeuten,

$$6A = 3 + \frac{A \cdot 1^2}{2 \cdot 3 \cdot 2^2} + \frac{B \cdot 3^2}{4 \cdot 5 \cdot 2^2} + \frac{C \cdot 5^2}{6 \cdot 7 \cdot 2^2}$$

$$+ \frac{D \cdot 7^2}{8 \cdot 9 \cdot 2^2} + \frac{E \cdot 9^2}{10 \cdot 11 \cdot 2^2} + \frac{F \cdot 11^2}{12 \cdot 13 \cdot 2^2} + \frac{G \cdot 13^2}{14 \cdot 15 \cdot 2^2} \dots$$

$$\dots + \frac{\Omega(2n-3)^2}{(2n-2)(2n-1)2^2} = P, \text{ der ganzen Peri-}$$

pferie für den Durchmesser 1; wo n jede ganze Zahl, von 2 an, bedeuten kann. Für n = 1 käme hier was Ungereimtes. Das erste Glied hat nämlich kein vorhergehendes, aus welthem es ausgedrückt seyn könnte. Man vergleiche hiermit 109, I. p. 85.

In dieser Reihe ist jedes Glied ein Product aus dem nächst vorhergehenden Gliede in das Quadrat einer ungeraden

raden Zahl, dividirt durch das Product des Quadrates der z in eine Proniczahl; weil das Product jeder zwei nächst aufeinander folgenden ganzen Zahlen ($m, m+1$ oder $m, m-1$) immer eine Proniczahl ($m^2 \mp m$) giebt.

173. Zus. 1. Für den Halbmesser $CM = 1$, sey CP oder $\text{Cos. } A = u$; PM oder $\text{Sin. } A = \sqrt{1-u^2}$, so ist $MR = Pp$, das Element des Cosinus von A , hier negativ, oder $Pp = -e$, weil der Cosinus kleiner wird, wenn der Bogen mit seinem Sinus wächst, und umgekehrt. Die ähnlichen Triangel MPC , MRm , geben sobann

$$\begin{aligned} PM(\sqrt{1-u^2}) : MC(1) &= MR \text{ oder } Pp(-e) : \\ Mm; \text{ also } Mm \text{ oder Elem. } A &= -\frac{e}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= -\frac{\text{el. Cos. } A}{\text{Sin. } A}; \text{ also Elem. Cos. } A = -\text{el. } A \times \\ \text{Cos. } A, \text{ beydes für den Halbmesser } 1, \text{ und} \\ Mm &= -\frac{er}{\sqrt{r^2-u^2}} = -e \left(1-\frac{u^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ für den} \\ \text{Halbmesser } r; \text{ das Bogenelement des Kreises dem} \\ \text{negativen Producte aus dem Halbmesser in das} \\ \text{Element des Cosinus, dividirt durch den Sinus,} \\ \text{gleich.} \end{aligned}$$

174. Zus. 2. Man sehe $\text{Sin. v. s. } A$ oder $AD=x$, so ist Pp oder MR (das vorige Element des Cosinus) hier $\text{el. Sin. v. } A = e$, und aus eben der Proportion (173)

$$Mm = \frac{Pp \cdot MC}{MP} \text{ d. i. Elem. } A = \frac{\text{el. Sin. v. } A}{\text{Sin. } A}$$

=

$$= \frac{e}{\sqrt{(2x - xx)}} \text{ für den Halbmesser } 1; \text{ also El. A} =$$

$$\frac{er}{\sqrt{(2rx - x^2)}} \text{ für den Halbmesser } r; \text{ woraus man, so}$$

wie aus (171. 173) den zugehörigen Bogen, und aus ihm die ganze Peripherie berechnen kann. Und so kann man das Bogenelement des Kreises auch aus andern trigonometrischen Linien, und umgekehrt, diese wieder aus dem Bogen ausdrücken: wozu man die Proportionen entweder unmittelbar aus der Figur herleiten, oder durch Substitution und Umkehrung der Reihen, finden kann. Dergleichen Formeln aus dem Cirkel sind ihres weitläufigen Gebrauchs wegen von großem Nutzen.

175. Zus. 3. Aus der berechneten Kreisperipherie P, (170. 171) kann man nun sehr leicht die Länge der Kreisbögen einzelner Grade, Minuten, Secunden &c. in Theilen des Halbmessers oder Durchmessers berechnen. Denn für den Halbmesser 1 drückt die Zahl P oder 3, 1419.. (170.) die halbe Peripherie des Kreises aus, folglich ist

$$\frac{P}{180} = 0,017453 \ 292519 \ 943295 \ 769236 \ 908 = \\ \text{1 Grad}$$

$$\frac{1 \text{ Gr.}}{60} = 0,000290 \ 888208 \ 665721 \ 596153 \ 948 = \\ \text{1 Minute}$$

$$\frac{1 \text{ Min.}}{60} = 0,000004 \ 848136 \ 811095 \ 359935 \ 899 = \\ \text{1 Secunde}$$

$$\frac{1 \text{ Sec.}}{60} = 0,000000 \ 080802 \ 280184 \ 922665 \ 598 = \\ \text{1 Tertie}$$

und so ferner für die Quarten, Quinten &c.

Beym

Beym Hrn. Lambert findet man auf der 23. Tafel die Länge der Cirkelbögen von 1. bis auf 100 Grade, und von da an, von 30 zu 30 Graden, so wie auch für Minuten und Secunden, insgesammt bis auf 27. Decimalstellen berechnet.

In der 24sten Tafel p. 151. findet man unter andern auch den Bogen angegeben, welcher dem Halbmesser der Länge nach gleich ist. Die Rechnung dafür ist leicht, wenn man einmal, wie hier, die Länge eines Gradbogens schon berechnet hat. Denn man sehe, der gesuchte Bogen habe n Grade, so ist, für den Halbmesser 1, alsdenn

$$n. 0,0174532925 \dots = 1; \text{ folglich } n = \frac{1}{0,01745 \dots}$$

und hieraus der Bogen $= 57^\circ 29' 57'' 951308 \dots$
Der Rest aus dieser Division, mit 60 multiplicirt und mit 0, 01745 ... dividirt, giebt Minuten, und die Wiederholung dieses Verfahrens, Secunden, Tertien &c. und so findet man endlich den gesuchten Bogen, beynahe $57^\circ \frac{21}{71}$, oder genauer $57^\circ 17' 44'' 48''' 22^{IV} 29^{V}$
 $21^{VI} + \dots$ S. Eul. Introd. in An. inf. L. II. §. 530.

Hätte man die Länge einer Sexte berechnet gehabt, so hätte man den verlangten Bogen sogleich in Sexten suchen, und hieraus denselben in Graden, Minuten u. s. w. noch etwas leichter und geschwinder als vorhin finden können.

Eine Anwendung der hier vorgetragenen Rectifications-Methode auf transcendentische Linien geben nachstehende beyde Aufgaben.

176. Aufg. 36. Die Cykloide A b φ F (Fig. 25.) zu rectificiren.

Aufl. Weil (139) D_b oder $y = Ad + Dd$, oder, wenn man den Kreisbogen $Ad = A$ setzt, $y = A + \text{Sin. } A$, so ist Elem. y oder $\epsilon = \text{el. } A + \text{el. Sin. } A = \text{el. } A + \text{el. }$

A ×

$A \times \text{Cos. } A [171]$ d. i. $\varepsilon = (1 + \text{Cos. } A) \text{ el. } A = (1 + \text{Cos. } A) \frac{\text{el. Sin. vers. } A}{\text{Sin. } A} [174]$ also, wenn Sin.

$\text{vers. } A$ oder $AD = x$ gesetzt wird, $\varepsilon = \frac{(2 - x)e}{\sqrt{2x - xx}}$ für den

Halbmesser 1; oder $\varepsilon = \frac{(2r - x)e}{\sqrt{(x[2r - x])}}$ für des beschrei-

benden Kreises Halbmesser $AC = r$; wodurch also das Element der Cykloidenordinate $y = bD$ ganz in der zugehörigen Abscisse $x = AD$ ausgedrückt ist, weil auch e , als das Element dieser Abscisse, sich auf x bezieht, so daß man nun $\sqrt{e^2 + \varepsilon^2}$, oder das Bogenelement (155,5) der Cykloide leicht ausdrücken kann.

Man substituire nämlich den Werth von
 $\varepsilon^2 = \frac{(2r - x)^2 e^2}{x(2r - x)} = \frac{(2r - x)e^2}{x}$, in den Irratio-

nalausdruck des Bogenelementes, so kommt $\sqrt{e^2 + \varepsilon^2}$
 $= \sqrt{e^2 + \frac{(2r - x)e^2}{x}} = e\sqrt{\frac{2r}{x}} = 2^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} ex - \frac{1}{2}$

für das Element des Cykloiden-Bogens Ab , und hier-
aus (67) $\frac{2^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$ oder $2\sqrt{2rx}$ für den rectifieirs-

ten Bogen Ab , der für $x = 0$ verschwindet. Also ist jeder unbestimmte Bogen Ab der Cykloide, der dop-
pelten Sehne des zugehörigen Kreisbogens Ad gleich; weil $\sqrt{2rx}$ der Ausdruck einer solchen Sehne ist.

Für $x = 2r$ verwandelt sich Ab in $Ab\varphi F$ und $2\sqrt{2rx}$ in

in 4r, daß also $A b \phi F = 4r$, die halbe Cykloide dem vierfachen Halbmesser oder dem doppelten Durchmesser des beschreibenden Kreises gleich ist. Die Rectification der Cykloide hat der Engländer Wrenn, so wie Roberwall ihre Quadratur, zuerst gefunden.

177. Aufg. 37. Die Archimedische Spirale (Fig. 26.) zu rectificiren.

Aufl. Wenn in der Spirale $rx = py$, die Abscisse x um einen unendlich kleinen Theil e der Peripherie zunimmt, so wächst (143) die Ordinate y um einen proportionellen Theil ε ihres Halbmessers, so daß hier $rx + re = py + p\varepsilon$, und die Differenz aus beyden Gleichungen, die Gleichung $re = p\varepsilon$, zwischen den Elementen $e; \varepsilon$, giebt; woraus $e = \frac{p\varepsilon}{r}$ und $\varepsilon = \frac{re}{p}$ folgt. Nun ist $mR = \varepsilon$, und $CP(r): Pp(e) = CM(y): MR = \frac{ey}{r}$; also (155, 5) $\sqrt{mR^2 + MR^2} = Mm = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{e^2 y^2}{r^2}}$, dem Bogenelemente der Spirale.

Man substituire also den Werth von $e^2 = \frac{p^2 \varepsilon^2}{r^2}$ in diesen Irrationalausdruck, so findet man das Bogen-element $Mm = \sqrt{(\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2 p^2 y^2}{r^4})}$ oder $Mm = \frac{\varepsilon}{r^2} \sqrt{r^4 + p^2 y^2}$; oder hierin die Werthe von $\varepsilon = \frac{re}{p}$; $y^2 = \frac{r^2 x^2}{p^2}$ substituit, $Mm = \frac{e}{p} \sqrt{r^2 + x^2}$; woraus $\frac{e}{p}$

$\frac{I}{p} \int (e[r^2 + x^2])^{\frac{1}{2}}$ für den Bogen CM der Spirale folgt. Die Vergleichung dieses Elements der Spirale mit den Elementen (109. 166) zeigt deutlich, daß die Rectification der Spirale mit der Quadratur der rechtwinklischen Hyperbel, füglich mit den Logarithmen, zusammenhängt. Es ist auch wirklich

$$\frac{I}{p} \int (e[x^2 + r^2]) = \frac{I}{2p} x^2 + \frac{r^2}{2p} \log. \text{hyp. } x \\ + \frac{r^4}{16p} x^{-2} \dots$$

IV.

Von

Cubirung der Körper,

besonders der runden,

die durch Umdrehung einer krummen Linie um ihre
Axe entstehen.

178. Erklärung.

Den Innhalt eines Körpers findet man, man cubirt ihn, wenn man die Elemente, aus denen er besteht, alle in eine Summe bringt.

179. Aufg. 38. Den Innhalt einer Pyramide AGDO (Fig. 31.) aus ihren Elementen zu finden.

Aufl. In der Pyramide AGDO stelle man sich das Perpendikel AC = f, oder die Höhe der Pyramide, in

verschiedene gleiche Theile AK = KH = HF = FE &c. gehestet vor, und lege durch die Theilungspuncte K, H, F, E... die Ebenen T, S, R, Q... insgesammt mit der Grundebene B parallel: so sind die Schnitte dieser Ebenen der Grundfläche B durchgängig ähnlich (Geom. 61. S.) also (z Zus.) $T: B = IL^q: GD^q = AK^q:$

$$AC^q [f^2] \text{ oder } T = \frac{B \cdot AK^q}{f^2}; \text{ und eben so } S = \frac{B \cdot AH^q}{f^2};$$

$$R = \frac{B \cdot AF^q}{f^2}; \quad Q = \frac{B \cdot AE^q}{f^2}; \quad \text{u. s. w.} \quad \text{Nun ist}$$

(z Zus.) jedes Pyramidenstück zwischen zweien parallelen Ebenen, größer als ein Prisma, dessen Grundfläche die untere größere Ebene, kleiner als ein Prisma, dessen Grundfläche die obere kleinere Ebene wäre, wenn beyde Prismata den Perpendikel zwischen den parallelen Ebenen des Pyramidenstückes zur Höhe hätten. Aber die Größe dieses zwischen nurgedachte beyde Prismata fallenden Pyramidenstückes, ist von der Größe jedes dieser Prismatum weniger unterschieden, als diese Prismata selbst von einander unterschieden sind; und da der Unterschied beyder Prismatum immer geringer wird, jemehr ihre Höhe abnimmt, je näher die parallelen Ebenen des Pyramidenstückes an einander rücken, und diese Näherung über alle Gränzen fortgesetzt sich gedenken lässt: so muß endlich, wenn die gleichen Höhen dieser Körper kleiner, als jede angebliche Größe beträgt, d. i. wenn die beyden parallelen Ebenen einander unendlich nahe angenommen werden, der Unterschied beyder Prismatum in Vergleichung mit dem auf der obern oder untern Ebene, und um so mehr in Vergleichung mit dem dazwischen fallenden Pyramidenstücke, unter alle Gränzen sich vermindern; also ein solches unendlich kleines Prisma von dem zugehörigen Pyramidenstücke nicht mehr zu unterscheiden, folglich ihm gleich seyn.

Wenn

Wenn man also die Höhe $AC = f$, in unendlich viele unendlich kleine gleiche Theile getheilt, und durch alle Theilungspunkte, wie vorher, parallele Ebenen mit der Grundfläche, gelegt, sich vorstellt: so findet man den Innenraum der Pyramide AGDO, aus der Summe aller, unendlich vielen, unendlich kleinen, über den durchgelegten Ebenen aufeinanderstehenden Prismen, die beständig, um unendlich kleine Unterschiede, von der Spitze herab, größer werden. Setzt man nun ein solches unendlich kleines Theilchen des Perpendikels, hier $AK = e$, so ist $AH = 2e$; $AF = 3e$;

$$AE = 4e \text{ u. s. w. also } T = \frac{B}{f^2} \cdot 1 \cdot e^2; S = \frac{B}{f^2} \cdot 2^2 \cdot e^2;$$

$$R = \frac{B}{f^2} \cdot 3^2 \cdot e^2; Q = \frac{B}{f^2} \cdot 4^2 \cdot e^2 \text{ &c. und es gibt}$$

hier so viele Grundflächen, so oft e in f enthalten seyn kann, d. i. $\frac{f}{e}$; also auch $\frac{f}{e}$ über einander stehende Prismen, von welchen jedes ein Product aus seiner Basis in die unendlich kleine Höhe e ist. Folglich ist

$$AGDO = eT + eS + eR + eQ \dots + eB = \frac{e^3 B}{f^2}$$

$$(1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \dots + \frac{f^2}{e^2}) = \frac{e^3 B}{f^2} \cdot \frac{f^3}{3e^3} [66]$$

oder die Pyramide AGDO = $\frac{1}{3} f B$, dem Drittel des Products aus der Höhe in die Grundfläche; wie aus der Elementargeometrie bekannt ist.

180. Zus. Wäre die Grundfläche B , so wie j. der parallele Schnitt mit ihr, ein Kreis, oder die Pyramide ein Regel, von der Grundfläche B , der Höhe $AC = f$; so ließen sich für den Regel eben die Schlüsse (179)

ubringen, und man fände dieses Regels Körperlichen Inhalt = $\frac{1}{3}$ fB. Die Verhältniß nehmlich eines Regels zu einer Pyramide, wenn beyde über gleichgroßen Grundflächen einerley Höhen haben, ist bekanntermaßen eine Verhältniß der Gleichheit.

181. Ann. Die hier angebrachten Schlüsse sind eben dieselben, deren man sich (61) bey den Flächen bedient hat; und hierinnen besteht die so vortreffliche Methode der Erschöpfung (Methodus Exhaustionum) der Alten, weil man nämlich, wenn man die Prismen auf den größern Basibus oberwärts, als so viel umgeschriebene, die Prismen auf den Kleinern Basibus (denn jedes Pyramidenstück hat eine größere und kleinere Basin) niederwärts, als so viel eingeschriebene Prismata betrachtet, durch die unendliche Anzahl von Prismen, die man hier um und in die Pyramide beschrieben gedenkt, die Beschreibung von aussen und innen gleichsam erschöpft. Newton hat sich dieser Methode, anstatt der neuern, schwankenden Methode des Untheilbaren (Methodus Indivisibilium) des Cavalieri, häufig bedient. Man pflegt die Erschöpfungs-Methode auch oft die Methode der Gränzen (Methodus Limitum) zu nennen; denn die gegebene Pyramide ist hier die Gränze, welcher sich die Summen aller, immer mehr und mehr vervielfältigen, ein oder umgeschriebenen Prismatum, ohne Ende nähert, so wie (61) die Krummliniche Fläche die Gränze der ein und umgeschriebenen Rectangel war. Eine umständliche Entwicklung, ja selbst eine Erweiterung dieser Methode, nebst ihrer mannichfältigen Anwendung, kann man bey Mac Laurin, in der Einleitung zu seinem großen Werke von den Fluxionen nachlesen. Euklides hat sich derselben vorzüglich im 12ten Buche seiner Elemente, Archimedes aber fast durchgängig bey seinen Untersuchungen bedient.

Ich habe übrigens die Auflösung dieser Aufgabe etwas umständlich auseinander gesetzt, um den Nutzen und Gebrauch dieser Methode, deren man sich noch ist, wiewohl unter einer etwas veränderten Gestalt, zu Befestigung der ersten Gründe der höhern Geometrie mit Vortheil bedient, an einem Exempel zu zeigen; wobei ich den 61. Satz der Geometrie des Hrn. Hofrath Rästners vor Augen gehabt habe. Denn dieses Buch hat, so wie die übrigen mathematischen Schriften dieses großen und erhabenen Meßkünstlers, meiner Einsicht nach, vor vielen andern Anleitungen den Vorzug, daß man darinn die besten Methoden der Alten und Neuern gesammlet, und mit einer fruchtbaren Kürze bey den Aufgaben und Lehrsätzen angewendet antrifft. Ein gleiches Lob muß man den Lehrbüchern des Herrn geheimden Raths von Segner und des Herrn Professor Karsten wiederaufgefahren lassen; woraus zugleich die Brauchbarkeit einer solchen Geometrie, neben des Euklides seiner, sattsamerhellet, da außerdem, nach dem einstimmigen Urtheile aller einsichtsvollen Mathematikverständigen, noch bis ist, keine Geometrie der Euklideischen den Vorzug hat streitig machen können.

182. Aufg. 39. AM (Fig. 32.) sey ein Bogen einer krummen Linie, von welchem AP, PM die rechtwinklichen Coordinaten x, y ; seyn mögen. Wenn sich die Fläche APM, um die unbewegliche Linie AP, als eine Axe dreht; so entsteht ein runder Körper AMM'M. Man soll einen Ausdruck für das Element dieses Körpers suchen, aus welchem man nachher den Inhalt desselben finden kann.

Aufl. Man ziehe noch eine andere Ordinate pm, so wird pm sowohl als PM, bey der Umdrehung einen Kreis beschreiben. Das Körperstück nun, zwischen diesen parallelen Kreisen, ist größer als ein Cylinder, der den Kreis mit PM zur Grundfläche hat, aber kleiner als ein Cylinder, über dem Kreise mit pm, wenn beyde Pp, die

Dicke des zwischen diese Cylinder fallenden Körperstückes, zur gemeinschaftlichen Höhe haben. Je kleiner nun hier P_p angenommen wird, desto geringer wird auch der Unterschied beyder Cylinder seyn; und da man P_p unter alle Gränzen verkleinern kann, so findet hier wie (180) eine Näherung dieser Cylinder ohne Ende statt, so daß endlich die Verhältnisse beyder Cylinder, und folglich des dazwischen fallenden Körperstückes, Verhältnisse der Gleichheit werden. Das Element des von der umdrehenden Fläche APM beschriebenen Körpers, ist also einem Cylinder gleich, dessen Grundfläche ein Kreiß mit PM oder y , die Höhe das unendlich kleine $P_p = e$, oder das Element der Abscisse x , ist. Wenn also die Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie wie $1 : P$ gesetzt wird: so ist $2Py$ der Umsang des Kreises mit y , und Py^2 dieses Kreises Fläche, woraus endlich ePy^2 für den Ausdruck des Elementes des runden Körpers folgt.

183. Zus. 1. Man ziehe die Tangente T Mm, so wird der Triangel TPM bey seiner Umdrehung um die Axe AP einen Regel beschreiben, dessen Grundfläche der Kreiß mit pm, die Spitze T ist. In diesem Regel ist der von Am beschriebene runde Körper ganz eingeschlossen, also das Element dieses Körpers, oder das Körpersstück zwischen den unendlich nahen Parallelkreisen mit pm; PM, als ein abgekürzter Regel von der unendlich kleinen Höhe P_p , zwischen diesen Parallelebenen, anzusehen; und so bekommt man (Geom. 63. S. 5. Zus. wenn man das dortige y hier e , und R, r , hier y setzt) für dieses Element den vorigen Ausdruck ePy^2 .

184. Zus. 2. Man suche also, aus der gegebenen Gleichung für die Linie AM, den Werth von y^2 in x auszudrücken, und substituire denselben in die vorhergefundene Formel für das Körperelement, so findet man dar-

daraus, wenn man dieglieder einzeln summirt, (66.79) den Inhalt des von der veränderlichen Fläche APM durch Umdrehung erzeugten Körpers, in x ausgedrückt; und so giebt die gehörige Bestimmung von x, den Inhalt des gegebenen Körpers in bekannten Größen, aber, wegen der damit verwinkelten Irrationalzahl π , doch immer nur approximatorisch.

185. Aufz. 3. Wenn die Ordinaten $P'M = y$ der gegebenen Linie, auf der Umdrehungs-Axe nicht senkrecht stünden, sondern mit ihr einen schiefen Winkel $MP'p = \pi$ machen, so wäre der Halbmesser der Grundfläche des unendlich kleinen Cylinders, oder des Körperelementes, hier nicht $p'm$, oder $P'M$ sondern das Perpendikel $p'm$ oder $P'm$, und seine Höhe nicht $P'p'$, sondern $P'p$; also das Körperelement hier $P'p \cdot P \cdot PM^2$; Nun ist $r : \sin. \pi = PM'(y) : PM = y \cdot \frac{\sin. \pi}{r}$; also $PM^2 = y^2 \cdot \frac{(\sin. \pi)^2}{r^2}$,

welches in vorhergehenden Ausdruck statt PM^2 substituiert, $\frac{e. Py^2 \cdot (\sin. \pi)^2}{r^2}$ für das Element des durch Umdrehung der Fläche entstandenen Körpers giebt.

186. Aufg. 40. Den körperlichen Inhalt eines senkrechten Regels ABC (Fig. 33.) zu finden.

Aufz. Der Inhalt eines solchen Regels ist bereits (180.) aus (179) hergeleitet worden. Hier findet man, wenn des Regels Höhe $AD = a$, der Grundfläche Halbmesser $DC = b$ gesetzt wird, den Inhalt folgender Gestalt: Für $AP = x$; $PM = y$; ist $AD(a) : DC(b) = AP(x) : PM$ oder $y = \frac{bx}{a}$ die Gleichung für die gerade Linie AM, die hier zugleich die unbestimmte Seite des

Regels abgiebt. Also ist $y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2}$, und, den Werth von x^2 in die Formel (182.) substituirt, $\frac{e Pb^2 x^2}{a^2}$ das veränderliche Element des Regels, folglich (66) $\frac{Pb^2 x^3}{3 \cdot a^2}$ der unbestimmte Inhalt desselben, aus welchem, $x = a$ gesetzt, der Inhalt des gegebenen Regels $ABC = \frac{1}{3} a \cdot Pb^2$ folgt.

187. Zus. Wäre des Regels Axe $AD = x$, unter einen schiefen Winkel $= \pi$, gegen die Grundfläche geneigt: so wäre, für einen Perpendikel AE , von des Regels Spitze auf die Grundfläche, $1 : x = \sin. \pi : AE$, oder $AE = x \cdot \sin. \pi$, also der Regel $ABC = \frac{1}{3} AE \cdot Pb^2 = \frac{1}{3} x \sin. \pi \cdot Pb^2$, und für $x = a$; $ABC = \frac{1}{3} a \cdot Pb^2 \sin. \pi$. Für einen senkrechten Regel wird $\sin. \pi = 1$; also sein Inhalt $\frac{1}{3} a \cdot Pb^2$ wie 186.

188. Aufg. 41. Den unbestimmten Inhalt jedes, durch Umdrehung eines Regelschnitts um seine Axe, entstandenen Sphäroids S , allgemein auszudrücken, und daraus ein gegebenes Sphäroid zu bestimmen.

Aufl. Aus (182) kommt, für die große Axe a ; und den Parameter p ; $S = P \left(\frac{p x^2}{2} + \frac{p x^3}{3a} \right) = \frac{P p x^2}{6a} (3a + 2x) = P p x^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{x}{a} \right)$ für alle Regelschnitte. Hieraus folgt:

1) für ein ganzes elliptisches Sphäroid um die große Axe a , für welches $x = a$ wird, aus dem oben Bei-

$$\text{Zeichen, } S = \frac{Ppa^2}{6} = \frac{P}{6} \cdot \frac{c^2}{a} \cdot a^2 = \frac{Pc^2a}{6} \text{ (Alg. 366)}$$

Für die Kugel vom Durchmesser a , ist hier auch c oder $p = a$; also der Kugel Inhalt $S' = \frac{Pa^3}{6}$; und bey-

der Körper Verhältniß, oder $S: S' = p: a = c^2: a^2$; wo c die kleine Axe des elliptischen Sphäroids bedeutet.

2) für ein elliptisches Sphäroid Σ um die kleine Axe c , für welches $y^2 = qz - \frac{qz^2}{c}$ die Gleichung der umdrehenden elliptischen Fläche wäre, wo z die Absisse vom Scheitel auf der kleinen Axe, y die zugehörige Ordinate, und $q = \frac{a^2}{c}$ den Parameter auf der kleinen Axe,

bedeutet, (56) hätte diese Gleichung einerley Gestalt mit der gewöhnlichen Ellipsen Gleichung für die Haupt- oder große Axe, so daß man in dem vorher gefundenen Ausdrucke des Sphäroids (188, 1) statt der dortigen $a; c; p$; x ; hier nur $c; a; q; z$; substituiren, und endlich $z = c$, so wie dort $x = a$ setzen darf, um den verlangten körperlichen Inhalt in bekannten Größen zu finden. Dieses

glebt für den unbestimmten Inhalt $\frac{Pqz^2}{6c} (3c - 2z)$;

also, $z = c$ gesetzt, das ganze Sphäroid $\Sigma = \frac{Pqc^2}{6} = \frac{Pa^2c}{6}$. Für eine Kugel Σ' vom Durchmesser c , käme

hier $\Sigma' = \frac{Pc^3}{6}$, also $\Sigma : \Sigma' = q$; $c = \frac{a^2}{c} : e = a^2 : c^2$, also ist auch $S : S' = \Sigma' : \Sigma$

3) Ein Cylinder C, der die große Ellipsenare a zum Durchmesser der Grundfläche, die kleine Are c zur Höhe hätte, würde $\frac{Pa^2c}{4}$ zum körperlichen Innhalte haben. Also wäre $\Sigma : C = \frac{Pa^2c}{6} : \frac{Pa^2c}{4} = 2 : 3$.

Eben so wäre, für einen Cylinder C, von dem Durchmesser c der Höhe a; $S : C = \frac{Pc^2a}{6} : \frac{Pc^2a}{4} = 2 : 3$; also in beyden Fällen das elliptische Sphäroid, so wie die Kugel, $\frac{2}{3}$ von einem umschriebenen Cylinder.

4) für das Hyperbolische Conoid von der Höhe $x = a$, dieses Körperstückes Innhalt $= \frac{5}{6} Ppa^2$; also fände man das Conoid aus der gleichseitigen Hyperbel, für welche $p = a$, bey eben dieser Höhe $\frac{5}{6} Pa^3$; wenn man nämlich in dem unbestimmten Innhalte $\frac{Px^2}{6} (3a + 2x)$ eines solchen Körpers, $x = a$ setzt.

5) für das parabolische Conoid, für welches in dem allgemeinen Ausdrucke $Ppx^2 (\frac{1}{2} \mp \frac{x}{3} \frac{1}{a})$ die Are a unendlich, also $\frac{1}{3} \frac{x}{a} = 0$ ist, der unbestimmte Innhalt $\frac{Ppx^2}{2}$, oder, y^2 statt px gesetzt, $\frac{Py^2x}{2}$; Ein solches

Stück

Stück des parabolischen Conoids ist also die Hälfte von einem umschriebenen Cylinder Py^2x , der mit dem Conoid einerley Höhe (x) und Grundfläche (Py^2) hat. Dieses Conoid hat zu einem in ihm eingeschriebenen Regel, eben die Verhältniß, welche ein Cylinder, dessen Höhe und Durchmesser einander gleich sind, zu seiner eingeschriebenen Kugel hat.

6) Für unendliche Parabeln, $y^m = p^n x^k$, wäre
 $y = p^{\frac{n}{m}} x^{\frac{k}{m}}$ also $y^2 = p^{\frac{2n}{m}} x^{\frac{2k}{m}}$; und für Conoiden
 solcher Parabeln das Element (182) $ePy^2 = ePp^{\frac{2n}{m}}$
 $\frac{2k}{m}$
 $x^{\frac{2k}{m}}$ und (66) der unbestimmte Inhalt dieser Co-
 noiden = $\frac{Pp^{\frac{2n}{m}} x^{\frac{2k}{m}} + 1}{\frac{2k}{m} + 1} = \frac{m Pp^{\frac{2n}{m}} x^{\frac{2k+m}{m}}}{2k+m}$
 $= \frac{m}{2k+m} \cdot Py^2x$, oder $\frac{m}{2k+m}$ Theile des um-
 schriebenen Cylinders.

189. Zus. Betrachtungen über die durch Umdrehung eines Regelschnitts um eine unbewegliche Axe entstehenden Körper, hat bereits Archimedes in einem besondern Buche von den Regel- und Kugel-ähnlichen Figuren, angestellt, in welchem er, nebst andern Untersuchungen, die Verhältniß dieser Körper gegen einander festgesetzt, und die Vergleichung der ganzen Körper sowohl, als derer, durch verschiedentlich gegen die Umdrehungs-Are geneigte Flächen, von ihnen abgeschnittenen Theile, mit Regeln oder Cylindern, die gleiche Höhen und

Grundflächen mit den sphäroidischen und conoidischen Körpern haben, bestimmt und berichtigt.

190. Aufg. 42. Die rechtwinklige Hyperbel GAN (Fig. 24.) deren Gleichung $yx = \alpha^2$ für CI = α ; CD = x ; DE = y ; drehe sich um die Asymptote CF; Man soll den Inhalt des auf diese Art erzeugten Körpers finden.

Aufl. Weil $y = \frac{\alpha^2}{x} = \alpha^2 x^{-1}$, so ist $y^2 = \alpha^4 x^{-2}$;
also das Element dieses Körpers (182) oder $ePy^2 = eP\alpha^4 x^{-2}$, und der Inhalt desselben = $\frac{P\alpha^4 x^{-1}}{-1}$
 $= - \frac{P\alpha^4}{x}$, also negativ, wie die Fläche (87. p. 65.)
auf der Asymptote. Dieses Körpers Inhalt verschwindet hier für $x = \infty$, so wie dort die Fläche, und gehört
also der Ausdruck $- \frac{P\alpha^4}{x}$, dem unendlich langen Körper zu, dessen Spitze sich, über dem Kreise mit DE, als einer Grundfläche, nach F; G; zu erstreckt; welches hier durch das negative Zeichen angedeutet wird, das sich nur auf die Lage des Körpers, nicht auf seinen Inhalt oder seine Größe beziehen kann.

191. Zus. 1. Dieses Körpers Inhalt ist also $\frac{P\alpha^4}{x} = \frac{P\alpha^4}{CD}$. Für CD = CI, oder $x = \alpha$, kommt des Körpers, dessen Grundfläche ein Kreis mit CI ist, Inhalt = $\frac{P\alpha^4}{CI} = P\alpha^3$. Beyder Körper Differenz $P\alpha^3$

$$P\alpha^3 - \frac{P\alpha^4}{x} \text{ oder } \frac{P\alpha^3}{x} (x - \alpha) \text{ d. i. hier } \frac{P. CI^c}{CD}$$

$(CD - CI)$ oder $\frac{P. CI^c. ID}{CD}$ giebt das Stück dieses

Körpers, das zwischen den parallelen Kreisen, welche die Ordinaten IA und DE beschreiben, enthalten ist.

192. Zus. 2. Für $x = 0$, wird $\frac{P\alpha^4}{x} = \frac{P\alpha^4}{0} = \infty$,

für den unendlich hohen Körper, über der unendlich grossen Grundfläche, welche die Asymptote CQ, als ein Halbmesser betrachtet, bei der Umdrehung um die Axe CF beschreibt. Bei diesem unendlich großen Körper ist also das Stück, zwischen den Kreisen mit DE und der Asymptote CQ, das zunächst an das zwar unendlich lange aber doch dem Innthalte nach endliche Körperstück, über der Kreisfläche mit DE, gränzt, unendlich gross. Beide Stücke dieses Körpers sind also unendlich lang, aber das eine ist endlich, das andere unendlich gross, weil sonst beyder Summe nicht unendlich seyn könnte.

V.

Von der
Quadratur der krummen Seitenflächen,
 derer
 durch Umdrehung einer krummen Linie entstan-
 denen runden Körper.

193. Aufg. 43.

Das Element einer durch Umdrehung einer Linie um ihre Axe entstandenen krummen Fläche (Fig. 32.) zu finden.

Aufl. Indem der Bogen $AM = A$ mit seiner Ordinate MP , durch Umdrehung um die unbewegliche Axe AP , einen Körper (182) erzeugt: beschreibt das Bogenelement Mm , einen ringförmigen Streifen, der das Körperelement als eine Seitenfläche umgibt. Dieses Streifens Grundlinie ist also die Peripherie eines Kreises mit PM oder y , seine Höhe, das Element Mm des Bogens AM ; also der Ausdruck für diesen unendlich schmalen Streifen, oder das gesuchte Element der krummen Fläche $= 2Py \cdot Mm = 2Pe \cdot \text{Norm. } A$; wenn man den Werth von Mm aus 155, 2. substituirt.

194. Zus. Man könnte, so wie das Körperstück zwischen den Parallelkreisen mit den Halbmessern pm , PM , als ein abgekürzter Regel betrachtet worden ist, auch hier die Seitenfläche dieses Körperstückes als den Unterschied zweier senkrechten Regelflächen, über eben diesen Kreisen ansehen. Aus Geom. 64. S. 4. Z. fände man dieser Fläche Inhalt $= P \cdot Mm (PM + pm)$ wo Mm des

des abgekürzten Regels Seite bedeutet. Wird nun die-
selbe unendlich klein angenommen, so fällt das Bogen-
element Mm mit dieser Seite, oder dem Tangenten-
elemente Mm zusammen, (155) und so kommt, weil auf
den Fall $p_m = PM = y$ angenommen werden darf, das
Element der krummen Fläche $= P. Mm. 2PM =$
 $= 2Py. Mm = 2Pe. Norm. A$; wie (193)

195. Aufg. 44. Die krumme Seitenfläche eines
senkrechten Regels ABC (Fig. 33.) zu finden.

Aufl. Nach der Bezeichnung (186) kommt PM
oder $y = \frac{bx}{a}$, für die unbestimmte veränderliche
Seite des Regels, durch deren Umdrehung die Regel-
fläche mit dem Regel erzeugt wird. Nun ist (39) der ge-
raden Linie $y - \frac{bx}{a} = 0$; Subnormale $= \frac{by}{a}$; also
 $y^2 + \frac{b^2y^2}{a^2}$ das Quadrat der Normale, folglich die
Normale $= \frac{y}{a} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{bx}{a^2} \sqrt{a^2 + b^2}$, und $2Pe.$
 $Norm. A = 2Pe. \frac{bx}{a^2} \sqrt{a^2 + b^2}$, dem Elemente der
krummen Fläche; also (66) $\frac{Pbx^2}{a^2} \sqrt{a^2 + b^2}$, der ver-
änderlichen krummen Seitenfläche des Regels gleich;
woraus, $x = a$ gesetzt, die Seitenfläche des gegebenen
Regels ABC $= Pb \sqrt{a^2 + b^2}$ folgt.

196. Zus. Weil $\sqrt{a^2 + b^2} = AC$, der Seite des
Regels, und Pb der halben Peripherie, des mit dem
Halb-

Halbmesser DC = b beschriebenen Kreises (der Grundfläche des Regels) gleich ist: so findet man die krumme Seitenfläche eines senkrechten Regels, aus dem Producte der halben Peripherie seiner Grundfläche in des Regels Seite; wie bereits aus den Elementen bekannt ist. Die Fläche des abgekürzten senkrechten Regels, findet man hieraus leicht. Die Fläche eines schießen oder ungleichseitigen Regels hingegen, ist schon schwerer zu finden.

197. Aufg. 45. Die Fläche einer Kugel zu quadriren.

Aufl. Für den Durchmesser a ist des beschriebenen Kreises Normale $= \frac{1}{2}a$ (171) also das Flächen-Element oder 2 Pe. Norm. A. = $P a e^{\circ}$, woraus (66) Pax für die krumme Fläche eines Kugelabschnitts folgt, dessen Höhe x ist. Für x = a, kommt alsdenn $P a^2$ für die ganze Kugelfläche. Setze man den Halbmesser der Kugel, oder $\frac{1}{2}a = r$, so wäre $P a^2 = 4 P r^2$; also die Kugelfläche so groß als vier größte Kreise der Kugel (Geom. 65. S.)

198. Aufg. 46. Den Inhalt der krummen Fläche Q eines parabolischen Asteregels (Fig. 32.) zu finden.

Aufl. Für die Parabel ist (44) Norm. A = $\frac{1}{2}\sqrt{(p^2 + 4px)}$ also 2 Pe. Norm. A = $2Pe\frac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4px} = Pe(p^2 + 4px)^{\frac{1}{2}}$, dem Elemente der parabolischen Regelfläche. Man setze $(p^2 + 4px)^{\frac{1}{2}} = z$; und suche e, das Element der Abscisse x, nun in s, dem Elemente der Ordinate z, vermittelst der Formel (158) $\frac{e}{Subtang.}$

$= \frac{\varepsilon}{z}$ auszudrücken. Aus dem Angenommenen folgt
 $p^2 + 4px = z^2$ oder $z^2 - 4px - pp = 0$; und
hieraus (21) dieser krummen Linie Subtang. $= \frac{2z^2}{4P}$.

Weil nun $e = \frac{\varepsilon. \text{Subtang.}}{z}$, so kommt, den Werth dieses Subtangenten substituiert, $e = \frac{\varepsilon \cdot 2z^2}{4Pz} = \frac{\varepsilon z}{2P}$; also

$$Pe(p^2 + 4px)^{\frac{1}{2}} = \frac{Pez \cdot z}{2P} = \frac{Pez^2}{2P} \text{ und}$$

$$f(Pe(p^2 + 4px))^{\frac{1}{2}} = \frac{P}{2P} f_{\varepsilon} z^2 = \frac{Pz^3}{6P} \quad (66)$$

Dieses giebt, statt z seinen Werth gesetzt,

$$Q = \frac{P(p^2 + 4px)^{\frac{3}{2}}}{6P} + \text{Const.}$$

Soll nun hier Q für $x = 0$ verschwinden (denn in diesem Puncte, welcher der Scheitel des parabolischen Astterkegels ist, hat die krumme Fläche keine endliche Größe)

$$\text{so muß } 0 = \frac{P(p^2 + 0)^{\frac{3}{2}}}{6P} + \text{Const. oder}$$

$$\text{Const.} = - \frac{Pp^2 \cdot \frac{3}{2}}{6P} = - \frac{Pp^3}{6P}, \text{ also}$$

$$Q = \frac{P([p^2 + 4px]^{\frac{3}{2}} - p^3)}{6P} \text{ seyn. Eben so}$$

kommt, y^3 statt px gesetzt,

$$Q =$$

$Q = \frac{P([p^2 + 4y^2]^{\frac{3}{2}} - p^3)}{6p}$ für den veränderlichen Inhalt der krummen Fläche des parabolischen Astroides.

199. Zus. 1. Wenn man in dem Ausdrucke des Flächenelementes $Px(p^2 + 4px)^{\frac{1}{2}}$; die Irrationalgröße in eine unendliche Reihe (88) aufgelöst, und alles in Px multipliciret hätte, so hätte man

$$\text{Elein. } Q = Px(px^0 + 2x - \frac{2x^3}{p} + \frac{4x^5}{p^2} - \frac{10x^4}{p^3} + \frac{28x^6}{p^4} - \frac{84x^7}{p^5} + \frac{264x^8}{p^6} \dots) \text{ und}$$

hieraus (66)

$$Q = P(px + x^2 - \frac{2x^3}{3p} + \frac{x^4}{p^2} - \frac{2x^5}{p^3} + \frac{14x^6}{3p^4} - \frac{12x^7}{p^5} + \frac{33x^8}{p^6} \dots) \text{ für ein kleines } x$$

gefunden. Für ein großes x hätte man $(4px + p^2)^{\frac{1}{2}}$ entwickeln müssen (110). Der hier gefundene Ausdruck für Q , ist nun dem vorigen (198) vollkommen gleich; denn es ist das vorstige

$$(p^2 + 4px)^{\frac{3}{2}} = p^3 + 6p^2x + 6px^2 - 4x^3 + \frac{6x^4}{p} + \frac{12x^5}{p^2} + \frac{28x^6}{p^3} - \frac{72x^7}{p^4} + \frac{198x^8}{p^5} \dots$$

wovon p^3 abgezogen, und das Ganze mit $6p$ dividirt, die vorstige

$$\text{Vorige Reihe: } px + x^2 - \frac{2x^3}{3p} + \frac{x^4}{p^2} - \frac{2x^5}{p^3} \text{ &c.}$$

giebt, die in P multiplizirt, den Werth der unbestimmten krummen Fläche Q ausdrückt.

200. Zus. 2. Gesetzt man hätte die Reihe $p^3 + 6p^2x + 6px^2 - 4x^3 + \frac{6x^4}{P}$ &c. = A, die daher entste-

het, wenn man die Reihe $px + x^2 - \frac{2x^3}{3p} + \frac{x^4}{p^2} \dots$

(199) durchgehends mit $6p$ multipliziret, und p^3 dazu addirt, irgendwo gefunden, und man vermuthe oder man wüste es gewiß, daß die Reihe A nichts anders als eine entwickelte binomische Wurzelgröße wäre: so fände man die beyden unbekannten Theile α, β , und den Exponenten m dieser Wurzelgröße, aus den drey ersten Gliedern der Binomial-Formel $(\alpha + \beta)^m = \alpha^m$

$$+ m\alpha^{m-1}\beta + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \alpha^{m-2} \beta^2 \dots \text{ Denn}$$

$$\text{hier wäre I)} \alpha^m = p^3; \text{ II)} m\alpha^{m-1}\beta = 6p^2x;$$

$$\text{III)} \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \alpha^{m-2} \beta^2 = 6px^2; \text{ und so wäre}$$

also, für die drey unbekannten Größen α, β, m , auch drey, von einander unabhängige, Gleichungen gegeben, aus denen sich dieselben nothwendig müssen bestimmen und

finden lassen. Aus II. und III. kommt $\frac{36p^4x^2}{m^2\alpha^2m-2}$

$$= \beta^2 = \frac{12px^2}{m(m-1)\alpha^{m-2}} \text{ und hieraus } \alpha^m =$$

$\frac{(3m - 3)}{m} p^3 = p^3$, dem Werthe für α^m aus I. und so kommt der Exponent $m = \frac{3}{2}$; Folglich ist α^m oder $\alpha^{\frac{3}{2}}$ $= p^3$ und $\alpha = p^2$; also $\beta = \frac{6p^2x}{m \cdot \alpha^{m-1}} = \frac{6p^2x}{\frac{3}{2}(p^2)^{\frac{3}{2}-1}}$ $= 4px$; und endlich $(\alpha + \beta)^m = (p^2 + 4px)^{\frac{3}{2}}$ wo die ersten drey Glieder der zu entwickelnden Wurzelgröße $(p^2 + 4px)^{\frac{3}{2}}$ ganz gewiß mit den ersten drey Gliedern der Reihe A, und so auch die übrigen Glieder aus diesem Irrationalausdrucke, mit den übrigen Gliedern von A, übereinkommen werden, wenn A eine Wurzelreihe ist. Diese Erfindung der binomischen Wurzelgröße durch die aus ihr entwickelten Reihe, kann in gewissen Fällen sehr nützlich seyn.

201. Zus. 3. Die drey Gleichungen (200) werden nämlich die Größen α , β , m immer bestimmen, auch auf den Fall, wenn die Reihe A keine Wurzelreihe wäre. Man findet hier nämlich einen Irrationalausdruck, welcher, in eine Reihe aufgelöst, die drey ersten Glieder von A nach ihrer Ordnung enthält; die übrigen Glieder der Reihe können von den übrigen Gliedern in A unterscheiden seyn, weil das Verfahren (200) eigentlich nur drey Glieder bestimmt. Die Vergleichung also beider Reihen, der erst gegebenen, und der aus dem gefundenen Irrationalausdruck neuentwickelten Reihe, muß hier entscheiden, ob der gefundene Irrationalausdruck mit der gegebenen Reihe A einerley sey; und daß wird allemal seyn, wenn A wirklich eine Wurzelreihe ist.



VI.

Anhang
einiger Aufgaben,
die
Regelschnitte betreffend.

202. Aufg. 47.

Auf einer (Fig. 34.) von zweien, einander rechtwinklisch durchschneidenden Linien QC, DE, nehme man einen Punct F nach Gefallen. GH sey ein Stück einer Linie, in welcher alle Punkte gegen die Linie QC, und den Punct F in der andern Linie DE, eine solche Lage haben, daß ein Perpendikel MB zu dem correspondirenden MF beständig in einer und eben derselben Verhältniß ($r:q$) sey. Man soll die Gleichung für die Linie GH, oder den geometrischen Ort für den Punct M suchen.

Aufl. Man theile DF nach der Verhältniß $r:q$ oder $BM:MF$, und sehe, wenn A der Theilungspunct ist, $DA = m$; $AF = n$, so ist $BM:MF = r:q = m:n$; Man falle ferner das Perpendikel MP, so ist für $AP = x$ und $MP = y$; $FP = x - n$; $FM = \sqrt{(x-n)^2 + y^2}$ und $BM = DP = DA + AP = m + x$. Da nun nach der Bedingung der Aufgabe durchgängig

$$\frac{BM^2}{d.f.} : \frac{FM^2}{(x-n)^2 + y^2} = \frac{m^2}{n^2} : \frac{m^2}{x^2}$$

$$\text{oder } (m^2 + 2mx + x^2) : (n^2 - 2nx + x^2 + y^2) = m^2 : n^2$$

$$\text{so ist } y^2 = \frac{(2mn^2 + 2m^2n)x + (n^2 - m^2)x^2}{m^2}$$

$$\text{oder } y^2 = \frac{2n(n+m)x}{m} + \frac{n^2 - m^2}{m^2}x^2$$

der geometrische Ort für den Punct M, oder die Gleichung für die Linie GH, in welcher alle Punkte die geforderte Eigenschaft haben, und die nach Beschaffenheit des Verhältnisses $m : n$ oder $r : q$ verschieden ist.

203. Zus. 1. Nimmt man an, daß MB gegen MF unendlich klein, also $m = \frac{1}{\infty}$, oder $\frac{1}{m} = \infty$ sei: so verändert sich die Gleichung (202) in $y^2 = 2n^2\infty x + n^2\infty^2 x^2$.

Hier verschwindet nun das Glied $2n^2\infty x$, als ein unendlich kleineres, gegen $n^2\infty^2 x^2$, und bleibt also

$$y^2 = n^2\infty^2 x^2 \text{ das ist } y = n\infty x = \frac{nx}{m}, \text{ wenn}$$

man hier $\frac{1}{m}$ für ∞ setzt; und gehört also die Gleichung in dem Falle für eine gerade Linie.

204. Zus. 2. Setzt man aber in der Gleichung (202) $m = \infty$, so wird aus ihr, die Glieder weggeworfen, die gegen die unendlich größern verschwinden,

$$y^2 = \frac{2nx}{m} - \frac{m^2}{m^2}x^2, \text{ oder } y^2 = 2nx - x^2, \text{ die}$$

Gleichung für einen Cirkel, von dem Durchmesser $2n$. Die gesuchte Linie ist also ein Cirkel, wenn BM gegen MF unendlich groß ist.

205. Zus. 3. Wenn aber n sowohl als m endlich sind, auf welchen Fall sich die Aufgabe (202) eigentlich bezieht,

so ist, wenn $n = m$ angenommen wird, $\frac{n^2 - m^2}{m^2} = 0$,

also $y^2 = \frac{2n(n+m)}{m} x$. Für $n > m$ ist $\frac{n^2 - m^2}{m^2}$

positiv, aber für $n < m$ ist $\frac{n^2 - m^2}{m^2}$ negativ; folg-

lich in der Gleichung $y^2 = \frac{2n(n+m)}{m} x$

$+ \frac{(n^2 - m^2)}{m^2} x^2$, der Coefficient von x^2 zweydeutig.

Setzt man nun $\frac{2n(n+m)}{m} = p$, und $\frac{2mn}{n-m} = \pm a$,

so ist $\frac{n^2 - m^2}{m^2} = \pm \frac{p}{a}$ und, für obewähnte drey

Fälle, $y^2 = px$; $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$; oder endlich

$y^2 = px - \frac{px^2}{a}$; daß also die Eigenschaft einer be-

ständigen Verhältniß der Linien BM, FM (202) allen Regelschnitten gemein ist, die sich auch durch die Beschränktheit dieser Verhältniß, nachdem solche eine Verhältniß der Gleichheit, (ratio aequalitatis) eine kleinere oder größere Verhältniß der Ungleichheit (ratio minor vel maior inaequalitatis) ist, unterscheiden lassen.

206. Anm. Die Linie QC heißt die Directrix des Schnitts, denn so pflegt man überhaupt jede Linie in der Geometrie zu benennen, welche die Bewegung einer andern

Linie oder Fläche bestimmt, durch welche eine Linie, Fläche oder ein Körper beschrieben wird. Die Bestimmung dieser Directrix, für einen gegebenen Regelschnitt, aus der Tangente, ist (51) gezeigt worden. Die Directrix ist aber nicht als selimal eine gerade Linie; denn wenn man statt QC irgend eine krumme Linie, z. E. einen Kreis zur Directrix annähme, und eine Linie suchte, die in allen ihren Puncten von dem Umfange dieses Kreises, und einem willkührlich angenommenen, der Lage nach bestimmten Puncte, jedesmal gleich weit entfernt wäre: so würde man wieder auf die Regelschnitte kommen; wobei es auf die Lage des angenommenen Punctes, ob selbiger innerhalb oder außerhalb des Kreismanges sich befindet, ob er der Peripherie unendlich nahe, oder unendlich von ihr entfernt liegend, angenommen wird, hauptsächlich ankommt. Setzt man den Halbmesser des Kreises unendlich, so erhält man wieder die geradliniche Directrix QC, und man begreift leicht, daß die Beschreibung der Regelschnitte, vermittelst des Kreises und eines angenommenen Punctes, noch allgemeiner sey, als die vorhergehende (202) weil diese sich aus jener herleiten läßt, und verschiedene Eigenschaften der Regelschnitte aus ihr unmittelbar folgen, oder sich doch durch sehr leichte Schlüsse übersehen lassen. Die geometrische Construction der Regelschnitte nach dieser Methode, mit allen daben vorkommenden Bestimmungen, allhier zu zeigen, würde zu weitläufig, und selbst wider die Absicht seyn, die ich mir hier vorgesezt habe. Sie hat übrigens keine Schwürigkeit, und man kann solche in des Herrn Pater Scherffers Geom. P. III. Art. III. umständlich auseinander gesetzt, nachlesen.

207. Aufg. 48. In dem Rechtecke ACDE (Fig. 35.) dessen Höhe CD, und AC die Basis ist, theile man die Linien AD; AE; eine in so viel Theile ein als die andere. Durch d, einen willkührlichen Theilungspunct in AD, richte man auf

AD

AD das Perpendikel dz auf, und ziehe aus D die Linie Dg , nach dem zugehörigen Theilungspuncke g der Linie AE; daß nämlich $Dd : DA = Eg : EA$. Die Linien Dg , dz schneiden alsdenn einander in z. Man soll die Krumme Linie suchen, die des Punktes z geometrischer Ort ist.

Aufz. Man sehe $Dd = x$; $dz = y$; $AE = CD = a$; $AC = ED = b$; und suche eine Gleichung zwischen x und y

Nun sey AD oder $\sqrt{a^2 + b^2} = s$; nach der Construction ist $AD(s) : Dd(x) = EA(a) : Eg = \frac{ax}{s}$,
also $EA - Eg = \frac{a(s-x)}{s} = Ag$. Man ziehe ferner das Perpendikel gH , so ist $\triangle gAH \sim \triangle DAE$, folglich $DA(s) : AE(a) = Ag \frac{[a(s-x)]}{s} :$
 $AH = \frac{a^2 s - a^2 x}{s^2}$ also $AD - AH = \frac{s^2 - a^2 s + a^2 x}{s^2}$
 $= \frac{b^2 s + a^2 x}{s^2} = HD$; und ebenso $DA(s) : DE(b)$
 $= Ag \frac{[a(s-x)]}{s} : gH = \frac{ab(s-x)}{s^2}$; und weil auch $\triangle DHg \sim \triangle Ddz$, so ist endlich:
 $DH \frac{[a^2 x + b^2 s]}{s^2} : Hg \frac{[ab(s-x)]}{s^2} = Dd$
 $(x) : dz$ oder $y = \frac{abx(s-x)}{a^2 x + b^2 s}$ folglich die zu su-

chende krumme Linie, eine Linie der zweyten Ordnung oder ein Regelschnitt.

Da die Ordinaten y hier eine einformige Function der Abscisse x ist: so kann die Linie unmöglich ein Cirkel oder eine Ellipse seyn; weil in beyden die Abscissenlinie niemals eine solche Lage haben kann, daß zu jeder Abscisse nur eine Ordinate, wie hier, gehörte. Für $y = 0$ wird $x = 0$ oder $x = s = AB$; (Fig. 36.) und schneidet also die krumme Linie die Abscissenaxe ST in den Puncten A und B. So lange ein positives x kleiner ist als s , sind die Ordinaten positiv. Für ein positives x hingegen, daß größer ist als s , oder für ein negatives x , das nicht größer ist als $\frac{b^2 s}{a^2}$, sind die Ordinaten negativ, und werden für $x = +\infty$, oder $x = -\frac{b^2 s}{a^2} = AH$, selbst unendlich; daß also WABO zween unendliche, diesen Abscissen zugehörige, Schenkel der krummen Linie sind. Für $x > -\frac{b^2 s}{a^2}$ wird in der Gleichung Zähler und Nenner negativ; folglich kommen für vergleichene negative Abscissen, wieder positive Ordinaten, und also noch zween andere unendliche Schenkel IMK, über der Abscissenaxe ST, weil auch für $x = -\infty$, die Ordinate y unendlich wird. Die krumme Linie ist also eine Hyperbel, und RG eine von ihren Asymptoten. Auch siehet man sogleich, daß es hier ein Maximum und Minimum in den Ordinaten, rechts und linker Hand von dem Anfangspuncte A, geben müsse. Für beyde Fälle ist hier, wie durchgehends bey den Regelschnitten, die Tangente an diese Puncte, mit der Abscissenaxe ST parallel, also die Subtangente $= \infty$, so wie die Subnormale

normale = 0. Man suche also für die Gleichung

$$y = \frac{abx(s-x)}{a^2x+b^2s} \text{ d. i. für } a^2xy + b^2sy - absx$$

$+ abx^2 = 0$; die Subtangente PT, (21) so findet man

$$PT = \frac{(a^2x + b^2s)y}{abs - a^2y - 2abx}; \text{ also } PT = \infty, \text{ d. i.}$$

$$abs - a^2y - 2abx = 0 \text{ gesetzt, } y = \frac{bs - 2bx}{a}.$$

Setzt man nun hier statt y, den Werth dafür, aus obiger Hauptgleichung, so bekommt man hierdurch die be-

$$\text{stimmte Gleichung, } x^2 = \frac{-2b^2sx + b^2s^2}{a^2}, \text{ wofür}$$

die beyden Werthe von

$$x = -\frac{b^2s}{a^2} \pm \sqrt{\frac{(b^4s^2 + a^2b^2s^2)}{a^4}} \text{ d. i.}$$

$$x = -\frac{b^2s}{a^2} \pm \frac{bs^2}{a^2} \text{ kommen, von welchen } e,$$

$$\frac{bs(s-b)}{a^2} = Ap, \text{ die Abscisse für das Maximum}$$

$$\frac{bs(a^2 + 2b^2 - 2bs)}{a^3} = \frac{bs(s-b)^2}{a^3} \text{ oder für die}$$

$$\text{zu } Ap \text{ gehörige Ordinate } pm; \text{ der andere } \frac{-bs(b+s)}{a^2}$$

$$= AP, \text{ die Abscisse für das Minimum} =$$

$$\frac{bs(a^2 + 2b^2 + 2bs)}{a^3} = \frac{bs(b+s)^2}{a^3} \text{ oder für die zu}$$

A P gehörige Ordinate P M giebt: so daß sich im ersten Falle, Abscisse und Ordinate zu einander, wie $a:(s-b)$ im zweyten wie $a:(s+b)$ verhalten, also die Ordinate, wenn sie ein Größtes wird, hier kleiner ist, als da, wo sie ein Kleinstes ist.

208. Zus. 1. Will man die Hyperbel selbst verzeichnen, so nehme man (Fig. 36.) auf der Abscissenlinie ST die Linien $AB = s$; $AH = \frac{b^2 s}{a^2}$; so ist RG rechtwinklig durch H mit ST, die eine Asymptote, auch sind A; B; zwei Punkte der Hyperbel. Man nehme ferner $BD = AH$, so ist D ein Punkt der Abscissenaxe, durch welchen die andere Asymptote gehen muß (Alg. 414.) Ihre Lage zu bestimmen, sehe man die Ordinate

$$PM = \frac{bs(b+s)^2}{a^3}, \text{ rechtwinklig auf die Abscisse}$$

$$AP = \frac{bs(b+s)}{a^2}, \text{ so ist M ein Punkt der entgegengesetzten Hyperbel, und MR, mit ST parallel gezogen, eine Tangente an diesen Punkt, weil PM ein Kleinstes. Man verlängere MR nach Q, bis } MQ = MR,$$

so ist auch Q ein Punkt in der zweyten Asymptote, und ihre Lage nurmehr durch die Punkte Q, D, bestimmt gegeben, so daß man aus den gegebenen Asymptoten und Hyperbelpunkten die Hyperbel selbst (Alg. 415) gar leicht verzeichnen kann.

209. Zus. 2. Der Durchschnitt beider Asymptoten, bestimmt das Centrum C, und den Asymptotenwinkel $DCH = 2k$; durch dessen Halbierung $ECH = ECD = k$; man die Lage der großen Axe $EK = \alpha$, so wie durch folgende Berechnung, so wohl dieser als der Kleinen

nen Axe $GF = \gamma$; und des Parameters β ; Größe findet.

Denn weil $QR \parallel ST$, auch $QM = MR$, so ist
 $MR = PH = AP - AH = \frac{bs^2}{a^2} = QM$, und HD
 $= AH + BD + AB = 2AH + AB = \frac{(a^2 + 2b^2)s}{a^2}$

auch ist $\Delta QML \sim QRC \sim DHC \sim DPL$, folglich
 $QR : HD = RC : CH$, also $QR + HD : RC + CH$
 $= HD : CH$ d. i. in der Figur, wo $QR = 2MR =$
 $2PH$ und $RC + CH = PM$;

$$2PH + HD : PM = HD : CH$$

$$\frac{s(s+b)^2}{a^2} : \frac{bs(s+b)^2}{a^3} = \frac{s(a^2 + 2b^2)}{a^2} : CH;$$

$$\text{also } CH = \frac{bs(a^2 + 2b^2)}{a^3} = \frac{b}{a} \cdot \frac{(a^2 + 2b^2)s}{a^2}$$

$$= \frac{b \cdot HD}{a} \text{ und } CD = \sqrt{CH^2 + HD^2}$$

$$= \frac{s^2(a^2 + 2b^2)}{a^3} = \frac{s \cdot HD}{a} \quad \text{Auch ist } HD : CD$$

$$= a : s \text{ und } CH : HD = b : a \text{ ingleichen } CD : CH = s : b. \quad \text{Nun ist}$$

$$HD : CD [a : s] = PH \frac{[bs^2]}{a^2} : CL = \frac{bs^3}{a^3}$$

$$\text{und } HD : CH [a : b] = QM \frac{[bs^2]}{a^2} : LM = \frac{b^2s^3}{a^3}$$

Allso

also CL. LM = $\frac{b^3 s^5}{a^6}$ = dem beständigen Producte

der Coordinaten auf der Asymptote, = CV⁴, der Potenz
der Hyperbel, wenn CV = VE gemacht wird. Man
setze also

$$CV = \frac{\sqrt{b^3 s^5}}{a^3} = \frac{bs^2 \sqrt{bs}}{a^3}, \text{ so wird } VE, \text{ mit } CH$$

parallel gezogen = CV seyn. Man ziehe ferner das
Perpendikel VN, so ist CN = NE = $\frac{1}{4}\alpha$, und $1 : \text{Cos. } k$

$$= CV \frac{(bs^2 \sqrt{bs})}{a^3} : CN = \frac{bs^2 \sqrt{bs}}{a^3}. \text{ Cos. } k = \frac{\alpha}{4}$$

und $4CN = \frac{4bs^2}{a^3} \sqrt{bs}$. Cos. k = α , der großen
Axe. Eben so ist CN : NV = CE (2CN) : EF d. i.

$$\text{Cos. } k : \text{Sin. } k = \frac{2bs^2 \sqrt{bs}}{a^3}. \text{ Cos. } k : EF = \frac{2bs^2 \sqrt{bs}}{a^3}.$$

$$\text{Sin. } k \text{ und } 2EF = \frac{4bs^2 \sqrt{bs}}{a^3}. \text{ Sin. } k = \gamma, \text{ der kleinen Axe; beides für den Halbmesser } 1; \text{ welches mit Alg. 416. VI. vollkommen übereinstimmt.}$$

Eben so wäre CH : HD [b : a] = 1 : tang. 2k = 1 :
Cot. HDC, wo sowohl Tang. 2k als Cot. HDC = $\frac{a}{b}$;
wodurch man die Lage der zweyten Asymptote QV be-
stimmen kann, ohne den Punct M vorher zu suchen.

210. Zus. 3. Die trigonometrischen Unsen aus den Arten wegzuschaffen, muß man Sin. k; Cos. k; wie vorher tang. 2 k; Cot. HDC in a und b auszudrücken suchen.

Nun ist CD: DH [s: a] = 1: Sin. 2 k = $\frac{a}{s}$,

und CD: CH [s: b] = 1: Cos. 2 k = $\frac{b}{s}$, und kann

man aus dem Sinus oder Cosinus des doppelten Winkels, den Sin. oder Cos. des einfachen Winkels leicht finden. Es ist aber für den Halbmesser 1; (Trigon. 19.

$$\text{S. §. 8. 9.) } \sin k = \frac{\sqrt{1 - \cos 2k}}{2};$$

$$\cos k = \frac{\sqrt{1 + \cos 2k}}{2} \text{ oder, den Werth von } \cos k$$

$$\text{gehörig substituirt, } \sin k = \frac{\sqrt{s - b}}{2s};$$

$$\cos k = \frac{\sqrt{s + b}}{2s}. \text{ Diese Werthe in die obigen Aus-}$$

$$\text{drücke von } \alpha, \gamma \text{ gesetzt, geben } \alpha = \frac{4bs^2\sqrt{bs(s+b)}}{a^3\sqrt{2s}}$$

$$= \frac{2bs^2\sqrt{2b(s+b)}}{a^3} \text{ und } \gamma = \frac{4bs^2\sqrt{bs(s-b)}}{a^3\sqrt{2s}}$$

$$= \frac{2bs^2\sqrt{2b(s-b)}}{a^3}; \text{ also den Parameter } \beta = \frac{\gamma^2}{\alpha}$$

$$= \frac{4b^2s^4 \cdot 2b(s-b)}{a^6} : \frac{2bs^2\sqrt{2b(s+b)}}{a^3}$$

$$= \frac{4b^2s^2(s-b)}{a^3\sqrt{2b(s+b)}}; \text{ auch ist hier } \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{16}$$

$$= \frac{8b^3s^4}{16a^6} \frac{(s+b)+(s-b)}{(s+b)-(s-b)} = \frac{b^3s^5}{a^6} = \text{CL. LM}$$

wie oben (209).

Die Gleichung der Hyperbel also, von welcher der Bogen A z D (Fig. 35.) d. i. der Bogen AEB (Fig. 36.)

$$\text{nur ein Stück ist, ist } z^2 = \frac{s-b}{s+b} \cdot u^2 - \frac{2b^3s^4(s-b)}{a^6}$$

die Abscissen u aus dem Mittelpuncte C, oder

$$z^2 = \frac{4b^2s^2(s-b)}{a^3\sqrt{2b(s+b)}} w + \frac{s-b}{s+b} w^2, \text{ die Abscissen } w$$

vom Scheitelpuncte E an gerechnet.

211. Ann. Beyn Frezier; Théorie et Pratique de la coupe des pierres &c. T.I. p. 124. kommt die in vorhergehender Aufgabe geforderte Verzeichnung des Bogens A z D unter dem Namen: Trait du Maitre Blancard vor. Die Absicht nämlich ist, einen gedruckten Bogen über ein Fenster u. d. g. zu verzeichnen, dessen Höhe gegen seine Breite geringe ist. Der Zimmermeister Blancard bildete sich ein, der Ort des Punctes z wäre ein Bogen eines Kreises, der durch A, D, B (Fig. 35.) gienge, dessen Halbmesser also $\frac{1}{2}(CD + \frac{CB^2}{CD})$ wäre; welches aber durch das, was hier gezeigt worden ist, widerlegt wird. Auch kann, da der Punct B (Fig. 36.) nicht der Scheitelpunkt der Hyperbel ist, der

der Theil DZB (Fig. 35.) der hier in DCBF mit verzeichnet, und dem in ACDE verzeichneten gleich und ähnlich ist, nicht die Fortsetzung des hyperbolischen Bogens AEB (Fig. 36.) und also der Bogen AZDZB (Fig. 35) nicht ein Bogen einer einzigen zusammenhängenden Linie seyn: sondern man muß in dem Rechtecke CDFB wiederholen, was man in CDEA gemacht hat.

Zu der Absicht des gedruckten Bogens könnte man noch suchen, was die krumme Linie, die des Punctes z geometrischer Ort ist, für Winkel mit CD, in D; mit CA in A; oder CB in B; macht. Das erste würde entscheiden, ob der Theil, der in DCBF verzeichnet wird, mit dem in CDEA verzeichneten zusammenhängen kann, daß sie eine Tangente EDF haben, oder ob da ein spitzer Winkel zwischen beyden entsteht: wenn das nicht schon aus dem vorhergehenden bekannt wäre; das zweyte ist zu wissen nöthig, wenn man untersuchen will, wie dieser Bogen gegen die Widerlagen drückt.

212. Aufg. 49. Den Winkel zu finden, den eine Linie aus der Sonne an einen Planeten gezogen (radius vector) mit des Planeten Richtung macht.

Aufl. Die Planetenbahnen sind Ellipsen in deren einem Brennpuncke die Sonne liegt; der Weg eines Planeten aber, hat in jedem Puncte der Bahn die Richtung der Tangente an diesen Punct. Also heißt die Aufgabe, geometrisch betrachtet: den veränderlichen Winkel SMT zu suchen, den die Linie SM in dem Puncte M mit der Tangente MT an diesen Punct macht.

Man ziehe die Ordinate MP, so ist alsdenn tang.

$$SMP = \frac{SP}{MP} \text{ und eben so tang. } PMT = \frac{PT}{MP}; \text{ also}$$

(Trigon. 19. S. 3. Zus.) Tang. (SMP + PMT) d. i.
Tang.

$$\text{Tang. SMT} = \frac{SP + PT}{MP} : \left(1 - \frac{SP \cdot PT}{MP^2}\right) =$$

$\frac{ST \cdot MP}{MP^2 - SP \cdot PT}$. Drückt man nun diese Linien, aus dem ersten Capitel, in ihren Werthen aus, nach welchen

$$MP^2 = \frac{c^2}{4a^2} (a^2 - 4u^2); \quad PT = \frac{a^2 - 4u^2}{4u};$$

$$SP = \frac{2u + \sqrt{a^2 - c^2}}{2}; \quad ST = \frac{a^2 + 2u\sqrt{a^2 - c^2}}{4u},$$

wo a die große Axe AB ; c die kleine Axe ML ; u die veränderliche Abscisse CP , bedeutet, so findet man

$$ST \cdot MP = \frac{a^2 + 2u\sqrt{a^2 - c^2}}{4u} \cdot \frac{c}{2a} \sqrt{a^2 - 4u^2} \\ = cQ \sqrt{a^2 - 4u^2}, \text{ wenn man hier } \frac{a^2 + 2u\sqrt{a^2 - c^2}}{8au} \\ = Q \text{ setzt. Eben so ist}$$

$$MP^2 - SP \cdot PT = \frac{c^2}{4a^2} (a^2 - 4u^2) - \\ \left(\frac{2u + \sqrt{a^2 - c^2}}{2}\right) \cdot \frac{(a^2 - 4u^2)}{4u} = (a^2 - 4u^2) \cdot \\ \left(\frac{c^2}{4a^2} - \frac{2u + \sqrt{a^2 - c^2}}{8u}\right) = (a^2 - 4u^2) S,$$

wenn man den letzten Factor, oder

$$\frac{2c^2u - 2a^2u - a^2\sqrt{a^2 - c^2}}{8a^2u} = S \text{ setzt.}$$

Nun

Nun findet sich $S = -Q \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$; und hieraus

$$MP^2 - SP \cdot PT = - (a^2 - 4u^2) \frac{Q\sqrt{a^2 - c^2}}{a};$$

folglich $\frac{ST \cdot MP}{MP^2 - SP \cdot PT} = \frac{cQ\sqrt{a^2 - 4u^2}}{-(a^2 - 4u^2)Q\sqrt{a^2 - c^2}}$

oder $\text{Tang. SMT} = - \frac{ac}{\sqrt{a^2 - c^2} \cdot \sqrt{a^2 - 4u^2}}$

für den Halbmesser 1. Nun ist in der Ellipse $\sqrt{a^2 - c^2}$ und $\sqrt{a^2 - 4u^2}$, so wie beyder Product, allemal positiv, u mag eine kleine oder grosse Abscisse bedeuten, und bleibt daher Tang. SMT durchgehends, für alle Punkte der Ellipse, verneint, oder der gefundene Ausdruck giebt den Winkel SMT durchgehends stumpf; denn bey m , ist dieser Winkel SMT . Für den Nebenwinkel SMK , der den Winkel SMT zu 180° ergänzt, müßte man für die Tangente dieses spitzen Winkels, den vorhergefundenen Ausdruck positiv nehmen, also $\text{Tang. SMK} =$

$$\frac{ac}{\sqrt{a^2 - c^2} \cdot \sqrt{a^2 - 4u^2}} \text{ sehen, und so kommt Tang.}$$

$SMT = - \text{Tang. SMK}$ (Trig. 19. S. 4. Zus.); auch folgt hieraus $\text{Tang.}(SMT + SMK) = 0$, wie für die Tangente eines Bogens oder Winkels von 180° auch nothwendig kommen muß.

213. Ann. Hätte man aus dem zweyten Brennpunkte s die Linie sM gezogen, so wäre (8) $sMT = SMK$. Der Winkel sMT liegt aber in einem Triangel sMT , von wel-

chem man die drey Seiten s M, s T, MT, aus dem ersten Capitel ausdrücken kann: und so hätte man Sin. s M T d. i. Sin. SKM (Trig. 20. S.) aus diesen Seiten berechnen können, wo der gefundene Ausdruck zugleich den Sinus von SMT, des stumpfen Nebenwinkels, bestimmt haben würde; aber die Rechnung dafür ist nicht kürzer als die vorige, für die Tangente des zusammengesetzten Winkels, durch welche man zugleich die Zweydeutigkeit des Sinus vermeidet, und den gesuchten Winkel gerade zu stumpf findet.

214. Zus. 1. Der hier gefundene veränderliche Ausdruck für Tang. SMT, glebt auch den Winkel SMT veränderlich. Will man nun unter allen SMT den größten Winkel suchen, so muß man u so bestimmen, daß

$$\frac{ac}{\sqrt{a^2 - c^2} \cdot \sqrt{a^2 - 4u^2}} \text{ oder } \text{Tang. SMK ein Kleinstes}$$

stes wird (denn so wird der Winkel SMK ein kleinstes, folglich sein stumpfer Nebenwinkel SMT ein größter) welches geschieht, wenn man CP oder $u = 0$ setzt, weil dadurch der Divisor ein Größtes, folglich der Quotient

$$\frac{ac}{\sqrt{a^2 - c^2} \cdot \sqrt{a^2 - 0}} = \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}} \text{ ein Kleinstes}$$

wird.

215. Zus. 2. Wäre die Planetenbahn ein Kreiß, so wäre in dem Ausdrucke für Tang. SMT, auch $a=c$, und $\sqrt{a^2 - c^2} = 0$, also $\text{Tang. SMT} = \frac{a^2}{0} = \infty$,

für jeden Werth von u. Der Winkel SMT wäre hier also durchgehends ein Winkel von 90° , oder ein rechter Winkel, wie bereits aus den Elementen bekannt ist. Man findet also durch Berechnung, wie viel aufs Höchste, (denn der Fehler vermindert sich, je größer das u in

In der Ellipse angenommen wird, so daß er für $u = \frac{1}{2} a$ ganz verschwindet) dieser Winkel unrichtig angenommen wird, wenn man die Planetenbahn für einen Kreis annehmen wollte. Dieses geschieht z. E. von Hrn. Euler, in der Untersuchung von den Folgen aus der allmäßlichen Fortpflanzung des Lichtes Comm. Petrop. T. XI. p. 185. und a. a. O. Man muß also, wenn man eine solche Voraussetzung brauchen will, berechnen und zeigen können, daß die Unrichtigkeit, die man mit ihr annimmt, in das was man aus ihr herleitet, keine beträchtliche Folge hat.

216. Zus. 3. Nähme man des Planeten Excentri-

$$\text{cität CS oder } \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = 0, 02. \frac{1}{2} a, \text{ oder } SC =$$

$$\frac{2}{100} CA, \text{ so fände man } \sqrt{a^2 - c^2} = 0, 02. a = \frac{1}{50} a,$$

$$\text{und hieraus } c^2 = \frac{(50^2 - 1)a^2}{50^2}, \text{ oder } c = \frac{a\sqrt{2499}}{50};$$

$$\text{also } \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}} = \frac{a\sqrt{2499}}{50} : \frac{a}{50} = \sqrt{2499} \text{ für die}$$

Tangente des gesuchten Kleinsten Winkels SMK, auf den Rechnungshalbmesser 1 bezogen; und so findet man, vermittelst der Logarithmen (nach welchen $\log. \sqrt{2499} = \frac{1}{2} \log. 2499$) für den Halbmesser der logarithmischen Tafeln.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log. 2499 &= 1, 6988831 \\ \log. \text{rad. tab.} &= 10, 0000000 \end{aligned}$$

$$\text{Log. tab. Tang. SMK} = 11, 6988831$$

welche Zahl in der Reihe der Logarithmen für die Tangenten den Winkel $88^\circ 51' +$ giebt, und ist folglich, bey dieser Voraussetzung, der größte stumpfe Winkel, oder

$SMT = 180^\circ - (88^\circ + 51' + \dots) = 91^\circ 9'$ — und übertrefft den rechten Winkel, den der Kreis geben würde, noch nicht um $1^\circ 9'$

217. Zus. 4. Eine solche Ellipse wäre aber noch mehr eccentricisch als die Erdbahn, wenn man für sie (Ans. d. ang. Math. §. 274.) die mittlere Entfernung, $\frac{1}{2}(AS+SB)$ oder $\frac{1}{2}(21626 + 22374)$ d. i. $AC = 22000$ Halbmesser der Erde, folglich $AC - AS = 22000 - 21626$

oder die Eccentricität $SC = 374 = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{2}$ setzt,

woraus $\sqrt{a^2 - c^2} = 748$, also $c^2 = a^2 - (748)^2 = (44000)^2 - (748)^2$ oder $c = 43992$, beynahe, folgt. Hieraus findet man

$$\frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}} = \frac{43992}{748} = \frac{9 \cdot 4888}{748} \text{ und}$$

$$\begin{array}{r} 10 + \text{Log. } 9 = 10,9542425 \\ \text{Log. } 4888 = 3,6891312 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{also } 10 + \text{Log. } 43992 = 14,6433737 \\ \text{und Log. } 748 = 2,8739016 \end{array} \text{ subtr.}$$

$$\text{Log. tab. Tang. SMK} = 11,7694721$$

zu welchem Logarithmen der Winkel von $89^\circ 2'$ — der nächste in der Tafel ist. Da nun (212) $\text{Tang. } SMT = - \text{Tang. } SMK = - \text{tang. } (89^\circ 2')$ so ist hier der gesuchte größte stumpfe Winkel, oder $SMT = 90^\circ 58'$ Läßt sich also zeigen, daß bey den Berechnungen von der allmählichen Fortpflanzung des Lichts, oder bey andern Untersuchungen, auf welche dieser Winkel einen Einfluß hat, verstattet ist, einen solchen Winkel für einen Winkel von 90° zu nehmen, so darf man auch die Erdbahn, in dem Falle, für einen Kreis annehmen; wie Hr. Euler am angeführten und andern Orten gethan hat.

218. Ann. Bey sehr eccentricischen Bahnen, wie z. E. die Bahn des Merkurs ist, gebet es nicht an, weil da der Fehler zu beträchtlich wird. Dieses hat Mr. Euler selbst wahrge- nommen, ob er gleich anfänglich geglaubt hat, die Planeten- bahnen ließen sich zu bemeldeter Absicht alle für Kreise anneh- men, und hat daher diese Untersuchung selbst von neuen in den Mem. de l'Acad. de Pr. 1746. vorgenommen. Die hier beigefügten Erläuterungen zeigen übrigens den practischen astronomischen Nutzen dieser Aufgabe, die zugleich eine Probe von der Wichtigkeit mathematischer Kenntnisse in der Absicht ist, daß wir hier wissen wie viel wir fehlen, weil wir doch allemal gewiß fehlen.

Bemerkung über die ersten Parabeln von allen Geschlechtern.

219. Wenn man die Pythagorische Tafel (Geom. 36) rechter Hand und unterwärts erweitert, fortsetzt: so ist klar, daß alle positive ganze Potenzen, der von Eins an, in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen, in die Quadrat- fächer der Tafel sich nach und nach einschreiben lassen. Den untern, rechter Hand liegenden, Eckpunkt eines solchen klei- nen Quadrates, nenne man den Winkelpunct der einge- schriebenen Zahl: so findet sich, daß alle Winkelpunkte der Quadratzahlen, in einer geraden Linie; alle Win- kelpunkte der Würffel, in einer Apollonischen Parab- el; alle Winkelpunkte der Biquadrat, in der ersten cubischen; alle Winkelpunkte der fünften Potenzzah- len, in der ersten biquadratischen Parabel u. s. w. zu liegen kommen, dergestalt, daß jedesmal der Grad dieser ersten Parabeln, die insgesamt die Seite p eines sol- chen kleinen Quadrates zum gemeinschaftlichen Parameter haben, um Eins kleiner seyn wird als der Potenzial- exponent der Zahlen, durch deren Winkelpunkte diese Pa- rabeln gehen; so daß die Parabeln $y^n = p^{n-1}x$, den $(n+1)$ ten Potenzen der natürlichen Zahlen zugehören.

Bew.

Bew. Wenn (Fig. 38.) $AB = AC = p$; $AP = m.p$, daß bei P die natürliche Zahl m steht, so steht in der Queerreihe PQ jedes m. z, wo z jede ganze Zahl bedeutet. Also sey $PQ = p.m.z = AP.z$; soll nun $m.z = m^n$, seyn, so ist $z = m^{n-r}$, also $PQ = AP.m^{n-r}$, oder, weil nach dem vorigen $m = \frac{AP}{P}$, also $m^{n-r} = \frac{AP^{n-r}}{P^{n-r}}$, so kommt $PQ = AP$.
 $\frac{AP^{n-r}}{P^{n-r}} = \frac{AP^n}{P^{n-r}}$, oder $p^{n-r} \cdot PQ = AP^n$, und hieraus die Gleichung $y^n = p^{n-r}x$, für alle erste Parabeln.

220. Zus. Die Bogen dieser Parabeln haben insgesamt ihren gemeinschaftlichen Scheitel in A, und sind gegen die Abscissenaxe AP hohl oder erhaben, nachdem man auf ihr x oder y zur Abscisse der Gleichung $y^n = p^{n-r}x$ annimmt; so daß sich hier immer zwei, gleiche und ähnliche, Parabeln, über AP in die Tafel einschreiben lassen, weil hier jede Potenzzahl über 1, von den Wurzeln an gerechnet, in der Tafel zweymal in ähnlicher Lage vorhanden ist. Für $n = 1$ wird $y = x$, die Parabel eine gerade Linie, für die in gerader Linie hintereinander liegende Quadratzahlen.

221. Anm. Diese Bemerkung über die Potenzzahlen, deren Wahrheit ich aus der Betrachtung der Pythagorischen Tafel durch eine Induction erkannt hatte, überschrieb ich bey Gelegenheit dem Hrn. Hofr. Rästner, welcher sie auch einer Bekanntmachung nicht unverth hielt, und mit den hier beigefügten allgemeinen Beweis dafür gütigst mittheilte. Es erhellet übrigens von selbst, daß man, so wie hier mit den Potenzzahlen in der Pythagorischen Tafel geschehen ist, auch andere Zahlen, die nach einem mit Absicht gewählten Gesetze fortgehen, in Quadrate, Rechtecke, Triangel u. s. w. einschreiben, und die Linien aufsuchen könnte, die die Winkel- oder andere Punkte gewisser Zahlen unter den eingeschriebenen, schneiden würden; welche Untersuchung in verschiedenen Fällen nicht ohne Nutzen seyn dürfte.



³ Tab.I.





















