DIE NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN VON

ARNOLD BERLINER

UNTER BESONDERER MITWIRKUNG VON HANS SPEMANN IN FREIBURG I. BR.

ORGAN DER GESELLSCHAFT DEUTSCHER NATURFORSCHER UND ÄRZTE
UND
ORGAN DER KAISER WILHELM-GESELLSCHAFT ZUR FÖRDERUNG DER WISSENSCHAFTEN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN W 9

HEFT 10 (SEITE 225—248) | 11. MÄRZ 1927 | FÜNFZEHNTER JAHRGANG

DEM ANDENKEN

AN

CARL RUNGE

Der Postvertrieb der „Naturwissenschaften" erfolgt von Leipzig aus!

DIE NATURWISSENSCHAFTEN

Fünfzehnter Jahrgang 11. März 1927 Heft 10

DEM ANDENKEN AN CARL RUNGE

Inhalt:

* * *

Am 30. August vorigen Jahres feierte CARL RUNGE seinen siebzigsten Geburtstag. Die für diesen Tag beabsichtigte Herausgabe einer ihm gewidmeten Sammlung von Arbeiten seiner Freunde und Fachgenossen hat sich durch äußere Umstände verzögert. Am 3. Januar dieses Jahres hat ein jäher Tod den großen Gelehrten mitten aus seiner Arbeit abgerufen. Da die Aufsätze ein lebendiges Bild von der Größe und Mannigfaltigkeit der Arbeitsgebiete RUNGES geben, läßt der Herausgeber sie in der ursprünglich geplanten Form erscheinen.

Carl Runge †.

Von L. PRANDTL, Göttingen.

Am 3. Januar 1927 ist ganz unerwartet der feinsinnige Göttinger Mathematiker CARL RUNGE, den man als den Vater der modernen angewandten Mathematik bezeichnet, der aber auch bei den Physikern und Astronomen einen sehr guten Namen hatte, am Herzschlag gestorben. Ein harmonisch gelebtes Leben ist damit in einer beneidenswerten Weise zu Ende gegangen, zu früh freilich für alle, die um ihn waren. Vor weniger als einem halben Jahr, am 30. August 1926, feierten wir Göttinger seinen siebzigsten Geburtstag, und keiner von den fröhlichen Teilnehmern dieses Festes ahnte auch nur mit dem Schatten eines Gedankens, daß dieses Leben sobald beschlossen werden sollte, denn RUNGE, der von je allen körperlichen Sport gepflegt hatte, turnte und sprang, schwamm und ruderte noch, wie es um zwanzig Jahre Jüngere schon nicht mehr taten, und machte in nichts den Eindruck eines „Emeritus", der er doch seit zwei Jahren war. Er freute sich der Muße, die er nun hatte und nützte sie, um wie in früheren Zeiten wieder experimentell physikalisch zu arbeiten, hörte daneben Vorlesungen, z. B. über Vererbung, die ihn mathematisch interessierte, kurzum, er stand noch so recht mitten im Leben. Erst in den allerletzten Monaten hatte er mit Herzbeschwerden zu kämpfen und mußte den ihm lieben Sport aufgeben, was ihm schmerzlich war. Ohne daß er sich dessen bewußt wurde, nahm ihn dann der Tod, den er übrigens nicht fürchtete, hinweg. Viel Schönes hätte er uns noch schenken können, doch müssen wir dankbar sein für das, was er uns war und dankbar auch dem Schicksal, das es wirklich gut mit ihm gemeint hat.

Dies ist in kurzen Zügen sein Lebensgang: Geboren in Bremen als Sohn des Kaufmanns Julius Runge und seiner Gattin Fanny geb. Tolmé, einer gebürtigen Engländerin, verbrachte er die ersten Kinderjahre in Havanna, wo sein Vater das dänische Konsulat verwaltete; die Familie siedelte jedoch bereits nach wenigen Jahren endgültig nach Bremen über, wo der Vater schon vier Jahre später plötzlich starb, seine junge Frau mit acht Kindern zurücklassend. Carl besuchte in Bremen das Gymnasium und absolvierte es 1875. Nach einem halben Jahr in Italien, wohin er seine Mutter begleitete, begann er sein Studium in München, und zwar zunächst in der Absicht, sich der Literatur und Philosophie zu widmen; bald jedoch wandte er sich der Mathematik zu; 1877 ging er nach Berlin, wo besonders WEIERSTRASS und KRONECKER von starkem Einfluß auf ihn waren. Dort promovierte er auch 1880. Im Jahre 1883 habilitierte er sich für Mathematik an der Berliner Universität; im Frühjahr 1886 erhielt er eine ordentliche Professur für Mathematik an der Technischen Hochschule in Hannover, wo er $18^1/_2$ Jahre verblieb, bis er von FELIX KLEIN nach Göttingen gerufen wurde. 1887 verheiratete er sich mit Aimée du Bois-Reymond, einer Tochter des berühmten Berliner Physiologen, die ihm in harmonischer Ehe sechs Kinder schenkte.

Seine Arbeitsrichtung war erst rein mathematisch gewesen, doch war er immer schon bestrebt gewesen, eine Aufgabe erst dann als erledigt anzusehen, wenn sie in die eleganteste und für die wirkliche Durchführung geeignetste Form gebracht war. Noch in seiner Berliner Zeit erfuhr er von seinem künftigen Schwiegervater, in dessen Familie er viel verkehrte, von der BALMERschen Zahlenbeziehung zwischen den Wellenlängen der Wasserstofflinien, die ihn dann stark zu beschäftigen schien. In Hannover fand er HEINRICH KAYSER als Physiker vor. Als er mit diesem die Entdeckung BALMERS besprach, beschlossen beide, zu untersuchen, ob nicht der BALMERserie ähnliche Gesetze auch in sonstigen Linienspektren vorhanden seien. RUNGE bearbeitete daraufhin das damals vorliegende spektroskopische Material, fand Anfänge von Serien und trug darüber 1887 in England bei Gelegenheit einer British Association vor. Die Unvollkommenheit der bisherigen Messungen veranlaßte KAYSER und RUNGE, selber Experimente anzustellen. Es folgten die grundlegenden Arbeiten über die Spektren der Elemente, an denen RUNGE zunächst vorwiegend als Mathematiker, dann aber auch experimentell beteiligt war. Er ersann eine Theorie für die Wirkungsweise des Konkavgitters und leitete eine rationelle Justierungsmethode für dasselbe ab.

Als 1894 KAYSER nach Bonn übersiedelte und DIETERICI sein Nachfolger wurde, schloß RUNGE sich mit dessen jungem Mitarbeiter FR. PASCHEN zu neuen spektroskopischen Arbeiten zusammen und war jetzt selbst der Führende. Mit einem RUNGE gehörenden Konkavgitter wurde das Heliumspektrum erforscht und serienanalytisch entwirrt. Dann kamen die Spectra von Sauerstoff, Schwefel und Selen und schließlich mit einer neuartigen Aufstellung des Konkavgitters die Untersuchung der ZEEMAN-Effekte besonders im Quecksilberspektrum und ähnlichen Spektren. Später folgte zusammen mit PRECHT die Analyse des Radiumspektrums.

Es war übrigens nicht die Spektroskopie allein, die ihn neben seiner Lehrtätigkeit beschäftigte; in seinen mathematischen Forschungen, die er weiter pflegte, wandte er sich immer mehr dem praktischen Rechnen zu, dem zweckmäßigsten Auflösen von Gleichungen, der zweckmäßigsten Berechnung von Reihen, auch den numerischen Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen, auch den Ausgleichungsverfahren der Beobachtungsfehler: Früchte dieser Tätigkeit sind seine beiden in der „Sammlung Schubert" erschienenen kleinen Lehrbücher: *Praxis der Gleichungen* (1900) und *Theorie und Praxis der Reihen* (1904). Mit Kollegen der technischen Fächer, die seiner exakten Denkungsweise nahestanden, hielt er gerne Fühlung, so mit dem Geodäten JORDAN, dem Herausgeber der Zeitschrift für Vermessungswesen, mit dem Statiker BARKHAUSEN, dem er gelegentlich mit Ratschlägen mathematischer Art zu Hilfe kam. Seine Arbeit über die Ermittlung der Formänderungen eines großen genieteten Wasserbehälters in der Zeitschr. f. Math. u. Physik Bd. 51, 1904, ist aus solcher Zusammenarbeit entstanden. Auch der Schreiber dieser Zeilen, der von 1901—1904 den Mechaniklehrstuhl der Maschineningenieurabteilung inne hatte, verdankt RUNGE, der ihm eine tiefe Freundschaft entgegenbrachte, in dieser Zeit ungemein viel wertvollste Belehrung und Förderung.

Im Herbst 1904 wurden beide nach Göttingen berufen, RUNGE mit dem Auftrage, die angewandte Mathematik zu vertreten. Er mußte sich dazu in die graphischen Fächer (darstellende Geometrie, Photogrammetrie und ähnliches), obschon sie ihm gut bekannt waren, wieder neu einarbeiten, und er tat es in solcher Weise, daß vieles Neue, sonst nicht übliche hinzukam, so z. B. die halb numerische, halb graphische Methode des bezifferten Grundrisses, die sonst nicht gelehrt zu werden pflegt. Daneben entstanden graphische und numerische Methoden für die verschiedensten Aufgaben der Analysis, der Integralrechnung usw.; Rechenschieber, Rechenmaschinen und andere Apparate wurden mit Ausnutzung aller denkbaren Möglichkeiten verwendet. Ferner las er Differential- und Integralrechnung sowie Analytische Geometrie, beides in einer besonderen auf Anschaulichkeit und auf numerische Durchführung gerichteten Form. Im Seminar wurden, häufig mit dem Schreiber dieser Zeilen zusammen, in den ersten Jahren auch mit F. KLEIN, der dann natürlich die Führung hatte, Stoffe der Elastizitätstheorie, der graphischen Statik, der Dynamik starrer Systeme, der Aerodynamik, der Vektoranalysis, natürlich auch der graphischen und numerischen Methoden behandelt.

Die Hauptergebnisse der Göttinger Lehrtätigkeit liegen in den folgenden Büchern vor: *Analytische Geometrie der Ebene* (1908), *Graphische Methoden* (1914), beides bei Teubner in Leipzig; *Vektoranalysis*, von der nur Band I (1919) bei Hirzel erschien. Nach RUNGEschen Vorlesungen schrieb sein Schüler HORST v. SANDEN seine *Praktische Analysis* (1914 bei Teubner). Seine Vorlesung über *Numerisches Rechnen* hat RUNGE zusammen mit einem anderen Schüler, H. KÖNIG, 1924 bei Springer erscheinen lassen.

In der Physik hat sich RUNGE in dieser Zeit nicht mehr so viel aktiv betätigt, doch hat er seine beiden Gitter im Göttinger Physikalischen Institut aufgestellt und war für ihre nutzbringende Verwendung bemüht. Mit regster Anteilnahme hat er die neue Entwicklung auf seinem früheren Spezialgebiet, wie auch in der damit eng verknüpften Fixsternastronomie verfolgt. Daneben hat er sich, besonders in der ersten Zeit der Flugtechnik, auch viel mit Aerodynamik befaßt und selbst über die Schwingungen der Flugzeuge gearbeitet; zusammen mit seiner Gattin hat er die *Aerodynamik* von LANCHESTER ins Deutsche übersetzt (I. Bd. 1909, II. Bd. 1911). Nach seiner Emeritierung hat er sich wieder dem Experiment zugewandt und hat eine größere experimentelle Arbeit gerade noch abschließen können. Die Veröffentlichung wird z. Z. von seinen Freunden vorbereitet.

RUNGE hat mehrfach große Reisen gemacht, wobei ihm seine große Sprachenkenntnis sehr zustatten kam (das Englisch beherrschte er wie seine Muttersprache). So besuchte er im Jahre 1897 die Versammlung der British Association in Toronto in Canada und machte im Anschluß daran eine Rundreise zu den wichtigsten amerikanischen Sternwarten und zu verschiedenen Spektralphysikern, darunter zu ROWLAND, von dem die berühmten Konkavgitter stammen. Im Jahre 1906 unternahm er mit seinem leider viel zu früh verstorbenen Freund SCHWARZSCHILD eine Sonnenfinsternisexpedition nach Algier, im Winter 1909 bis 1910 ging er als Austauschprofessor an die Columbia University in New York und schloß daran eine zweite Rundreise durch Amerika, bei der er neben Universitäten und Sternwarten auch die Stätten seiner ersten Kindheit in Havanna aufsuchte. Im Sommer 1926 machte er noch die Versammlung der British Association in Oxford mit.

Wie sehr gerade die Astronomen seine Arbeitsweise schätzten, mag daraus entnommen werden, daß ihm zweimal astronomische Stellen angeboten wurden, einmal (1897) vom Yerkes Observatorium, einmal (1909) vom Astrophysikalischen Observatorium in Potsdam, dessen Leitung er übernehmen sollte. Er hatte aber beide Male abgelehnt, da er seine Aufgaben in anderer Richtung sah. Die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, der er schon von 1901 als Korrespondent und von 1914 als ordentliches Mitglied angehörte, hat ihn 1917 zum Sekretär ihrer mathematisch-physikalischen Klasse gewählt, welches Amt er bis 1925 verwaltet hat.

Das Lebensbild von CARL RUNGE wäre unvollständig, wenn es nicht auch seiner prächtigen Charaktereigenschaften gedächte. Er war von einer natürlichen Liebenswürdigkeit, dabei aber unbestechlich in seinen Urteilen, selbst bis zu scharfer Verurteilung dessen, was ihm unfair oder borniert erschien. Für sich selbst war er von großer Bescheidenheit; ein schöner Beweis davon ist die Antwort, die er auf eine Ansprache gelegentlich seines siebzigsten Geburtstages gab: Er könne für das, was er wissenschaftlich geleistet hätte, keinen Dank annehmen, denn er hätte es ja nur deshalb gemacht, weil es ihm selbst Freude gemacht hätte. Kennzeichnend für seine Art waren auch die lebenslangen Freundschaften, die er pflegte. Neben den bereits erwähnten ist es besonders die zu MAX PLANCK, die aus gemeinsamen Studentenjahren herstammt. Seinen vier Töchtern und zwei Söhnen war er ein reizender Vater, der sich mit ihnen so recht zu freuen und auf ihre Ideen und Wünsche einzugehen verstand. Er liebte die gute Hausmusik sehr und führte mit den Kindern, selbst am Klavier sitzend, oft irgendwelche alte Musik, wie Abschnitte aus der Matthäus-Passion oder der Schöpfung auf. Im Krieg ist auch ihm Schweres nicht erspart geblieben. Von seinen Söhnen, die beide als Freiwillige hinauszogen, fiel der eine gleich in einer der ersten Schlachten in Flandern. RUNGE hat es in heldenhafter Gefaßtheit getragen. Um so herzlichere Freude hatte er, als in den letzten Jahren erst eine Tochter, dann der Sohn ihm Enkel ins Haus brachten. Nicht unerwähnt sei auch gelassen, daß er, früher eine unpolitische Natur, sich nach dem Kriege entschieden der neuen Ordnung zuwandte. Das Erbe hanseatischer Vorfahren und seine Kenntnis anderer Völker, besonders der Englisch redenden, mag dabei stark mitgewirkt haben.

Von denen, die der liebenswerten Persönlichkeit CARL RUNGES nähergetreten sind, wird keiner ihn je vergessen. Seine wissenschaftlichen Leistungen werden sein Andenken auf Jahrhunderte wach erhalten.

Carl Runge als Mathematiker.

Von R. COURANT, Göttingen.

CARL RUNGE ist als Privatdozent in Berlin und als Professor in Hannover wie in Göttingen Vertreter der Mathematik gewesen. Ihr gehörte ein sehr großer, vielleicht der größte Teil seiner Lebensarbeit. Was er für die angewandte Mathematik getan hat, ist ein wichtiges Stück der mathematischen Zeitgeschichte.

Es wäre verkehrt, zu glauben, daß bei RUNGE — wie leider bei manchen anderen Vertretern der Anwendungen — irgendein innerer Gegensatz zur Einstellung des *theoretischen* Wissenschaftlers bestand. Im Gegenteil, er war durchaus ein Vertreter der Mathematik und mathematischen Naturbetrachtung als eines *Ganzen*. Seine wissenschaftliche Wirksamkeit beruhte auf einer umfassenden und tiefen mathematischen allgemeinen Bildung und einem durchdringenden mathematisch-theoretischen Blick. Bis in die letzten Monate seines Lebens blieb er auch bei scheinbar ganz fernliegenden abstrakten Gegenständen einer der aufmerksamsten, verständnisvollsten und in der Diskussion fruchtbarsten unter den Teilnehmern der Göttinger Mathematischen Gesellschaft.

Seinen Ausgangspunkt als Forscher nahm er durchaus auf der theoretischen Seite. Zunächst war es die Zahlentheorie, die ihn fesselte; der Verkehr mit KRONECKER in Berlin gab hierzu die Anregung. Auf zahlentheoretisch-algebraischem Gebiet hat er in seinen Jugendarbeiten Leistungen aufzuweisen, die noch heute Bewunderung erregen. Andererseits zog ihn der funktionentheoretische Gedankenkreis des großen Lehrers WEIERSTRASS in seinen Bann, wie fast jedes der jungen Talente, die damals in Berlin studierten. RUNGES erste Leistungen, die seinen Namen bekanntmachten und ihm eine rasche äußere Laufbahn eröffneten, liegen auf dem Gebiete der Funktionentheorie.

WEIERSTRASS war davon ausgegangen, daß man die sog. analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen durch Potenzreihen darzustellen hätte. Solche Potenzreihen geben, wenn man sie an einer bestimmten Stelle abbricht, eine Annäherung an die betreffende Funktion durch eine ganze rationale Funktion in einem gewissen Kreise. RUNGES aufsehenerregende Entdeckung war nun, daß man eine solche Annäherung analytischer Funktionen durch ganze rationale in einem beliebig gestalteten Gebiet bewerkstelligen kann, in welchem die Funktion regulär ist. Fast gleichzeitig gelang ihm auf dem Gebiete der reellen Funktionen, unabhängig von WEIERSTRASS und anderen, die Entdeckung des Satzes, daß man sogar jede bloß stetige Funktion im Reellen durch eine ganze rationale Funktion beliebig genau annähern kann; beides Dinge, die heute zu den klassischen Ergebnissen der Analysis gehören und unentbehrliches Handwerkszeug jedes Mathematikers bilden.

RUNGES wissenschaftliches Lebenselement war nicht, in leidenschaftlichem Ringen, vielleicht unter Qualen und Schmerzen, immer wieder ein schwieriges Einzelproblem anzupacken. Die Art solcher Forscher, welche unter bewußter oder unbewußter Verengung ihres Tätigkeitsfeldes angespannt alle Kraft auf *einen* Punkt konzentrieren, lag ihm fern. Für ihn war das höchste Lebensglück, mit den Mitteln mathematischer Erkenntnis ein großes Stück der Natur zu ergründen und in die verschiedensten Gebiete hinein die quantitative mathematische Erfassung der Zusammenhänge zu tragen. Was er wissenschaftlich geleistet hat, sind nicht Kraftäußerungen und Auswirkungen eines wissenschaftlichen Tatwillens, sondern beinahe natürliche, ohne Mühen am Wege gepflückte Früchte, die sich seinem Auge darboten, weil er mit einer einzigartigen feinsinnigen und liebevollen Versenkung in die Dinge mehr *sah* als andere. Die Grundlage seines wissenschaftlichen Lebens war eine harmonische, vielseitige wissenschaftliche Kultur, wie sie wohl in unseren Zeiten fast einzigartig dasteht.

Schon bei seinen frühesten Arbeiten zeigt sich das. Die Entdeckungen, die ihn als jungen Mann zu einem in der Welt anerkannten Gelehrten machten und die Bewunderung der Außenstehenden erregten, waren für sein eigenes Bewußtsein Selbstverständlichkeiten, die man sich eben klarzumachen hatte, um die funktionentheoretischen Dinge wirklich zu verstehen. Er wunderte sich, daß selbst Forscher von höchstem Rang aus seinen „kleinen Bemerkungen" so viel Wesens machten und ihm rasche Publikation anrieten. Erst recht tritt dieser Grundzug des RUNGEschen Schaffens in seiner späteren Zeit hervor, als er aus dem rein theoretisch eingestellten Berliner Kreise durch den Ruf an die Technische Hochschule in Hannover in ein Betätigungsfeld geriet, welches ihn weit über den Rahmen seiner engen Fachwissenschaft hinaus lockte.

Mit der Übersiedlung nach Hannover tritt die theoretische Mathematik in RUNGES Forschungsarbeit zurück. Die Wirksamkeit für die Entwicklung der angewandten Mathematik beginnt. Um die Bedeutung dieser Betätigung zu erfassen, muß man sich über den damaligen allgemeinen Zustand der Mathematik Rechenschaft ablegen.

Nach einer 200 Jahre langen Periode stürmischer Produktivität und Ausbreitung war die mathematische Analysis im 19. Jahrhundert vor die Notwendigkeit gestellt, in kritischer Selbstbesinnung ihre Grundlagen zu festigen. RUNGE selbst ist als junger Mann in Berlin in dem Kreise derjenigen Forscher wissenschaftlich aufgewachsen, welche dieses Werk der kritischen Grundlegung in gewissen Beziehungen zum Abschluß brachten. Die große Leistung, welche die Grundlegung der Analysis durch die WEIERSTRASSsche Schule darstellt, kann in ihrer allgemeinen Bedeutung nicht hoch genug eingeschätzt werden. Aber eine bedauerliche Nebenwirkung blieb nicht aus. Es war vielleicht für das Werk der Selbstbesinnung und kritischen Klärung notwendig, die Zusammenhänge mit anderen Wissenschaften zu lockern und eine Art von Spezialistentum und Wirklichkeitsferne zu pflegen, wie sie bis heute manchem Laien für den Mathematiker als typisch gilt. Die Probleme, welche im Mittelpunkte des kritischen Interesses standen, waren für die damalige Zeit teilweise so schwierig, daß man sich häufig damit begnügen mußte, bloße *Existenzbeweise* zu führen; d. h. zu zeigen, daß es eine Lösung geben müßte, oder daß das Nichtvorhandensein einer Lösung einen Widersinn bedeutet. Die Frage, wie man diese Lösung, wenigstens im Prinzip, oder gar tatsächlich praktisch finden und beherrschen kann, spielt demgegenüber eine geringere Rolle.

HENRI POINCARÉ hat einmal den tiefen Ausspruch getan, daß ein wissenschaftliches Problem niemals vollständig gelöst sei, daß man es nur mehr oder weniger lösen kann. In der damaligen Zeit mußte man sich eben mit dem Minimum dessen begnügen, was zu einer Lösung gehört, nämlich dem Beweis für die Existenz einer Lösung. Die Kräfte der Mathematik reichten bei schwierigeren Fragen zunächst nicht dafür aus, auch noch weitere Stufen der Lösung bis zur praktischen Durchführung zu erklimmen.

RUNGE war einer der ersten, der die Unerträglichkeit dieses Zustandes empfand. Sein Wunsch, überall in der Naturbetrachtung mit seiner Mathematik wirklich etwas anzufangen, stieß bei Schritt und Tritt auf die eben geschilderten Hemmungen. Nirgends führte eine Brücke von der allgemeinen theoretischen Einsicht zu den Erfordernissen des individuellen Problemes. Schon bei ganz einfachen Fragen gab es keine ausgearbeiteten mathematischen Methoden zur numerischen oder graphischen Durchführung mathematischer Betrachtungen. Der mathematischen *Legislative* stand keine mathematische *Exekutive* zur Seite. RUNGE sah mit offenem Blick diese große Schwierigkeit, welche der Mathematik tödlich zu werden drohte. Seine Beschäftigung mit Physik, Technik, Astronomie, Navigation zeigte ihm die Fülle der Aufgaben und die manchmal hilflose Naivität der Praktiker, die, verlassen von den Vertretern der mathematischen Fächer, auf ihren eigenen Wegen mit dem Probleme fertig zu werden suchten, so gut es ging. So hat RUNGE seit dem Beginn der Hannoverschen Zeit und erst recht später in Göttingen seine Arbeitskraft der Aufgabe gewidmet, diese Lücke aufzufüllen und auf dem Boden der mathematischen Theorie brauchbare Mittel für die mathematische Praxis zu schaffen, immer in lebendigster Fühlung mit mannigfachen Anwendungsgebieten. Es ist hier nicht der Ort, im einzelnen zu schildern, was RUNGES Arbeiten über numerische und graphische Methoden, über Lösungen von Differentialgleichungen, was seine Bücher über numerisches Rechnen und anderes für eine Summe von Einzelleistungen darstellen, und was RUNGES Wirksamkeit als Lehrer bedeutet. Allerdings, eine *Schule* hat er sich nicht gründen können — es lag zu viel von persönlichem künstlerischem, nicht schulmäßig lernbarem Gestalten im Wesen seines wissenschaftlichen Wirkens — aber er hat doch einen großen Teil der jüngeren mathematischen Generation zu seinen *Schülern* gehabt und so ganz entscheidend dazu beigetragen, daß jener Zustand der Wirklichkeitsferne in der Mathematik überwunden werden konnte.

Als FELIX KLEIN — welcher die entstandene unnatürliche und gefährliche Kluft zwischen der theoretischen Mathematik und den Anwendungen aufs lebhafteste fühlte und mit dem entschlossenen Willen des wissenschaftlichen Führers den Kampf dagegen aufnahm — RUNGES Berufung als Professor für angewandte Mathematik nach Göttingen durchsetzte, tat er den entscheidenden Schritt, um der Tendenz zu den Anwendungen wieder die gebührende Stellung in unserer Wissenschaft zurückzugewinnen. Daß gerade KLEIN, dessen Bestreben immer auf die Erhaltung der Wissenschaft als einer *Einheit* gerichtet war, damals die *Abtrennung* einer Professur für angewandte Mathematik von der mathematischen Wissenschaft gefördert und gewollt hat, während doch sonst in Deutschland gerade eine Teilung der Mathematik in verschiedene Teilgebiete nicht üblich ist, beleuchtet deutlicher als alles andere die damaligen Verhältnisse. Wie mir scheint, ist nur aus jenen Verhältnissen heraus und aus der Einzigartigkeit von RUNGES wissenschaftlicher Persönlichkeit jener Versuch der Trennung so gut geglückt. Es wäre verhängnisvoll, wenn man aus diesem für andere Zeiten und Menschen notwendigen Versuche eine Norm für Gegenwart oder Zukunft herleiten wollte. Mittlerweile ist, gerade auch unter dem Einfluß des RUNGEschen Wirkens, die allgemeine mathematische Entwicklung so weit über das Stadium der wirklichkeitsfremden Theorie hinausgewachsen, sind die RUNGEschen Ideen und Methoden so sehr zum Allgemeingut der jüngeren mathematischen Generation geworden, daß eine solche Abtrennung der Anwendungen zum Glück für die Wissenschaft nicht mehr nötig ist. Daß RUNGE kaum Schüler von gleichem wissenschaftlichem Rang hatte, deren Wunsch es war, spezifisch *angewandter* Mathematiker in *seinem Sinne* zu sein, ist kein bloßer Zufall. RUNGE hat seine Aufgabe als Mathematiker erfüllt. Er hat die abgerissenen Fäden zu den Anwendungen wieder knüpfen, die Einheit der mathematischen Wissenschaft *einschließlich* der Anwendungen wiederherstellen helfen. An der jungen Generation liegt es, darüber zu wachen, daß das Gewonnene nicht wieder verlorengeht, sondern sich lebendig im Rahmen der Wissenschaft auswirkt.

Carl Runge als Spektroskopiker.

Von F. PASCHEN, Berlin-Charlottenburg.

CARL RUNGE gehört in die erste Reihe derer, welche die Grundlagen der modernen Spektroskopie geschaffen haben. C. RUNGE zusammen mit H. KAYSER haben neben J. RYDBERG die Seriengesetze der Linienspektren entdeckt. In der Darlegung ihrer Forschungen haben sie die Methoden angegeben, nach denen sowohl die experimentelle Erforschung eines Spektrums wie die serienanalytische Diskussion der Resultate geschehen können. Die Wellenlängenmessungen von KAYSER und RUNGE ergaben die ersten zuverlässigen Daten über die Bogenspektra der Elemente, welche an Genauigkeit und Vollständigkeit noch heute unübertroffen dastehen. Die von ihnen und RYDBERG gefundenen Serien und sonstigen Gesetze bilden die festen Grundlagen der heutigen Forschung. Wer sich experimentell mit spektroskopischer Forschung beschäftigen will, kann sich dazu nicht besser vorbereiten, als durch ein Studium der Originalarbeiten von KAYSER und RUNGE.

Ich selber hatte das getan, als ich im Hannoverschen Laboratorium den Fortschritt dieser Arbeiten mit erlebte: Zunächst nur, um die Forschungen zu verstehen, welche dort im Gange waren. Als dann KAYSER nach Bonn berufen war und RUNGE mit seinem spektroskopischen Feuereifer in Hannover zurück blieb, gab es für einen jungen Physiker nichts Schöneres, als bei RUNGE in die spektroskopische Lehre zu gehen. Es war wirklich herrlich, wie man da an Hand einer Untersuchung in die schwierigen Wellenlängenmessungen und zugleich in die Serienanalyse eingeführt wurde. Jeder Tag brachte eine kleine Neuigkeit, die dann wieder zu weiteren Fragen anregte. Die Untersuchungen betrafen die Spektra von Geißlerröhren (Helium, Sauerstoff, Schwefel, Selen, Quecksilber). Man mußte sich die Röhren natürlich selber herstellen. Die Arbeit war so packend, daß immer genügend Röhren auf Vorrat gemacht wurden, damit die Arbeit nicht ins Stocken geriet.

Die bei diesen Arbeiten benutzten Beugungsgitter waren Eigentum RUNGES. Was sonst erforderlich, im Institut aber nicht vorhanden war, kauften wir aus eigener Tasche. Nur für die Arbeiten über den ZEEMAN-Effekt erbaten wir die Beihilfe der Berliner Akademie der Wissenschaften, nachdem RUNGE schon beträchtliche Summen ausgegeben hatte, um ein großes Eisengestell zur festen Aufstellung des großen Konkavgitters anfertigen zu lassen. Unsere Arbeiten waren eben unsere Privatangelegenheit. Wir betrieben sie wie einen Sport und waren mit ganzem Herzen dabei. Diese eigentlich selbstverständliche Einstellung bei der eigenen wissenschaftlichen Forschung macht die Arbeit zur größten Lebensfreude und garantiert den Erfolg.

Wenn mir das Glück beschieden war, durch RUNGE für die Spektroskopie begeistert zu werden, so darf ich wohl zurückblickend auch einiges sagen, was mir für RUNGE charakteristisch scheint.

Wie ein echter Naturforscher knüpft RUNGE stets an irgendeine ganz neue Sache an: Die Arbeiten von KAYSER und RUNGE waren durch BALMERS Entdeckung veranlaßt. Als RAMSAY das Heliumgas fand, erschien das Spektrum dieses neuen leichten Gases interessant. Das Spektrum von Sauerstoff wurde zum Studium gewählt, weil wir hier ebenso wie beim Helium zwei verschiedenartige Seriensysteme fanden. Die Arbeit wurde auf Schwefel und Selen ausgedehnt, weil zufällig bei diesen Stoffen das bis dahin nicht bekannte Spektrum gefunden wurde, welches dem Serienspektrum des Sauerstoffes analog war. Als ZEEMAN die magnetische Aufspaltung der Spektrallinien entdeckte, das heißt eine Veränderung in der Schwingungszahl, was damals als etwas ganz Unerwartetes anzusehen war, gab dies sofort den Anlaß zur Forschung. Als das Radium zugänglich wurde, unternahm RUNGE zusammen mit PRECHT die Untersuchung seines Spektrums.

Für die Arbeit selber galt als wichtigste Forderung: Größte Genauigkeit der Wellenlängenmessung, wie sie am besten mit großen Gittern zu erzielen war, und Beachtung auch der schwächsten

Linien. In dieser Hinsicht bedauerte RUNGE oft, keinen lichtstarken Apparat zur Verfügung zu haben, wie solche heute unentbehrlich erscheinen. Den Anlaß zu dieser Forderung gaben die Ungenauigkeiten der 1887 vorliegenden Zahlen, mit denen RUNGE Gesetzmäßigkeiten aufsuchte, noch bevor eigene Experimente einsetzten. Auch diese ersten Experimente KAYSERS und RUNGES waren ja ursprünglich durch die Ungenauigkeit und Unvollständigkeit der in der damaligen spektroskopischen Literatur vorliegenden Wellenlängen veranlaßt. Dieser Vorgang wiederholte sich seitdem bei jedem Spektroskopiker, der sich praktisch mit Gesetzmäßigkeiten beschäftigt hat. Sogar RYDBERG begann zu experimentieren. Man kann auch heute noch kaum Belangreiches fördern, wenn man nicht selber die Spektren erzeugt und durcharbeitet. Denn wenn inzwischen auch die Spektren durch EDER und VALENTA, EXNER und HASCHEK und viele andere vollständiger und genauer beschrieben sind, so fehlt für die Serienanalyse doch noch sehr viel und meistens das Wichtigste. Es fehlen meistens die schwächeren Linien der zusammengesetzten Liniengebilde, wie Dubletts und Triplets. Nicht genügend unterschieden sind in den Tabellen durch verschiedene Charakterisierung die Linien verschiedener Serien, Seriensysteme und des Bogenspektrums sowie der verschiedenen Funkenspektra. Für die Auffindung von neuen Serien gar erweist sich das bisherige Tabellenmaterial als gänzlich unzureichend. Auch die sorgsamste Registrierung der Spektrallinien kann der feinen Differenzierung der Linien nicht Rechnung tragen, an der man wohl die zu einer Serie gehörigen Glieder erkennen würde.

Alles dies war für RUNGE selbstverständlich. Für den Anfänger aber war es etwas durchaus Neues, daß die sorgsamen Beobachtungen namhafter Spektroskopiker für die Serienanalyse nichts als ein lückenhaftes Gerippe darstellen können. Es war um so unerwarteter, als ja RYDBERG aus dem damaligen Materiale ohne eigene Experimente in den meisten Fällen die wahren Gesetze abgeleitet hatte. Man muß aber dabei bedenken, daß RYDBERG erstens offenbar einen instinktmäßigen Blick für derartige Gesetzmäßigkeiten besaß, daß er zweitens auch in einigen Fällen irrte, und weiter, daß RYDBERGS Forschungen allein ohne Bestätigung und Befestigung durch die gleichzeitigen sorgfältigen Experimente und Analysen KAYSER und RUNGES wohl kaum den tatsächlich errungenen Fortschritt in der Erkenntnis hervorgebracht hätten: vor allem wegen der fehlenden Kontrollexperimente, wie solche zum Beispiel die schwächeren höheren Glieder von Serien zutage förderten.

Der wichtigste Anlaß für RUNGE, die Genauigkeit der Wellenlängenmessung zu steigern, war die Prüfung der Genauigkeit der Seriengesetze, der konstanten Schwingungsdifferenzen und vor allem der Serienformel. Wir wissen seit RITZ und BOHR, daß RYDBERGS Serienformel die physikalisch wahrere Form des Seriengesetzes ist. Damals konnte man das nicht wissen, und es erschien, wissenschaftlich richtig, die Genauigkeit der KAYSER-RUNGEschen Formel so scharf wie möglich zu prüfen. In vielen Fällen stellte diese Formel die Beobachtungen besser dar als die RYDBERGsche Formel, welche ja nur eine grobe Annäherung an die Wahrheit war. Daß diese Frage überhaupt nicht durch Steigerung der Meßgenauigkeit zu entscheiden war, sondern nach der Auffindung des Kombinationsprinzipes und des Leuchtmodelles als eine belanglose erkannt wurde, insofern belanglos, als es überhaupt kein allgemeines Seriengesetz geben kann, das konnte damals nicht vorausgesehen werden. Aber die opfervollen Bemühungen, durch Formeln die Serienlinien fassen zu wollen, haben das Gute gefördert, daß sie zu äußerst gründlichen Studien der Spektren und zu genauen Messungen führten, welche der heutigen Generation nützlich und vorbildlich sind. Wenn wir weiter RYDBERGS Genie bewundern müssen, weil er aus unzulänglichen Daten die physikalische Urform des Gesetzes der Serien fand, so kann uns das eine Lehre sein, daß in der Naturwissenschaft der Weg zur Wahrheit nicht allein durch die streng logische Schulmethode führt. Die langjährige Vertiefung in die von ihm erkannten Gesetze führte RYDBERG zu einer mehr qualitativen Zusammenfassung der wesentlichen Grundzüge derselben in seinen Formeln.

Wenn wir RUNGES erste spektroskopische Arbeiten als die fundamentalsten eingehender betrachtet haben, wollen wir seine weiteren nicht vergessen. Da ist die Arbeit, die er mit PRECHT zusammen über das Spektrum des Radium ausführte. Das Ergebnis, daß das Radium auch spektroskopisch ein Erdalkali ist, wurde weniger beachtet, weil RUNGE ein großes Gewicht auf die spektroskopische Bestimmung des Atomgewichtes legte. So interessant das damals war, und so sicher nach neuerer Forschung ein Zusammenhang zwischen den Atomkonstanten und der Aufspaltung der Dubletts und Triplets vorhanden ist, so konnte damals doch nur eine Extrapolation einer empirischen Beziehung in Frage kommen. Mit den heutigen Kenntnissen wäre die Annäherung eine bessere geworden.

Weiter folgt eine kleine, wenig beachtete, aber äußerst wichtige Notiz von RUNGE, die den Sinn hatte, daß die von BERGMANN in den Bogenspektren der Alkalien neu aufgefundenen Serien den Term 3d zur Grenze haben. Damit war die Verallgemeinerung der Gesetze der 3 früheren Serienarten auf die höheren Serienarten gegeben.

RUNGES Name ist untrennbar verknüpft mit dem Grundgesetz der magnetischen Aufspaltung der Spektrallinien. Er erkannte als erster, daß alle Aufspaltungen rationale Vielfache der Normalaufspaltung sind. Der dabei auftretende Generalnenner heißt seitdem der RUNGEsche Nenner. Man muß sich erinnern, wie ungenau damals das Zahlenmaterial war. Nicht einmal die Normalaufspaltung war auf einige Prozent sicher zu stellen, weil die genaue Messung der Magnetfelder noch fehlte. RUNGE zeigte, wie man trotzdem zu der Überzeugung seiner Regel kommen mußte. Dies war ein Meisterstück naturwissenschaftlicher Erkenntnis ganz ähnlicher Art wie die Entdeckung der Grundform des Seriengesetzes durch RYDBERG.

Die Umwälzung alles Bisherigen in der Spektroskopie, die BOHRS Entdeckungen hervorgebracht haben, hat doch die systematische Arbeitsmethode nicht ändern können, welche RUNGE als das Wesentlichste bei der spektroskopischen Forschung betrachtet und allen seinen eigenen Arbeiten zugrunde gelegt hat. Auch heute arbeitet der praktische Spektroskopiker genau so, wie wir es in den älteren Arbeiten beschrieben finden.

Nur eines hat RUNGE wie wir anderen alle lernen müssen. Es ist oben schon berührt und kann nicht oft genug betont werden. Was wir von der Natur sehen und durch verfeinerte Hilfsmittel praktisch erforscht haben, ist stets nur ein lückenhaftes Gebilde. Bei der Deutung müssen wir oft der Phantasie viel mehr Raum gewähren, als in der älteren Physik für erlaubt erachtet worden wäre. Wenn dies irgendwo gilt, so in der modernen Spektroskopie. So wird heute aus wenigen und ungenau gemessenen Linien das Termsystem eines Spektrums aufgestellt, ohne daß eine wirkliche Serie gefunden worden ist. Die Fehler, die man bei solchem Vorgehen machen kann, sind nicht mehr so schädlich. Unter den vielen Spektroskopikern sorgen schon einige für Richtigstellung. RUNGES Betätigung in der Spektroskopie zeigt Andeutungen ähnlicher Einstellung in der Forschung. Der RUNGEsche Nenner z. B. war eine Entdeckung solcher Art.

Nachdem RUNGE von der amtlichen Lehrverpflichtung entbunden war, arbeitete er wieder praktisch spektroskopisch. Er hatte sich z. B. erneut mit der Frage beschäftigt, wie man im Spektrum eines Konkavgitters punktförmige Abbildung erzielen kann und uns darüber vor einiger Zeit einen sehr interessanten Vortrag gehalten. Für viele Zwecke der Spektroskopie ist ja die astigmatische Abbildung ein wesentlicher Nachteil des Konkavgitters. Schon vor 30 Jahren hat RUNGE ähnliche Überlegungen und Experimente angestellt. Die von ihm jetzt gegebenen Anordnungen sind so einfach, daß sie leicht angewendet werden können. Vorher schon hatte RUNGE eine allgemeine Theorie des Konkavgitters gegeben, welche in KAYSERS Handbuch der Spektroskopie abgedruckt ist. Eine neuere Arbeit RUNGES behandelt die LYMANschen Geister eines Gitters.

Auch über Bandenspektren liegen neuere Arbeiten von RUNGE vor. Ihn reizte dabei gewiß die weitgehende Einsicht in den Bau des Moleküls, die man auf Grund der neueren Theorien aus dem gesetzmäßigen Aufbau der Banden gewinnen kann. Von GROTRIAN und RUNGE rührt die These her, daß die sog. Cyanbanden dem Stickstoff zuzuschreiben seien. Diese Behauptung ist interessant, spektroskopisch sogar als sensationell zu bezeichnen und jedenfalls anregend. Um mehr als eine solche zu weiteren Forschungen anregende Behauptung handelte es sich hierbei wie damals beim Atomgewicht des Radium auch wohl nicht.

Als im Heliumspektrum zwei verschiedene Seriensysteme gefunden waren, stellte RUNGE die Folgerung auf, daß diese 2 verschiedenen Gasen zugehörten. Diese Folgerung war damals, als in einem Spektrum nie mehr als ein Seriensystem bekannt war, eine mögliche, und sie hat, wie wir heute wissen, in gewissem Sinne wirklich eine Berechtigung.

Aus diesen Beispielen sieht man RUNGES Art, die Konsequenzen immer soweit wirklich zu ziehen, wie es auf Grund vorliegender Kenntnisse möglich erscheint. Ich muß sagen, daß die freimütige Äußerung einer solchen aus Beobachtungen gezogenen Folgerung wissenschaftlich fruchtbarer erscheint, als wenn man Unstimmigkeiten, die man zunächst nicht klären kann, unbeachtet läßt. Ein Irrtum in solchen Fällen beruht meistens darauf, daß noch etwas unbekannt ist, was dann offenbar wird. Belehrt zu werden, ist die Bestimmung des Forschers.

CARL RUNGE hat die jetzt reifenden Früchte der älteren spektroskopischen Arbeiten, an denen er einen wesentlichen Anteil hat, mit enthusiastischer Freude aufgenommen und er war im Begriff, selber auch noch einige solcher Früchte zu pflücken. So wie wir werden kommende Spektroskopiker das Vorbild, welches CARL RUNGE der Wissenschaft gegeben hat, als ein Unvergängliches hochhalten und beachten.

Über die Aufstellung eines großen Rowlandschen Konkavgitters nach der Methode von Runge und Paschen.

Von H. GIESELER, Berlin-Charlottenburg, und W. GROTRIAN, Berlin-Potsdam.

Das Astrophysikalische Observatorium in Potsdam besitzt ein großes ROWLANDsches Konkavgitter, für das sich bisher aus Mangel an geeigneten Räumlichkeiten keine dauerhafte Aufstellung ermöglichen ließ. Diese Möglichkeit ergab sich aber, als dem Observatorium das in seiner unmittelbaren Nachbarschaft gelegene Zweiglaboratorium der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt zur Ausführung physikalischer Versuche leihweise überlassen wurde. Dieses Zweiglaboratorium besteht im wesentlichen aus einem großen rechteckigen Saal von 16 m Länge und 6 m Breite, der als thermokonstanter Raum ausgebildet ist und ein schweres Betonfundament besitzt, das die erschütterungsfreie Aufstellung von Apparaten an beliebigen Stellen des Saales ermöglicht. Damit sind die beiden Hauptforderungen, die man an den Aufstellungsraum für ein großes Konkavgitter stellen muß, in bester Weise erfüllt.

Als Art der Aufstellung wurde die von RUNGE und PASCHEN[1]) angegebene gewählt, und im speziellen wurde die Aufstellung der von PASCHEN geschaffenen Gitteraufstellung des Tübinger Physikalischen Institutes, die von BACK[2]) kürzlich ausführlich beschrieben worden ist, in allen wesentlichen Einzelheiten nachgebildet.

Fig. 1 gibt einen Lageplan der Aufstellung. Der große Saal des Laboratoriums ist durch eine in der Mitte der Längsseite errichtete Zwischenwand W in zwei nahezu gleiche Teile geteilt, deren einer zur Aufstellung des Gitters verwendet wurde. In der einen Ecke desselben ist aus Gipsplatten ein Kasten K von 1,80 m Länge und 1,50 m Breite errichtet, in dem auf dem Betonfundament ein Pfeiler P_1 mit aufzementierter Schieferplatte steht. Der Kasten K ist durch die Öffnung O_1 mit den Dimensionen einer Tür von dem davorliegenden Arbeitsraume A aus zugänglich und bietet hinreichenden Platz für die Aufstellung der Lichtquelle und der Linsen. Durch die vollständige Ab-

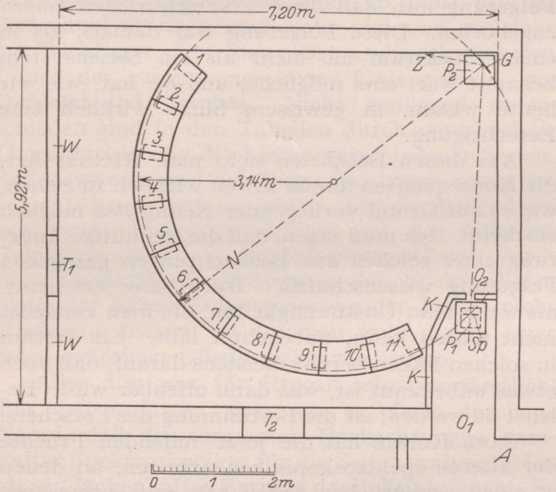

Fig. 1. Lageplan der Gitteraufstellung.

trennung des Raumes für die Lichtquelle vom eigentlichen Gitterraum wird verhindert, daß etwaige von der Lichtquelle kommende Dämpfe in den Gitterraum eindringen können, auch ist die Temperaturkonstanz des letzteren dadurch besser gewährleistet. Auf dem Pfeiler P_1 steht der Spalt Sp. Derselbe hat 8,5 cm lange Backen aus V 2 A-Stahl, ist in der Richtung des einfallenden Lichtes mikrometrisch verschiebbar und um die Richtung des einfallenden Strahles als Achse mikrometrisch drehbar[3]). Durch eine kreisrunde Öffnung O_2 von ca. 10 cm Durchmesser tritt das Licht in den Gitterraum ein und fällt auf das Gitter G, das in der gegenüberliegenden Ecke des Raumes auf dem Pfeiler P_2 aufgestellt ist. Der Gitterhalter ist ein einfacher Dreifuß, der eine mikrometrische Drehung des Gitters um eine vertikale Achse gestattet.

Die Kamera ist der des Tübinger Institutes fast völlig gleich. Auf 11 rechteckigen Betonpfeilern 1—11, die auf dem Betonfundament in einem Kreise von ca. 3 m Radius stehen, sind 10 Schieferplatten von 46 cm Breite und 3 cm Dicke aufzementiert und bilden einen langen genau in eine Horizontalebene einnivellierten Tisch von Kreisringform. An dem äußeren Rand der Schieferplatten sind 19 besonders konstruierte Schraubzwingen angeklammert, die zwei kreisförmig gebogene, in einem Abstand von 4 cm übereinander stehende Stahlschienen tragen, an die die photographischen Platten durch kleine Klammern angedrückt werden. Eine Fokussierng wird dadurch ermöglicht, daß die Schraubzwingen mehr oder weniger weit auf die Schieferplatten hinaufgeschoben werden können. Die ganze Länge der kreisförmigen Kamera beträgt 9,5 m und kann bei voller Besetzung ca. 70 Platten vom Format 6×13 cm aufnehmen. Die Kamera kann oben und hinten mit einem schwarzen Tuch zugedeckt werden. Die Wände des Gitterraumes sind mattschwarz gestrichen. Der Zugang zum Gitterraum kann durch die beiden Türen T_1 und T_2 erfolgen, die innen durch lichtdichte Doppelvorhänge nochmals gegen den Gitterraum abgeschlossen sind, so daß man diesen auch bei Wahrung völliger Dunkelheit betreten oder verlassen kann.

Das Gitter ist ein Original-ROWLANDsches Gitter aus dem Jahre 1899. Es hat einen Krümmungsradius von R = 6,28 m und bei 590 Linien pro Millimeter eine geteilte Fläche von $14{,}5 \times 5$ cm, so daß die Gesamtzahl der Linien etwa 85 000 ist. Eine rohe Prüfung der Intensitätsverhältnisse des Gitters ergab, daß dasselbe auf der einen Seite eine besonders intensive II. Ordnung besitzt. Die Aufstellung ist nun natürlich so gewählt, daß diese Seite ausgenutzt wird. Der Spalt steht so, daß das direkt reflektierte Licht in der Richtung Z unter flachem Winkel auf die geschwärzte Wand fällt. Die Kamera beginnt bei etwa 2000 Å.E., die Normale in Richtung N liegt bei 12 740 Å.E., das andere Ende der Kamera bei etwa 23 200 Å.E. Die Dispersion beträgt in der Normalen etwa 2,6 Å.E./mm für die I. Ordnung und nimmt nach beiden Enden der Kamera bis auf etwa 2,1 Å.E. zu.

Wir machen nun einige Angaben über die besonderen Eigenschaften des Gitters.

LICHTSTÄRKE. Die relativen Intensitäten in den verschiedenen Ordnungen sind so, daß die I. und II. Ordnung etwa gleich lichtstark sind (die II. Ordnung ist etwas lichtstärker als die I.), während in der III. Ordnung die Lichtstärke etwa $1/8$ der II. Ordnung und in der IV. Ordnung etwa $1/12$ der III. Ordnung beträgt. Von der absoluten Licht-

[1]) C. RUNGE und F. PASCHEN, Anhang zu den Abh. d. Berlin. Akad. d. Wiss. 1902, S. 1.

[2]) E. BACK und A. LANDÉ, ZEEMANeffekt und Multiplettstruktur der Spektrallinien. Berlin: Julius Springer 1925. S. 150.

[3]) Der Spalt wurde nach Angaben von Herrn Prof. GERLACH von dem Herrn Mechanikermeister SPEIDEL in der Werkstatt des Tübinger Physikalischen Institutes hergestellt. Beiden Herren möchten wir an dieser Stelle unseren besten Dank sagen.

stärke des Spektrographen gibt die folgende Angabe eine Vorstellung: Um von der Quecksilberlinie $\lambda = 4358$ bei Verwendung einer wassergekühlten LUMMERschen Hg-Lampe mit 3,5 Amp. Betriebsstromstärke bei einer Spaltbreite von 0,02 mm ein gut geschwärztes Bild auf Agfa-Extrarapidplatte zu erhalten, ist eine Belichtungszeit von 30 Sekunden erforderlich. Dabei steht die Lampe etwa 1,20 m vom Spalt entfernt, und es wird durch ein Quarzflußpathachromat von 20,3 cm Brennweite und 3 cm Öffnung auf dem Spalt ein Bild der Lampe von etwa 1,5 cm Durchmesser entworfen. Dann ist der Öffnungswinkel des in den Spektrographen eingetretenen Lichtkegels gerade so, daß die Gitterfläche voll ausgefüllt ist. Für die verschiedenen Wellenlängen derselben Ordnungen scheint die Intensität nicht wesentlich zu variieren. Im Ultravioletten konnten wir ohne Schwierigkeit bis $\lambda = 2300$ gelangen. Um von der Hg-Linie 2536 bei Verwendung einer wassergekühlten Quarzlampe gut geschwärzte Bilder zu erhalten, war bei sonst gleichen Versuchsbedingungen wie oben eine Expositionszeit von 2 Minuten erforderlich. Auch im Roten nimmt die Intensität nicht auffällig ab; das Ultrarote haben wir bisher nicht untersucht.

GEISTER. Die Geister des Gitters sind bemerkenswert schwach. In der I. und II. Ordnung sind bei kräftig geschwärzten Linien überhaupt keine Geister zu beobachten, und erst bei stark überexponierten Linien kommt zuerst der 1. und dann der 4. Geist heraus, während der 2. und 3. noch wesentlich schwächer sind. In der III. Ordnung kommt bei kräftig geschwärzten Linien der 1. Geist, in der IV. Ordnung der 1. und 4. Geist heraus. Lymangeister haben wir bisher nicht beobachten können, allerdings liegt hier vorläufig nur okulare und keine photographische Beobachtung vor.

FEHLER DER GITTERTEILUNG. Die Prüfung des Gitters auf fehlerhafte Stellen der geteilten Fläche ergab, daß an den beiden Enden der Teilung Streifen von etwa 0,5 cm Breite nicht zu brauchen sind, außerdem ergab sich im linken Drittel der Gitterfläche eine Stelle, die eine diffuse Verbreiterung sonst scharfer Linien bewirkte. Auch diese Stelle wurde ebenso wie die Ränder durch einen schwarzen Papierstreifen von 0,5 cm Breite abgedeckt. Es bleibt nun eine nutzbare Länge der geteilten Fläche von 13 cm mit ca. 77 000 Linien.

AUFLÖSUNGSVERMÖGEN. Zur Prüfung des mit dem Gitter erreichbaren Auflösungsvermögens wurde die Feinstruktur der Quecksilberlinien untersucht, wobei als Lichtquelle die schon erwähnte wassergekühlte LUMMER-Lampe diente. In der II. Ordnung zeigt sich dabei eine teilweise Auflösung der Linien in Einzelkomponenten, die in der III. Ordnung wesentlich vollständiger wird. Allerdings ist es natürlich nicht möglich, die sämtlichen Komponenten zu trennen, die insbesondere NAGAOKA, SUGIURA und MISHIMA[1]) bei Verwendung gekreuzter LUMMER-GEHRCKE-Platten erhalten haben, doch zeigen unsere Bilder, wie auch die Ausmessung ergab, eine gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen von NAGAOKA und seinen Mitarbeitern, wenn man berücksichtigt, daß zu nahe benachbarte Satelliten nicht getrennt werden können. Als Beispiel der von uns erhaltenen Aufspaltungen geben wir in Fig. 2 das Photogramm[1]) einer Aufnahme der Quecksilberlinie $\lambda = 3654{,}83$ in der III. Ordnung. Die beiden mit Pfeil versehenen Satelliten sind 0,032 A.E. entfernt und, wie die Kurve zeigt, noch gut voneinander getrennt. Ferner erkennt man an der linken Seite der Hauptlinie noch eine kleine Spitze, die einer Linie im Abstande $\Delta\lambda = 0{,}021$ Å.E. von der Hauptlinie entspricht, und schließlich erkennt man, daß der Satellit rechts neben der Hauptlinie an der Spitze eine Anomalität hat, die auf eine Verdoppelung hindeutet. Tatsächlich besteht diese Linie nach NAGAOKA aus 2 Komponenten mit dem Abstand $\Delta\lambda = 0{,}015$ Å.E. Würden wir also etwa $\Delta\lambda = 0{,}0175$ als Grenze des Auflösungsvermögens betrachten, so erhalten wir für dasselbe $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 209\,000$, während das theoretische Auflösungsvermögen $R = N.m = 77000 \cdot 3 = 231\,000$ ist. Man sieht aus dieser Berechnung, daß das theoretische Auflösungsvermögen nicht vollständig, aber doch nahezu erreicht wird.

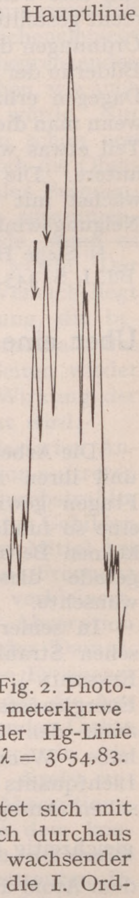

Fig. 2. Photometerkurve der Hg-Linie $\lambda = 3654{,}83$.

FOKALE EIGENSCHAFTEN. Wir möchten nun noch auf einige fokale Eigenschaften des Gitters hinweisen. Zur Festlegung des Fokus wurden wie üblich Aufnahmen mit schräg gestellten Platten gemacht, so daß dem oberen Teil der Linien extrafokale, dem unteren Teil intrafokale Bilder entsprechen. Die extra- und intrafokalen Bilder einer scharfen Linie sind nicht etwa diffus verschwommen, sondern eine scharfe Linie spaltet sich mit wachsendem Abstand in mehrere auch durchaus scharfe Linien auf, deren Abstand mit wachsender Entfernung vom Fokus wächst. Für die I. Ordnung läßt sich der richtige Fokus ohne Schwierigkeit aus der Stelle bestimmen, wo diese Linien zu einer einzigen zusammenlaufen. In der II. Ordnung und noch stärker in der III. und IV. Ordnung zeigt sich indessen, daß die Linien gerade an der Stelle, wo man aus dem Zusammenlaufen der Einzellinien den richtigen Fokus vermuten sollte, unscharf sind, so daß Feinstrukturen völlig verschwinden. Dagegen entstehen dicht oberhalb und

[1]) H. NAGAOKA, Y. SUGIURA und T. MISHIMA, Japan. journ. of phys. 2, 121. 1923.

[1]) Dank dem Entgegenkommen von Herrn Prof. E. FREUNDLICH konnten wir diese Kurve mit dem registrierenden Photometer des EINSTEINturmes aufnehmen.

unterhalb dieser Stelle scharfe Bilder, die aber, wenn man z. B. die Quecksilberlinien mit komplizierten Feinstrukturen aufnimmt, nicht völlig identisch sind. Diese häufig beobachtete Erscheinung des mehrfachen Fokus rührt nach ROWLAND und CORNU[1]) von Ungleichmäßigkeiten der Gitterteilung her, welche an verschiedenen Stellen des Gitters verschieden sind. Die genaue Vermessung der erhaltenen Bilder und der Vergleich mit den Beobachtungen anderer Autoren hat ergeben, daß das untere, also scheinbar intrafokale Bild das richtige ist.

Nach Festlegung des richtigen Fokus zeigte sich nun weiter, daß an dieser Stelle genau senkrecht gestellte Platten insbesondere in den höheren Ordnungen des Gitters keine gleichmäßig scharfen Bilder in der Längsausdehnung der Linien ergaben. Dagegen erhält man gleichmäßig scharfe Bilder, wenn man die Platten etwas neigt, so daß der obere Teil etwas weiter vom Gitter entfernt ist als der untere. Die Stärke der erforderlichen Neigung wächst mit zunehmender Wellenlänge, und der Neigungswinkel beträgt z. B. bei $\lambda = 4358$ in IV. Ordnung etwa 6°. Es heißt dies also, daß der Fokus für das obere Ende der Linie etwa 4 mm weiter vom Gitter entfernt ist als das untere Ende. Schließlich haben wir auch feststellen müssen, daß der Fokus für Linien verschiedener Ordnung, die nahezu an dieselbe Stelle des Gitterkreises fallen, nicht völlig übereinstimmt. Diese Abweichung ist jedoch so klein, daß sie keine ernsthafte Schwierigkeit etwa bei Anwendung der Koinzidenzmethode bedeutet.

Trotz der erwähnten Mängel kann man erwarten, daß das Gitter in der vorstehend beschriebenen Aufstellung für bestimmte spektroskopische Zwecke, insbesondere wohl für solche, bei denen sich die große Lichtstärke der II. Ordnung ausnutzen läßt, wertvolle Dienste leisten wird.

Die Kosten der Aufstellung wurden bestritten aus Geldmitteln, welche der Elektrophysikausschuß und die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft Herrn Präsident F. PASCHEN und Herrn Professor H. LUDENDORFF zur Verfügung gestellt haben. Die genannten Herren haben uns beauftragt, an dieser Stelle für die Bewilligung der Geldmittel ihren Dank auszusprechen, dem wir uns gerne anschließen.

[1]) Siehe H. KAYSER, Handbuch der Spektroskopie Bd. I, S. 445.

Über eine Rotverschiebung der Resonanzfluorescenz durch vielfach wiederholte Streuung.

Von J. FRANCK, Göttingen.

Die Arbeiten C. RUNGES, die der Spektroskopie und ihren Anwendungen auf astrophysikalische Fragen gewidmet sind, haben für dieses Gebiet eine so fundamentale Bedeutung, daß ich meinen kleinen Beitrag für das RUNGE gewidmete Heft gerade diesem Problemkreis zu entnehmen wünschte.

In seiner berühmten Ableitung des PLANCKschen Strahlungsgesetzes 1916 und 1917, zeigte EINSTEIN[1]), daß man außer dem quantenmäßigen Energieaustausch zwischen Strahlung und Materie auch den Impulsaustausch zu berücksichtigen habe. Wenn ein Atom durch Absorption eines Lichtquants des Energiebetrages $h\nu$ in einen BOHRschen Anregungszustand versetzt wird, so wird gleichzeitig der Impulsbetrag des Quants $\frac{h\nu}{c}$ von dem Atom aufgenommen. Bei der Reemission des Lichts erfährt das Atom einen Rückstoß $\frac{h\nu'}{c}$. Nur wenn die Energieemission in der alten Richtung erfolgt, in der das Lichtquant vor dem Absorptionsakte ankam, wird $\nu = \nu'$, und die Geschwindigkeit des Atoms wird auf den Wert, den es vor der Absorption hatte, zurückgeführt. Erfolgt die Emission in irgendeiner anderen Richtung, so behält das Atom Bewegungsgröße. Der Betrag, den es im günstigsten Falle nach der Reemission gewonnen hat, ist $m \cdot v = \frac{h(\nu + \nu')}{c}$, der praktisch gleich $\frac{2\,h\nu}{c}$ ist.

Er wird übermittelt, wenn unter Einwirkung der Absorption und der darauf folgenden Emission das Lichtquant um 180° abgelenkt wird. Ist ν eine Lichtfrequenz des sichtbaren oder ultravioletten Spektralgebietes, so ist dieser Impuls sehr klein, und daher ist selbst für die leichtesten Atome, die ihnen durch einen Stoß übermittelte Geschwindigkeit sehr klein gegenüber der Temperaturbewegung. Auch die Frequenz bzw. Wellenlängenänderung, die unter diesen Bedingungen bei der Richtungsänderung eines Lichtquantes auftreten muß, ist unmeßbar klein. Sie ergibt sich zu

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m \cdot c}(1 - \cos\Theta). \qquad (1)$$

Setzen wir für m, um ein numerisches Beispiel zu geben, die Maße eines Natriumatoms ein und für Θ den Wert von 180° (also das Optimum), so ergibt sich eine Wellenlängenänderung von $1{,}16 \cdot 10^{-6}$ Å. Sie ist nicht nachweisbar, da die Wellenlängen des optischen Spektrums sich auf höchstens 1 Tausendstel Å. genau messen lassen. Daher sind die quantenmäßigen Elementarakte der Impulsübertragung von Licht an Atome, die dem Lichtdruck der klassischen Theorie entsprechen, nicht experimentell nachzuweisen.

Den Lesern dieser Zeitschrift ist bekannt, daß

[1]) A. EINSTEIN, Ber. d. dtsch. phys. Ges. 18, 318. 1916; Phys. Zeitschr. 18, 121. 1917.

A. H. COMPTON einen wunderbaren Weg zur Überwindung[1]) dieser experimentellen Schwierigkeiten gefunden hat, indem er die Zerstreuung von Licht an freien Elektronen untersuchte bzw. Licht von so hoher Frequenz (Röntgenstrahlen) verwandte, daß die locker an Atome gebundenen Elektronen sich seiner Einwirkung gegenüber wie freie Elektronen verhalten. Setzt man in obige Gleichung (1) für m die Masse eines Elektrons ein, so wird der Betrag $\frac{h}{m \cdot c} = 0{,}0242$ Å, so daß $\Delta\lambda$ sich insbesondere für kurzwellige Röntgenstrahlen gut als Funktion von Θ messen läßt. Auch die Geschwindigkeit der Elektronen nach der Impulsübertragung ist besonders bei kurzwelliger Strahlung gut bestimmbar.

Wenn somit auch der Nachweis[2]) des quantenmäßigen Impulsaustausches zwischen Strahlung und Materie für freie Elektronen völlig eindeutig geführt ist, so hat es doch einen Sinn, sich die Frage vorzulegen, ob man keine Bedingungen nennen kann, unter denen durch vielfache Wiederholung von Absorptions- und Emissionsakten die Impulsübertragung von Licht an Atome zu einem meßbaren Betrage anwächst. In der Tat sind diese Bedingungen einfach anzugeben, aber mit den Hilfsmitteln irdischer Laboratorien wohl kaum zu erfüllen. Wir werden aber sehen, daß sie in den ausgedehnten, sehr verdünnten Atmosphären gewisser Sternklassen vorliegen.

Betrachten wir ein einfaches bekanntes Experiment. Man erzeuge sich in einem von allen andern Gasen sehr gut befreiten Raum eine sehr verdünnte Metallatmosphäre und sende durch sie ein Bündel paralleler Lichtstrahlen, die von einem glühenden festen Körper ausgesandt werden. Läßt man dann das Strahlenbündel nach dem Durchgang durch die Metallatmosphäre auf den Spalt eines Spektralapparates auffallen, so findet man, daß im kontinuierlichen Spektrum die Absorptionslinien des Metalldampfes sich bemerkbar machen. Ist der Metalldampf etwa verdünntes Natriumgas, so wird das Spektrum an der Stelle der D-Linien (der Resonanzlinien des Natriums) am meisten geschwächt. Eine nähere Untersuchung zeigt jedoch, daß, wenn der Druck des Metalldampfes niedrig genug ist, keine echte Absorption, d. h. keine Überführung von Lichtenergie in Wärmebewegung (Stoßdämpfung, Stöße zweiter Art) stattfindet. Vielmehr kann man zeigen, daß die ganze Lichtenergie[3]) der Frequenz der D-Linien, die dem Bündel paralleler Strahlen entzogen ist, quantitativ nach allen Seiten gestreut wird. Man nennt diese Erscheinung Resonanzfluorescenz. Die D-Linien würden bei diesem Versuch auch dann in Absorption erscheinen, wenn man z. B. an die Stelle des Glasgefäßes, an der das Bündel paralleler Strahlen aus dem Metalldampf wieder austritt, eine Fläche so mattieren würde, daß das Licht, das durch diese Fläche hindurchdringt, nach allen Seiten zerstreut wird.

Setzen wir aber eine punktförmige Lichtquelle ins Zentrum der Natriumatmosphäre selbst hinein und richten unser Spektroskop wieder auf die Lichtquelle selbst, so werden die D-Linien in Absorption nicht mehr erscheinen, sobald wir die Oberfläche der Glaskugel mattieren. Da wegen des niederen Druckes das Licht der D-Linienfluorescenz nicht in Wärmebewegung umgewandelt wird, so muß durch jedes Oberflächenelement der die Metalldampfatmosphäre begrenzenden Kugel gerade so viel Licht hindurchgehen, wie auch ohne das Natriumgas hindurchtreten würde. Nur tritt das Resonanzlicht der D-Linien schon von selbst in alle Richtungen gestreut durch die Oberfläche hindurch, während das Licht der Frequenzen, die nicht mit Absorptionslinien zusammenfallen, senkrecht hindurchtreten würde, wenn es nicht durch die Mattierung zerstreut würde. Der Unterschied gegenüber dem vorigen Versuch liegt in der Kugelsymmetrie der Anordnung, die bedingt, daß in jedes Volumelement innerhalb des Gases so viel Strahlung von allen Seiten wieder hineingestreut wird, wie durch die Wirkung der Natriumatome aus ihm herausgestreut wird.

Die Behauptung, daß mit der skizzierten Anordnung die D-Linien nicht in Absorption auftreten würden, ist aber nur richtig, wenn die durchstrahlte Wolke klein ist. Bei größer ausgedehnten Gebilden haben wir zu berücksichtigen, daß im Mittel bei jedem Streuakt das Resonanzlicht seine Frequenz um einen unmerkbar kleinen Betrag verkleinert. Erfolgen die Akte der Emission und Absorption genügend oft, bevor das Licht aus der Dampfatmosphäre austritt, so wird der kleine Frequenzbereich um die D-Linien herum, auf den die Natriumatome ansprechen, im heraustretenden Lichte fehlen. Die D-Linien werden dadurch in Absorption auftreten, dafür aber wird direkt anschließend an die langwellige Seite des Absorptionsgebietes nunmehr eine Emissionslinie dem kontinuierlichen Spektrum überlagert sein, die durch die Frequenzabnahme des vielfach gestreuten D-Lichtes entsteht.

Der Energiebetrag $h\nu - h\nu'$ (wobei mit ν' die Frequenz der verschobenen Linie bezeichnet ist), muß sich dabei als kinetische Energie der Natriumatome wiederfinden, so daß selbst, wenn, wie hier vorausgesetzt, keine Zusammenstöße angeregter Atome mit normalen Atomen stattfinden, durch die Streuungsprozesse (einseitiger Lichtdruck) ein Umsatz von Strahlungsenergie in Wärmebewegung aus dem Verlauf des Experiments zu entnehmen wäre.

Wie schon oben erwähnt, läßt sich das Experiment als Laboratoriumsversuch wohl kaum durch-

[1]) Ich verweise wegen der Arbeiten über den Comptoneffekt z. B. auf einen Artikel von MARK, dies. Zeitschr. 1925, S. 494, sowie auf ein ausführliches Referat von H. KALLMANN und MARK, Ergebn. d. exakt. Naturwiss. 5, 267—325. 1926.

[2]) C. T. R. WILSON, BOTHE, MEITNER.

[3]) Literatur siehe bei P. PRINGSHEIM, Fluorescenz und Phosphorescenz. Springer 1924.

führen. Man brauchte z. B., um genügend viel Streuprozesse zu haben, eine viel zu ausgedehnte Gaswolke. Anders aber steht es, wenn man die äußerst verdünnten Atmosphären gewisser Sterne und Nebel als Riesenlaboratorien für solche Versuche betrachtet. Auf den starken Einfluß des Strahlungsdruckes für das Verhalten dieser Atmosphären ist von den Astronomen schon oft hingewiesen worden[1]). Betrachten wir z. B. die sog. Riesensterne, so zeigt sich, daß in gewissen von ihnen alle oben aufgezählten Bedingungen für einen positiven Erfolg unseres Experiments erfüllt sind. Die Masse mancher dieser Sterne ist von der gleichen Größenordnung, wie die der Sonne. Ihr Durchmesser von der Größenordnung der Marsbahn [was in Einzelfällen mittels der MICHELSONschen Interferenzmethode so direkt wie möglich bestimmt ist[2])]. Aus diesen Daten kann man überschlagen, daß die mittlere Dichte eines solchen Sternes so niedrig ist, wie etwa die Dichte des Gasrestes in gewöhnlichen Röntgenröhren. In den höheren Schichten seiner Atmosphäre, die wir wegen ihres Leuchtens bei der Bestimmung des Durchmessers des Sternes mitmessen, wird die Größenordnung des Druckes 10^{-8} bis 10^{-10} mm Quecksilbersäule sicherlich nicht übersteigen. Somit sind alle Vorbedingungen für eine ungestörte Fluorescenz der Atmosphäre erfüllt, die vom Licht des heißen Kerns des Sterns angeregt wird[3]). Die Einwirkung der Zusammenstöße von Atomen fällt fort, und eine sehr große Häufigkeit der Streuprozesse wird durch die große Schichtdicke gewährleistet. In der Tat fällt das Experiment in diesem Riesenlaboratorium wie erwartet aus, denn das Auftreten von Emissionslinien am langwelligen Rand der Absorptionslinien ist hierbei eine altbekannte und häufige Beobachtung[4]).

[1]) SCHWARZSCHILD, EDDINGTON, MILNE.

[2]) Für mancherlei astronomische Angaben und Hinweise bin ich Herrn Kollegen KIENLE zu bestem Dank verpflichtet.

[3]) Auf die Bedeutung der Fluorescenz für das Leuchten solcher Schichten hat neuerdings ROSSELAND, Astrophys. Journ., hingewiesen.

[4]) Siehe z. B. die schönen Spektrogramme von R. CURTIS (Stern P. Cygni 1911), Public. Astr. Obs. Univ. Michigan, vol. III, S. 22. 1923.

Die Astronomen und Physiker haben sich mit diesem Phänomen wegen seiner Auffälligkeit schon öfters beschäftigt. In einigen Fällen hat man zwei Himmelskörper angenommen[1]), von denen der eine Absorptionslinien, der andere Emissionslinien hat, in anderen Fällen hat man an eine Einwirkung von anomaler Dispersion in der Umgebung der Spektrallinien gedacht[2]). Besonders diese letztere Erklärung ist durchaus berechtigt, aber sie muß das Vorkommen turbulenter Vorgänge in der Atmosphäre, das Auftreten isolierter Wolken absorbierender Materie innerhalb derselben und vor allen Dingen echte Absorption durch Zusammenstöße angeregter Atome voraussetzen. In vielen Fällen mag sie das Rechte treffen[3]), nicht aber in den oben angeführten Beispielen, in denen es sich um Fluorescenzanregung bei abnorm kleiner Dichte der Atmosphäre handelt.

Oft sind beim Leuchten der Sternatmosphären und der planetarischen Nebel äußerst kleinen Druckes nur Emissionslinien gefunden worden. Man könnte daran denken, daß in diesen Fällen die Absorptionslinien so schmal sind, daß sie durch Überstrahlung verschwinden, während die Emissionslinien durch die photographischen Effekte gerade verbreitert erscheinen. Ein solcher Vorgang ist bei Versuchen im Laboratorium so häufig zu beobachten, daß es sich vielleicht lohnen würde, unter Anwendung von Spektralapparaten größerer Dispersion nach den Absorptionslinien neben den Emissionslinien bei den Sternatmosphären zu suchen, bei denen man Grund hat die oben erwähnten Bedingungen als erfüllt anzusehen.

Zum Schluß möchte ich erwähnen, daß in den voranstehenden Zeilen das Problem nur qualitativ behandelt wird. Mit einer quantitativen Untersuchung der Fragen der Absorption und Emission äußerst verdünnter Atmosphären als Diffusionsprozeß von Energiequanten ist Herr FRENKEL in Petersburg zur Zeit beschäftigt.

Göttingen, November 1926, II. Phys. Institut.

[1]) SEELIGER, Astron. Nachr. **130**, 393. 1892; **157**, 255. 1902.

[2]) H. EBERT, Astron. Nachr. **164**, 64. 1904.

[3]) Z. B. anscheinend bei der Deutung der Spektren der Novae.

Quantenmechanik und Statistik.

Von M. BORN, Göttingen.

Die Entdeckung ganzzahliger Gesetze für die Linienspektren ist eine der Wurzeln, aus denen die Quantenmechanik erwachsen ist. CARL RUNGE war einer der ersten, der die Tragweite der von BALMER im Wasserstoffspektrum gefundenen Regelmäßigkeit erkannte und nach ähnlichen Serien bei anderen Elementen zu suchen begann. Der große Erfolg, der ihm dabei beschieden war, rückt ihn in die Reihe der Forscher, die die experimentellen Grundlagen der Quantentheorie geschaffen haben. Auch die neue Quantenmechanik ist ein Sproß dieser Entwicklung; ist doch eine ihrer Hauptstützen das Kombinationsprinzip der Spektrallinien. Danach scheint es gerechtfertigt, in diesem RUNGE-Heft einige Betrachtungen über Quantenmechanik anzustellen. Es soll keineswegs ein Bericht über den Stand der Quantenmechanik gegeben werden; ein solcher ist erst kürzlich in dieser Zeitschrift von dem Begründer der neuen Theorie veröffentlicht worden, ein Aufsatz, dessen einziger Mangel darin besteht, daß in der Aufzählung der beteiligten Forscher der Name HEISENberg nicht vorkommt. Vielmehr soll ein Versuch erläutert werden, den Sinn des neuen Formalismus zu verstehen.

Vorläufig liegt ja in der Hauptsache ein überraschend leistungsfähiger und wandlungsfähiger Formalismus vor, und zwar, was betont werden muß, *nur* einer; denn die verschiedenen Algorithmen, die Matrizentheorie, die nicht-kommutative Analysis Diracs, die partiellen Differentialgleichungen Schrödingers sind mathematisch äquivalent. Geleistet wird die Berechnung der stationären Zustände der Atome und der durch sie bestimmten Strahlungen (unter Vernachlässigung der Rückwirkung der Strahlung auf die Atome, der Dämpfung); es hat den Anschein, als ob hier nichts mehr zu wünschen übrig bleibt, da jedes neue Beispiel, das durchgerechnet wird, Übereinstimmung mit der Erfahrung liefert.

Aber die Frage nach den möglichen Zuständen der Materie erschöpft doch keineswegs den Bereich der physikalischen Probleme. Zum mindesten ebenso wichtig, vielleicht noch wichtiger ist die Frage nach dem *Ablauf* von Vorgängen, die bei Störungen des Gleichgewichtes eintreten. Die klassische Physik konzentrierte sich überhaupt auf diese letztere Frage, da sie dem Strukturproblem gegenüber ziemlich machtlos war. Umgekehrt ist die Quantenmechanik dem Ablaufproblem bisher fast ganz ausgewichen, weil es sich nicht ohne weiteres dem Formalismus einpassen ließ. Hier soll nun über einige Ansätze berichtet werden, die sich auf das Ablaufproblem in der Quantenmechanik beziehen.

In der klassischen Dynamik gilt unumschränkt der Satz, daß die Kenntnis des Zustandes (nämlich der Lagen und Geschwindigkeiten aller Materieteilchen) in einem Augenblick den Ablauf eines abgeschlossenen Systems für alle Zukunft determiniert; das ist die Fassung, die das Kausalgesetz in der Physik annimmt.

Mathematisch drückt sich das dadurch aus, daß die physikalischen Größen Differentialgleichungen von bestimmtem Typus genügen. Aber neben dieser kausalen Gesetzlichkeit hat stets die statistische Betrachtungsweise eine Rolle gespielt. Allerdings pflegte man das Auftreten von Wahrscheinlichkeiten damit zu rechtfertigen, daß der Anfangszustand niemals wirklich exakt bekannt sei; solange dies nicht erreicht sei, werde eben, gewissermaßen provisorisch, von der Statistik Gebrauch gemacht.

Die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung geht aus von der Annahme, man habe Grund gewisse Fälle als gleich wahrscheinlich anzusehen, und leitet daraus die Wahrscheinlichkeit verwickelter Kombinationen ab; oder allgemeiner: aus einer angenommenen Verteilung (z. B. der gleichmäßigen: „gleich wahrscheinliche Fälle") wird eine andere, von ihr abhängige Verteilung abgeleitet. Der Fall, daß sich die abgeleitete Verteilung als ganz oder teilweise unabhängig von der angenommenen Ausgangsverteilung erweist, ist natürlich besonders wichtig.

Dem entspricht nun auch das Vorgehen der Physik: Sie muß eine Annahme über eine Ausgangsverteilung, wenn möglich über gleich wahrscheinliche Fälle, machen und sie muß sich bemühen zu zeigen, daß es schließlich auf die Wahl der Ausgangsverteilung für die beobachtbaren Erscheinungen gar nicht ankommt. Beides sehen wir in der statistischen Mechanik vor uns: Es wird eine Einteilung des Phasenraumes in gleich wahrscheinliche Zellen vorgenommen, wobei nur einige allgemeine mechanische Sätze (Energieprinzip, Liouvillescher Satz) als Leitstern dienen; daneben aber gehen die Bemühungen, diese Statistik der „Raumgesamtheit" in eine Statistik, der „Zeitgesamtheit" zu verwandeln mit dem Zwecke, von der Willkür der Zelleneinteilung loszukommen. Aber die Ergodenhypothese, die hierzu dient und besagt, daß jedes System im Laufe der Zeit ganz von selbst alle Zellen gleich oft passiert, ist eben eine Hypothese und wird es wohl bleiben. Es scheint daher, daß die Berechtigung der Wahl gleichwahrscheinlicher Fälle durch die Zelleneinteilung des Phasenraumes nur a posteriori aus ihrem Erfolg bei der Deutung der Naturvorgänge abgeleitet werden kann.

So ähnlich ist es überall, wo in der Physik von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen Gebrauch gemacht wird. Betrachten wir als Beispiel die atomaren Stoßvorgänge, etwa den Stoß eines Elektrons gegen ein Atom. Ist die kinetische Energie kleiner als die erste Anregungsenergie des Atoms, so erfolgt der Stoß „elastisch", d. h. ohne Energieverlust. Dann kann man fragen, in welche Richtung das Elektron durch den Stoß geworfen wird. Die klassische Theorie betrachtet jeden solchen einzelnen Stoßvorgang als kausal determiniert; wenn man die genauen Lagen und Geschwindigkeiten aller Elektronen des Atoms und des stoßenden Elektrons in einem Augenblick kennen würde, könnte man die Ablenkung des letzteren genau vorausberechnen. Nun fehlt uns leider diese Kenntnis der Mikro-Konfiguration; daher muß man sich wieder mit Mittelwerten begnügen. Hierzu muß man, was gewöhnlich nicht betont wird, notwendigerweise eine Annahme über gleich wahrscheinliche Konfigurationen machen; dies geschieht in möglichst „natürlicher" Weise, indem man Bestimmungsstücke der relativen Lage der ursprünglichen Elektronenbahn gegen das Atomzentrum und gewisse Winkelvariable oder Bewegungsphasen einführt und gleiche Intervalle für diese als gleich wahrscheinlich ansetzt. Aber das ist eben eine Annahme, die nur durch den Erfolg gerechtfertigt werden kann.

Das Eigentümliche dieses Vergehens ist nun, daß die Einführung der Mikrokoordinaten nur geschieht, um die Determiniertheit des Einzelprozesses wenigstens im Prinzip zu retten. Denn praktisch muß man sie ja aufgeben: der Experimentator zählt nur die in eine bestimmte Richtung abgelenkten Teilchen, ohne sich um die Einzelheiten der Bahn zu kümmern; das wesentliche

Stück der Bahn, auf dem die Wechselwirkung mit dem Atom stattfindet, ist ja auch der Beobachtung verborgen. Aus solchen Zählungen aber kann man nun Rückschlüsse auf den Mechanismus des Zusammenstoßes machen. Ein berühmtes Beispiel hierfür sind die Beobachtungen Rutherfords über die Streuung der α-Strahlen, wo allerdings Phasen der Atombewegung als Mikrokoordinaten nicht in Betracht kommen, sondern nur der Abstand des Atomkerns von der ursprünglichen Bahn des α-Teilchens. Rutherford konnte durch die Statistik der Streuung die Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes für die Wechselwirkung zwischen dem α-Teilchen und dem getroffenen Atomkern nachweisen. Aus der dabei benutzten Formel für die Anzahl der Teilchen in einer bestimmten Ablenkungsrichtung ist dabei die Mikrokoordinate (der Bahnabstand) eliminiert.

Wir haben hier also den Fall vor uns, daß ein Kraftgesetz durch Zählung, durch Statistik ermittelt wird, nicht durch Beobachtung einer Beschleunigung nach dem Newtonschen Bewegungsgesetz.

Die Methode ist im Grunde nichts anderes, als wenn beim Würfelspiel der Verdacht aufkommt, ein Würfel sei ,,falsch", weil eine Zahl dauernd merklich häufiger als in $^1/_6$ der Fälle erscheint: Man schließt aus der Statistik auf ein Drehmoment.

Ein anderes Beispiel ist die ,,Barometerformel". Gewiß läßt sich diese rein mechanisch begründen, indem man die Luft als Kontinuum auffaßt und das Gleichgewicht zwischen hydrodynamischem Druck und Schwere ansetzt; aber tatsächlich ist doch der Druck nur statistisch definiert, als mittlere Impulsübertragung durch die Stöße der Moleküle, und es ist daher nicht nur ebenso berechtigt, sondern tiefer begründet, die Barometerformel als Zählung der Moleküle im Schwerefeld anzusehen, aus der das Gesetz dieses Feldes abgeleitet werden kann.

Diese Betrachtungen sollen zu dem Gedanken hinführen, daß man an Stelle der Newtonschen Kraftdefinition auch eine statistische setzen könnte, Wie in der klassischen Mechanik das Fehlen einer Kraft durch die Trägheitsbewegung einer Partikel gekennzeichnet wird, so hier durch die Gleichförmigkeit einer Verteilung einer Menge von Partikeln über gewisse Bestimmungsstücke (wobei die Wahl dieser Koordinaten in beiden Fällen zu ähnlichen Problemen führt). Wie dort die Größe einer Kraft durch die Beschleunigung einer Partikel gemessen wird, so hier durch die Ungleichförmigkeit einer Menge von Teilchen.

In der klassischen Theorie besteht selbstverständlich die Aufgabe, die beiden Kraftdefinitionen aufeinander zurückzuführen, und dahin zielt alles Bemühen zur rationellen Begründung der statistischen Mechanik; wir haben uns aber klarzumachen versucht, daß dies nicht restlos gelungen ist, weil schließlich die Wahl der ,,gleichwahrscheinlichen Fälle" nicht umgangen werden kann.

So vorbereitet richten wir nun unsern Blick auf die Quantenmechanik. Auffällig ist, daß hier schon rein historisch der Begriff von a-priori-Wahrscheinlichkeiten eine Rolle gespielt hat, die sich nicht auf gleich wahrscheinliche Fälle zurückführen ließen, wie z. B. die ,,Sprungwahrscheinlichkeiten" bei den Emissionsprozessen. Aber es könnte ja sein, daß dies nur an der Mangelhaftigkeit der Theorie liegt.

Wichtiger ist der Umstand, daß eine exakte Festlegung von Partikeln in Raum und Zeit offenbar im Rahmen des Formalismus der Quantenmechanik nicht möglich ist. Man könnte allerdings hiergegen einwenden, daß nach Schrödinger die Partikel gar keine scharf definierten Örter haben können, weil sie nichts sind als Wellengruppen oder Wellenpakete mit verschwimmenden Umrissen; aber diese Vorstellung der Wellenpakete möchte ich hier beiseite lassen, weil sie nicht durchgeführt und wohl auch gar nicht durchführbar ist. Denn die Schrödingerschen Wellen laufen ja gar nicht im gewöhnlichen Raume, sondern im ,,Konfigurationsraume", der soviele Dimensionen hat, als die Anzahl der Freiheitsgrade des betrachteten Systems beträgt (3 N-Dimensionen für N Partikel). Die quantentheoretische Beschreibung der Systeme enthält bestimmte Aussagen über die Energie, den Impuls, den Drehimpuls der Systeme; aber die Frage, ,,wo ist ein bestimmtes Partikel zu einer gegebenen Zeit?" die beantwortet sie nicht oder höchstens in Grenzfällen, wo die Quantenmechanik in die klassische Mechanik übergeht. Damit ist aber die neue Theorie in bester Übereinstimmung mit dem Vorgehen der Experimentatoren, denen ja auch die Mikrokoordinaten unzugänglich sind und die daher nur Fälle zählen, Statistik treiben. Dies legt den Gedanken nahe, daß die Quantenmechanik ebenfalls nur Antwort gibt auf richtig gestellte statistische Fragen, aber im allgemeinen die Frage nach dem Ablauf eines Einzelprozesses unbeantwortet läßt. Sie wäre dann also eine eigenartige Verschmelzung von Mechanik und Statistik.

Danach hätte man mit den Differentialgleichungen der Wellenmechanik etwa folgendes Bild zu verknüpfen: Der nach diesen Gleichungen sich ausbreitende Wellenvorgang stellt keineswegs direkt die Bewegung der Materie dar, sondern bestimmt nur die möglichen Bewegungen oder besser ,,Zustände" der Materie. Die Materie selbst kann nach wie vor unter dem Bilde beweglicher (punktförmiger) Teilchen (Elektronen, Protonen) vorgestellt werden; nur sind diese Korpuskeln in vielen Fällen gar nicht als Individuen zu identifizieren, z. B. dann, wenn sie zu einem Atomverband zusammentreten. Ein solcher Atomverband besitzt eine diskrete Folge von ,,Zuständen"; es gibt aber auch kontinuierlich zusammenhängende Zustandsreihen, die das eigentümliche Merkmal haben, daß bei einem Zustande dieser Klasse immer eine Wirkung längs einer Bahn vom Atom mit endlicher Geschwindigkeit forteilt, genau so, als ob ein

Teilchen abgeschleudert wäre. Diese Tatsache ist es, die die Vorstellung von Korpuskeln rechtfertigt, ja herausfordert, obwohl dies in manchen Fällen, wie gesagt, nicht wörtlich genommen werden darf. Zwischen den Korpuskeln bestehen elektromagnetische Kräfte (von deren endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit für den Augenblick abgesehen werden möge); sie werden, soweit wir wissen, durch die in der klassischen Elektrodynamik geltenden Gesetze als Funktionen der Koordinaten der Partikel beschrieben (z. B. COULOMBsche Anziehung). Aber diese Kräfte sind nicht, wie in der klassischen Theorie, den Beschleunigungen der Partikel proportional, haben überhaupt keinen direkten Zusammenhang mit der Bewegung der Teilchen. Vielmehr schiebt sich das Wellenfeld dazwischen: Die Kräfte bestimmen die Schwingungen einer gewissen Zustandsgröße ψ, die von den Lagen aller Partikel simultan abhängt (also einer Funktion im „Konfigurationsraum"), und zwar in der Weise, daß ψ einer Differentialgleichung zu genügen hat, deren Koeffizienten von den Kräften abhängen.

Die Kenntnis der Funktion ψ nun erlaubt, den Ablauf eines physikalischen Vorganges zu berechnen, soweit er überhaupt durch die quantenmechanischen Gesetze festgelegt ist: nämlich nicht im Sinne kausaler Determiniertheit, sondern im Sinne der Wahrscheinlichkeit. Jeder Vorgang besteht aus Elementarprozessen, die man als Übergänge oder Sprünge zu beschreiben pflegt; dabei scheint es so zu liegen, daß der Prozeß selbst sich jeder anschaulichen, raum-zeitlichen Darstellung entzieht und nur sein Endergebnis festgestellt werden kann. Dieses besteht eben darin, daß das System am Ende in einem anderen Quantenzustande angetroffen wird als zu Anfang. Die Bestimmung dieser Übergänge durch die Funktion ψ geschieht nun in folgender Weise: Jedem Zustande des Atoms entspricht ein ganz bestimmter Schwingungszustand, d. h. eine bestimmte charakteristische Lösung oder „Eigenfunktion" der Wellengleichung; z. B. dem Normalzustande die Funktion ψ_1, dem folgenden Zustande ψ_2 usw. Der Einfachheit halber nehmen wir an, das System sei im Normalzustande ψ_1. Tritt nun ein Elementarprozeß auf, so hat sich diese Lösung nach Ablauf der Ursachen des Prozesses in eine andere von der Form

$$\psi_1 = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + c_3 \psi_3 + \dots$$

verwandelt, die eine Überlagerung einer Anzahl von „Eigenfunktionen" mit ganz bestimmten Partialamplituden $c_1, c_2, \dots$ darstellt. Dann geben die Quadrate dieser Amplituden, also die Größen

$$c_1^2, c_2^2, c_3^2, \dots$$

die Wahrscheinlichkeiten dafür an, daß sich das System am Ende im 1., 2., 3., ... Zustande befindet; also ist z. B. c^2_1 die Wahrscheinlichkeit, daß das System trotz der äußeren Einwirkung im Normalzustande verharrt, c^2_2 die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es in den zweiten Zustand springt usw.[1]). Diese Wahrscheinlichkeiten sind also durch den Mechanismus determiniert. Was aber das betrachtete System tatsächlich im einzelnen Falle tut, ist nicht determiniert, wenigstens nicht im Rahmen der heute bekannten Gesetze. Dieses Faktum ist aber gar nichts neues; denn wie wir oben z. B. an den Stoßgesetzen erläutert haben, liefert faktisch auch die klassische Theorie nur Wahrscheinlichkeiten bei Atomprozessen. Nur führt die klassische Theorie erst Mikrokoordinaten ein, die den Prozeß determinieren, um sie dann wegen Unkenntnis ihrer Werte durch Mittelbildung wieder zu eliminieren; während die neue Theorie ohne diese Mikrokoordinaten auskommt und dabei zu entsprechenden Resultaten gelangt. Dabei ist es natürlich niemandem verwehrt, an die Existenz der Mikrokoordinaten zu glauben; doch werden diese erst dann physikalisch von Bedeutung sein, wenn man Methoden zu ihrer experimentellen Bestimmung ersonnen haben wird. Auf die daran sich knüpfenden philosophischen Fragen einzugehen, ist hier nicht der Ort; es soll nur der Standpunkt geschildert werden, auf den man durch Zusammenfassung der physikalischen Erfahrungen gedrängt wird. Man entzieht der Kraft ihre klassische Aufgabe, direkt Bewegungen zu bestimmen, und erteilt ihr die neue Aufgabe, Wahrscheinlichkeiten von Zuständen zu bestimmen. Während man aber früher versucht hat, diese beiden Dinge in Einklang zu bringen, die eine Kraftdefinition aus der anderen abzuleiten, so hat dies jetzt streng genommen keinen Sinn mehr; die Frage ist nur, warum die klassische Kraftdefinition in einem weiten Erfahrungsbereich überhaupt brauchbar gewesen ist. Die Antwort darauf lautet, wie immer in solchen Fällen: „weil die klassische Theorie ein Grenzfall der neuen Theorie ist". Und zwar handelt es sich in der Hauptsache um den sog. „adiabatischen" Grenzfall, d. h. den, wo die äußere Einwirkung (oder auch die Wechselwirkung zwischen Teilen des Systems) äußerst langsam erfolgt. Es ergibt sich, daß dann mit großer Annäherung

$$c_1^2 = 1, \quad c_2^2 = 0, \quad c_3^2 = 0, \dots$$

herauskommt, d. h. es besteht keine Wahrscheinlichkeit für einen Sprung, sondern das System befindet sich nach dem Aufhören des Prozesses wieder im Ausgangszustande. Eine solche langsame Einwirkung ist also „reversibel", wie in der klassischen Theorie. Man kann dies auch auf den

[1]) Es ist vielleicht nicht überflüssig, den Unterschied der hier vorgeschlagenen Auffassung gegenüber der bekannten statistischen Lichttheorie von BOHR, KRAMERS und SLATER hervorzuheben. Dort werden die Erhaltungssätze für Energie und Impuls fallen gelassen; sie sollen nur im Mittel gelten. Hier dagegen sind die Erhaltungssätze durch den quantenmechanischen Formalismus ganz von selbst gewahrt; die Statistik bezieht sich nur auf Größen, wie die Ablenkungsrichtungen beim Stoß, deren Analoga in der BOHRschen Theorie nicht „quantisierbar" sind (Winkelvariable).

Fall verallgemeinern, wo das System am Ende unter anderen Bedingungen steht, wie am Anfang; dann ist der Zustand „adiabatisch“ verändert, ohne daß ein Sprung stattgefunden hat. Das ist der Grenzfall, mit dem die klassische Mechanik allein zu tun hatte.

Die Frage, ob sich diese Anschauungen überall bewähren, ist natürlich noch offen. Die Stoßvorgänge konnten mit ihrer Hilfe quantenmechanisch formuliert werden und das Ergebnis ist qualitativ in voller Übereinstimmung mit dem Experiment. Damit ist eine präzise Deutung gerade jener Beobachtungen gewonnen, die als der unmittelbarste Beweis der quantenhaften Struktur der Energie angesehen werden: die unstetigen Energiestufen (Anregungsspannungen), die zuerst von Franck und Hertz gefunden wurden. Das plötzliche Einsetzen der angeregten Zustände bei wachsender Geschwindigkeit der stoßenden Elektronen ist eine direkte Folge der Theorie. Sie gibt überdies Formeln für die Verteilung der Elektronen über die verschiedenen Ablenkungswinkel; und diese Formeln weichen in charakteristischer Weise von den Ergebnissen ab, die man nach der klassischen Theorie erwarten würde. Dieser Umstand wurde schon vor der Entwicklung der allgemeinen Theorie von Elsasser bemerkt[1]). Er ging von der de Broglieschen Idee aus, daß die Bewegung der Partikeln von Wellen begleitet wird, deren Frequenz und Wellenlänge durch die Energie und den Impuls der Teilchen bestimmt ist. Elsasser berechnete die Wellenlänge für langsame Elektronen und fand sie von der Größenordnung 10^{-8} cm, was gerade in den Bereich atomarer Dimensionen fällt. Hieraus schloß er, daß der Stoß eines Elektrons gegen ein Atom zu einer Beugung der de Brogliewellen Anlaß geben sollte, ganz analog zu der bekannten Erscheinung der Zerstreuung von Licht an kleinen Teilchen. Die wechselnden Intensitäten der Wellen in verschiedenen Richtungen würden dann wechselnden Anzahlen der in diese Richtungen abgelenkten Elektronen entsprechen. Andeutungen eines solchen Effekts zeigen Experimente von Davisson und Kunsman[2]) über die Reflexion von Elektronen an Metalloberflächen. Eine vollständige Bestätigung dieser kühnen Hypothese wurde von Dymond[3]) erbracht durch Messungen der Elektronenverteilung nach dem Stoß gegen Heliumatome.

Leider erlaubt der augenblickliche Stand der Quantenmechanik nur eine qualitative Beschreibung dieser Erscheinung; für eine vollständige Ableitung wäre die vollständige Lösung des Problems der Heliumstruktur erforderlich. Daher ist es besonders wichtig, die Theorie auf die oben erwähnten Experimente von Rutherford und seinen Mitarbeitern über die Zerstreuung von α-Strahlen anzuwenden; denn in diesem Falle haben wir es mit einem einfachen und vollständig bekannten Mechanismus zu tun, der gegenseitigen Ablenkung zweier geladener Teilchen. Die klassische Formel, die Rutherford aus einer Betrachtung der hyperbolischen Bahnen der Teilchen ableitete, ist in weitem Umfange experimentell bestätigt worden; aber neuerdings haben Bieler[1]), Rutherford und Chadwick[2]) Abweichungen von diesem Gesetz bei den Zusammenstößen von α-Teilchen mit leichten Atomen gefunden, und Blackett, der diese Erscheinung jetzt eingehend studiert, hat den Gedanken ausgesprochen, ob nicht auch diese Abweichungen durch Beugung von de Brogliewellen erklärt werden könnten. Im Augenblick ist nur die Vorfrage beantwortet worden, ob die klassische Formel von Rutherford als Grenzfall aus der Quantenmechanik abgeleitet werden könne. G. Wentzel[3]) hat gezeigt, daß das tatsächlich der Fall ist. Der Verfasser dieser Mitteilung[4]) hat ferner die Berechnung des Stoßes eines geladenen Teilchens gegen ein Wasserstoffatom durchgeführt und Formeln erhalten, welche zugleich die Stöße von Teilchen beliebiger Energie (von langsamen Elektronen bis zu schnellen α-Teilchen) darstellen. Bisher ist nur die erste Näherung entwickelt worden, die die feineren Beugungseffekte noch nicht zur Darstellung bringt; man erhält einen Ausdruck, der so verschiedene Dinge wie die Rutherfordschen Streugesetze für α-Strahlen und den Querschnitt von Wasserstoffatomen für stoßende Elektronen in dem von Lenard studierten Geschwindigkeitsbereiche zusammenfaßt. Dieselbe Methode führt zu einer Berechnung der Anregungswahrscheinlichkeit von H-Atomen durch Elektronenstoß; doch sind diese Rechnungen noch nicht vollständig durchgeführt.

Aber auch, wenn die hier erläuterten Vorstellungen sich weiter bewähren, so besagt das nicht, daß sie irgendwie endgültig sind. Schon jetzt kann man sagen, daß sie noch viel zu sehr an die üblichen Begriffe von Raum und Zeit anknüpfen. Der Formalismus der Quantenmechanik ist jedenfalls viel biegsamer und läßt noch viel allgemeinere Deutungen zu. So kann man z. B. die Koordinaten und Impulse der Teilchen durch sog. „kanonische Transformationen“ durcheinander schütteln und dadurch für dieselben Vorgänge zu ganz andern Formelsystemen mit anderen Wellenfunktionen ψ kommen. Der Grundgedanke aber, daß es sich um „Wahrscheinlichkeitswellen“ handelt, wird wohl in verschiedener Gestalt bestehen bleiben.

[1]) W. Elsasser, Naturwissenschaften **13**, 711. 1925.
[2]) Davisson und Kunsman, Phys. Rev. **22**, 243. 1923.
[3]) E. G. Dymond, Nature **118**, 336. 1926.

[1]) E. S. Bieler, Proc. of the roy. soc. of London, Ser. B. **105**, 434. 1924.
[2]) E. Rutherford und J. Chadwick, Phil. Mag. **50**, 889. 1925.
[3]) G. Wentzel, Zeitschr. f. Physik. **40**, 590. 1926.
[4]) M. Born, Gött. Nachr. 1926, S. 146.

Die Gestalt der kugelförmigen Sternhaufen.

Von H. KIENLE, Göttingen.

Der Kreis ist die vollkommenste Figur, die Kugel ist ein Bild der Vollkommenheit schlechthin. Des KOPERNIKUS Planetenbahnen waren noch vollkommene Zirkel und KEPLER fand den Weg zur Ellipse erst über exzentrische Kreise und Epicycloiden. Die Himmelskugel war lange nicht nur Bild, sondern Ausdruck wirklicher Tatsachen.

Schritt für Schritt mußte diese spekulative Vollkommenheit den aus den Beobachtungen der Wirklichkeit gewonnenen Erkenntnissen weichen. Und doch beginnen wir überall da, wo Neues zum ersten Male in den Gesichtskreis rückt oder mathematischer Behandlung zugänglich gemacht wird, mit dem Kreis oder der Kugel. Die ersten Elektronenbahnen im Atom waren Kreise, dann Kepler-Ellipsen, bis ihnen jede reale Existenz überhaupt abgesprochen wurde. Die erste genäherte Darstellung der Bewegung eines Planeten ist die Kreisbahn; und die Theorie der Gestalt der Himmelskörper geht von der Kugelsymmetrie der Anordnung aus.

Bei der Erforschung des Sternsystems mit den instrumentellen Hilfsmitteln der neueren Astronomie wurden zwei Arten von Objekten entdeckt, von denen die eine ebensosehr zu einer Behandlung als kugelsymmetrische Systeme aufforderte, wie die andere sie von vornherein ausschloß: die „kugelförmigen" Sternhaufen und die „Spiral"nebel. Unser eigenes Milchstraßensystem nahm eine Zwischenstellung ein. Von der schematischen Sternverteilung in Abhängigkeit nur vom Radiusvektor ausgehend, konnte man sich der Tatsache nicht verschließen, daß die Milchstraße die Rolle einer Symmetrieebene zu spielen scheint. Über die Darstellung durch rotationsellipsoidische Anordnungen hinaus hat es nicht an Versuchen gefehlt, den Zusammenhang mit den Spiralnebeln herzustellen, das Milchstraßensystem als Spiralnebel großen Ausmaßes zu deuten.

Die Spirale ist eine zu häufig beobachtete Form himmlischer Objekte, als daß man sich nicht Rechenschaft darüber ablegen müßte, wie sie zustande kommt und welche Rolle sie in der Entwicklung stellarer Materie spielt. Sind die Spiralarme, wie beim Feuerrad, nur die geometrischen Orte der aus dem Zentralkörper ausgeschleuderten Teile? Oder sind sie wirkliche Strömungslinien der Materie? Die erste Deutung stößt auf Schwierigkeiten, da die beobachteten Formen der Arme sich nicht durch archimedische sondern durch logarithmische Spiralen am besten darstellen lassen. Die Stütze, welche die zweite Deutung durch die Messungen VAN MAANENS über innere Bewegungen in Spiralnebeln gefunden hatte, hat in der letzten Zeit wesentlich an Wert eingebüßt, da starke Zweifel an der Realität der gemessenen Bewegungen aufgetaucht sind[1]). Damit entfällt auch vorläufig die Notwendigkeit zur Konstruktion spezieller, vom NEWTONschen abweichender Anziehungsgesetze, die aufgestellt wurden, um die von VAN MAANEN abgeleiteten Bewegungen zu erklären. Die Lösung wird ohne Frage gefunden werden durch Entwicklung der Dynamik deformierter Systeme, wie sie kürzlich von LINDBLAD[1]) versucht wurde. Die Ansätze sind noch sehr unbestimmt, die Schwierigkeiten der Durchführung groß.

Aufgabe der folgenden Zeilen soll es sein, zu zeigen, daß von einer ganz anderen Seite her vielleicht ein ähnlich gestaltetes Problem sich ergibt. Die Untersuchung der „kugelförmigen" Sternhaufen ist auf einem Punkte angelangt, wo die Abweichungen von der Kugelgestalt erhöhte Bedeutung gewinnen. Diese an Zahl gegenüber den Spiralnebeln so beschränkten Objekte scheinen einen Namen zu tragen, der vielleicht ihr wahres Wesen mehr verhüllt als ausdrückt. SHAPLEY schon stieß bei seinen Untersuchungen auf die Tatsache, daß sich bei den meisten Kugelhaufen eine Symmetrieebene („galactic plane") nachweisen läßt[2]). FREUNDLICH und HEISKANEN fanden bei Messier 13 (Herkuleshaufen) verschiedene Mittelpunkte für verschiedene Gruppen von Sternen und glaubten bei den hellsten und massigsten Sternen deutliche Anzeichen einer Spiralstruktur zu erkennen. TEN BRUGGENCATE hat für drei weitere Haufen (M 3, 15, 37) spiralförmige Anordnung der massigsten Sterne nachgewiesen und in sinnfälliger Weise die Asymmetrie von M. 37 durch eine Drehung der Trägheitsachse konzentrischer Ringe dargestellt.

Man wird sich der Wichtigkeit der Aufgabe nicht verschließen können, die wahre Gestalt der Haufen zu bestimmen, die bisher als kugelförmig angesehen wurden. Nicht nur wird mit dieser Entdeckung deutlicher Strukturen den Untersuchungen der Boden entzogen, welche an die ideale Kugelgestalt anknüpften, um aus der in der Projektion beobachteten Dichteverteilung die räumliche Verteilung abzuleiten; es wird auch der Ausgangspunkt für die theoretischen Betrachtungen über die Natur des Gleichgewichtszustandes, in dem diese Sternhaufen sich befinden oder nicht, verschoben. Ein erster, noch nicht sehr weittragender Versuch, die Kugelsymmetrie aufzugeben und den nächst einfachen Fall des Rotationsellipsoids zu behandeln, wurde von TEN BRUGGENCATE unternommen.

Nach verschiedenen erfolglosen Bemühungen, von anderen Sternwarten Material für diese Untersuchungen zu erhalten, das wir mit den Hilfsmitteln der Göttinger Sternwarte leider nicht zu

[1]) LUNDMARK, Astrophysical Journal 63, 67-71, 1926.

[1]) Ark. f. Math., Astr. och Fysik Vol. 19 A, Nr. 35.

[2]) Einzelheiten siehe in: TEN BRUGGENCATE, Sternhaufen. Monographien und Lehrbücher Bd. VII. Berlin 1927.

beschaffen vermögen, konnte wenigstens ein kleiner Schritt vorwärts getan werden, als Herr SHAPLEY dankenswerterweise uns einen Teil der Abzählungen im Original überließ, aus denen er die Elliptizität von 12 Haufen abgeleitet hatte. Ein Teilresultat der Bearbeitung dieser Abzählungen ist es, das im folgenden mitgeteilt werden soll.

Man kann die Felder, in denen man die Sterne abzählen will, in verschiedener Weise wählen. Es ist vielfach, von der Vorstellung der radialen Symmetrie der Projektion ausgehend, üblich gewesen, in konzentrischen Kreisringen abzuzählen. Das setzt im allgemeinen bereits eine Kenntnis des wahren Mittelpunktes des Haufens voraus. Will man ganz frei von Annahmen über den Mittelpunkt sein, dann ist es zweckmäßig, ein quadratisches Netz zu wählen. SHAPLEYS Zählungen sind in dieser Form angelegt. Wir geben hier verkleinert ein solches Blatt wieder, um einen Begriff davon zu vermitteln. Eine erste nicht unwesentliche Feststellung ist die, daß *die Sternhaufen keine eindeutige scharfe Grenze haben, sondern unmerklich in die Umgebung übergehen.* Um dies zu zeigen, benutzen wir 3 Aufnahmen des Herkuleshaufens mit 6^m, 22^m und 300^m Belichtungszeit. Bestimmt man die mittlere Anzahl der „Hintergrund"- bzw. „Vordergrund"sterne aus den 4×100 Eckfeldern der Zählungen, so findet man

$t = 6^m$: $n = 0.15;\ 0.13;\ 0.07;\ 0.09;$
im Mittel 0.11 Sterne pro Feld,

$t = 22^m$: $n = 0.16;\ 0.22;\ 0.15;\ 0.17;$
im Mittel 0.17 Sterne pro Feld,

$t = 300^m$: $n = 0.85;\ 1.09;\ 0.91;\ 0.90;$
im Mittel 0.94 Sterne pro Feld.

Man hat also bei den beiden kurzen Aufnahmen erst auf je 9 bzw. 6 Felder einen nicht zum Haufen gehörigen Stern zu erwarten, während bei der 5stündigen Aufnahme in jedem Feld etwa ein falscher Stern gezählt wird. Oder anders ausgedrückt: Trägt man die längs irgend eines Durchmessers gefundenen Sternzahlen als Funktionen des Abstandes vom Zentrum auf, so wird man die Grenze des Haufens dorthin versetzen dürfen, wo die Kurve der Sternzahlen die Werte 0.11 bzw. 0.17 bzw. 0.94 erreicht. Wie sehen die Verhältnisse in der Wirklichkeit aus? Fig. 2 stellt, ohne jegliche Glättung, die längs des jeweils gleichen Durchmessers gefundenen Sternzahlen dar. Die Richtigkeit der oben aufgestellten Behauptung leuchtet ohne weiteres ein. Darüber hinaus macht man noch die Feststellung, daß *der scheinbare Durchmesser,*

Plate 13; M. 13; 6^m exp.; Count II. 1.

S

	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	3	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	
	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	2	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	2	1	0	1	2	1	0	2	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0	
	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	2	0	1	2	0	3	2	0	4	2	1	2	2	1	2	0	0	1	1	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	2	3	2	4	2	4	2	2	2	0	2	0	1	1	2	0	1	2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	6	6	2	4	1	2	3	6	3	2	1	1	2	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	2	0	2	0	1	0	5	4	4	0	8	7	3	1	2	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0	3	0	1	3	5	7	13	12	15	19	7	9	1	1	1	1	1	1	0	1	2	0	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	2	0	3	2	1	5	7	7	6	21	24	24	23	17	10	7	4	2	0	3	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	1	1	0	0	3	0	2	8	3	10	6	14	18	39	50	39	36	30	18	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	1	1	4	7	7	6	15	16	40	70	64	72	61	41	21	16	7	5	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	1	0	0	0	0	6	5	0	0	7	18	24	47	65	99	101	91	59	45	28	12	7	3	6	5	0	0	0	1	0	1	2	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	2	2	15	18	43	50	82	111	121	112	75	53	38	19	12	3	4	3	6	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	5	1	2	0	7	11	8	14	41	71	81	117	125	109	75	53	36	20	8	4	3	1	3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
P	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3	0	0	1	0	3	1	0	4	12	26	33	40	63	73	96	86	91	57	52	33	6	6	3	3	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	F
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	2	0	3	0	1	4	3	6	19	20	33	56	53	60	63	49	42	37	23	11	14	4	1	4	2	1	2	1	1	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	1	2	0	4	8	15	18	29	32	37	38	37	39	25	13	13	12	9	3	2	4	3	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	3	2	5	5	1	14	9	23	24	22	21	25	16	17	11	6	4	5	0	4	0	2	0	0	0	2	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	1	0	2	2	0	3	6	10	6	16	12	15	10	9	5	1	5	1	0	0	3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	0	0	1	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	3	3	2	2	2	10	8	3	15	10	3	8	3	2	3	1	1	0	0	1	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	1	1	2	2	2	3	0	2	4	3	3	3	7	6	0	2	1	2	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	2	2	1	1	3	6	2	3	3	0	2	2	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	4	3	1	2	0	1	4	2	2	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	2	2	1	0	1	0	0	2	3	3	1	1	0	0	0	1	0	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	2	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	2	0	2	0	1	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2	0	1	0	0	1	2	1	0	0	0	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	3	1	0	1	0	0	1	1	0	0	4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	
	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	

N

Fig. 1. Auszählung einer Aufnahme von Messier 13 mit dem Mt. Wilson-Spiegel. Seitenlänge eines Zählquadrates 31″.4.

soweit man ihn überhaupt bestimmen kann, *wächst, wenn man zu schwächeren Sternen übergeht.*

In die Figur sind strichpunktiert die Grenzen eingezeichnet, welche dem Werte SHAPLEYS für den Durchmesser (11.′0) entsprechen. Man sieht, daß der Durchmesser schon für die 22^m-Aufnahme mindestens 50%, für die 300^m-Aufnahme wahrscheinlich 80—100% größer ist; und zieht daraus den Schluß, daß die Bestimmung der Entfernung der Sternhaufen aus ihrem scheinbaren Durchmesser unsicher wird in dem Maße, als man es mit verschieden hellen Objekten bzw. verschieden lang exponierten Platten zu tun hat. Je schwächer die Objekte, um so kleiner werden, mutatis mutandis, die scheinbaren Durchmesser, desto größer die Entfernungen gefunden.

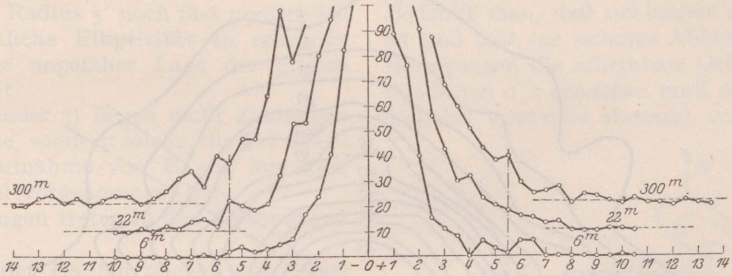

Fig. 2. *Sterndichte längs eines Durchmessers von M. 13 für drei verschieden lange Belichtungsdauern,* Abszissen: Abstände vom genäherten Mittelpunkt. Einheit 31″.4. Ordinaten: Anzahlen der Sterne pro Feld von 31″.4 Seitenlänge. Die punktierten Horizontalen geben die jeweilige Dichte der „Vordergrund“sterne an; der Nullpunkt der Ordinaten der 22^m-Aufnahme ist um 10, der der 300^m-Aufnahme um 20 nach oben versetzt.

Das vollkommen unmerkliche Übergehen der Haufen in die Umgebung paßt zu der bekannten Tatsache, daß die räumlichen Dichtegesetze, bei Annahme von Kugelsymmetrie, am meisten Ähnlichkeit haben mit denen einer Gaskugel von unendlichem Radius bei endlicher Gesamtmasse. Die Tatsache, daß bei Aufnahmen mit Spiegelteleskopen die Helligkeiten und damit auch die Anzahlen der Sterne eine starke Abhängigkeit von der Distanz vom Zentrum zeigen, wirkt natürlich sehr störend, ändert aber am Wesen der beschriebenen Erscheinungen nichts. Es überlagert sich der wahren Konzentration der Sterne nach dem Mittelpunkt des Haufens noch eine scheinbare nach dem Mittelpunkt der Platte, die aber aus den bekannten Eigenschaften des benutzten Spiegels bestimmt werden kann. Zur einwandfreien Ableitung von Durchmessern wird man, wenn es sich um Objekte von größerer Ausdehnung handelt, nur Aufnahmen mit Refraktoren benutzen, was ja auch SHAPLEY bei der Ableitung der Parallaxen — Durchmesser — Beziehung getan hat (FRANKLIN-ADAMS-Karten). Für unsere Zwecke spielen die Durchmesser keine Rolle; wir können daher auf eine eingehende Diskussion dieser Frage verzichten.

Eine mögliche Art, aus den Zählungen die *Kurven konstanter Flächendichte* abzuleiten, ist die, daß man für jeden Horizontal- und Vertikalstreifen die den Fig. 2 entsprechenden Kurven zeichnet. Dabei sind zwei Wege möglich, je nach den Voraussetzungen, mit denen man an die Aufgabe herantritt. Man kann durch die einzelnen Punkte der Fig. 2 eine glatte Kurve legen, indem man die Abweichungen als zufällig betrachtet (Schwankungen in der Anzahl der „falschen“ Sterne, Zählfehler). Entsprechend wird man dann auch die Kurven konstanter Dichte entweder durch

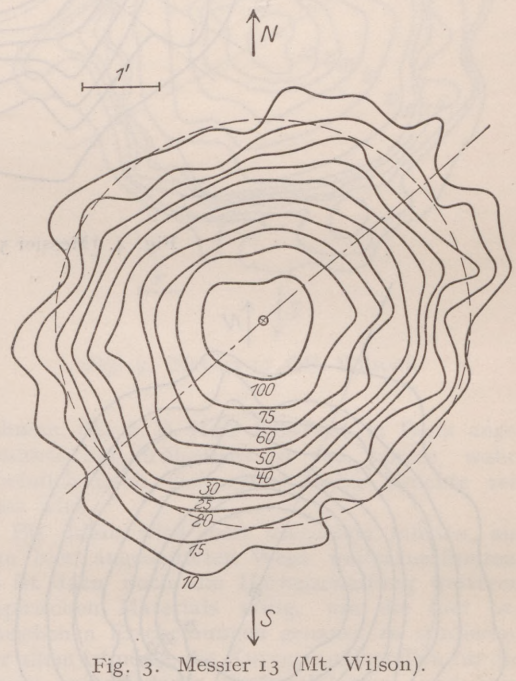

Fig. 3. Messier 13 (Mt. Wilson).

Kreise oder wenigstens durch Ellipsen darzustellen suchen.

Das war auch der Weg, den ich zuerst beschritt. Indessen fiel schon beim Zeichnen der Kurven[1]) Fig. 2 auf, daß gewisse Unregelmäßigkeiten nicht nur zu groß waren, um als zufällige Fehler gelten zu können, sondern daß diese Schwan-

[1]) Für die Ausführung der Zeichnungen bin ich Frl. MAUDRY sehr zu Dank verpflichtet.

kungen sich gewöhnlich auch in benachbarten Kurven wiederholten. Ebenso zeigten die auf solche Weise abgeleiteten Kurven konstanter Dichte deutliche systematische Abweichungen von der Kreis- oder Ellipsengestalt. Achsen und Mittelpunkte der durch Ellipsen dargestellten Kurven waren nicht identisch. Es wurde daher schließlich auf jegliche Glättung verzichtet, um der Natur der Unregelmäßigkeiten nachzuspüren.

Die Fig. 3—7 stellen die auf die genannte Weise

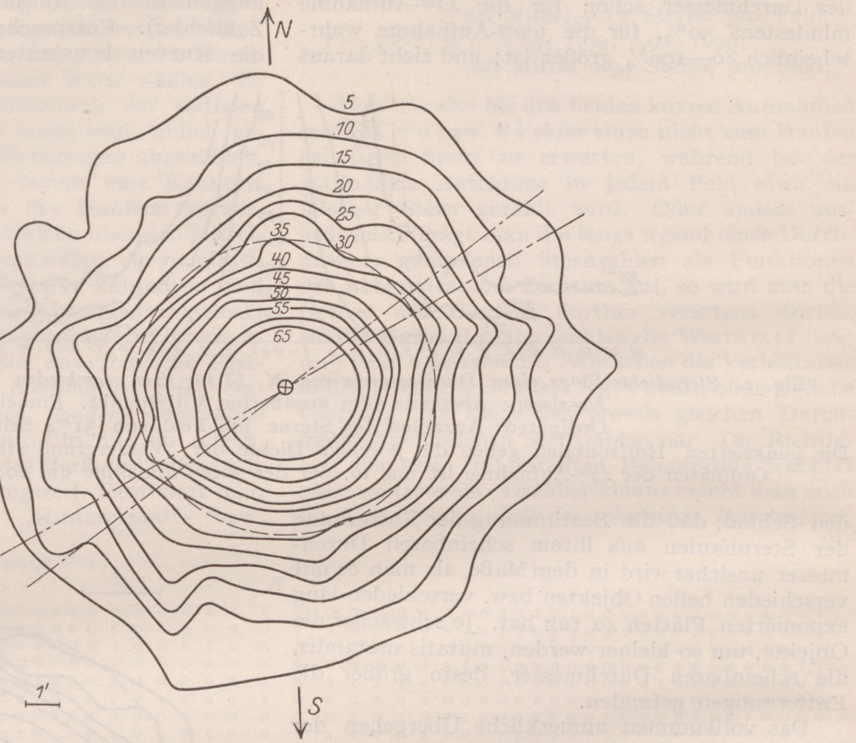

Fig. 4. Messier 5 (Hamburg-Bergedorf).

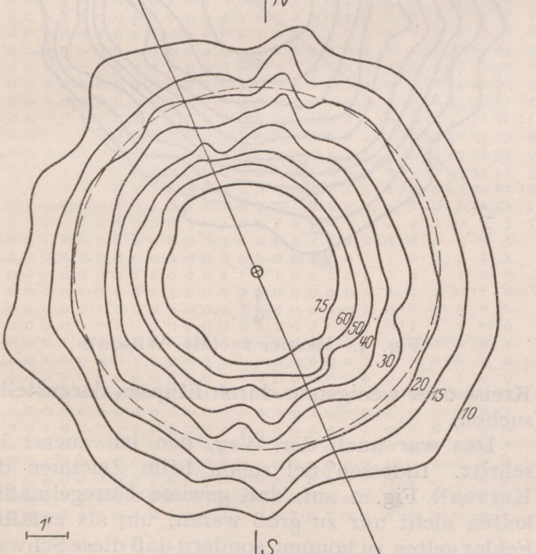

Fig. 5. Messier 15 (Mt. Wilson).

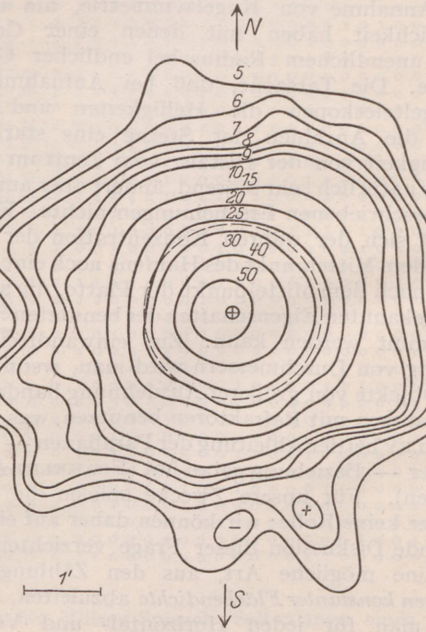

Fig. 6. Messier 56 (Mt. Wilson).

entstandenen Kurven konstanter Flächendichte für 5 typische Kugelhaufen dar. Dabei sind die Haufen in der ungefähren Reihenfolge abnehmender Konzentration gegen die Mitte zu angeführt. Zum Vergleich ist jeweils als gestrichelter Kreis die von SHAPLEY angenommene Größe des Haufens eingezeichnet. Außerdem sei bemerkt, daß der oben erwähnte Effekt einer vorgetäuschten konzentrischen Abnahme der Sternanzahl innerhalb eines Kreises vom Radius 5′ noch fast unmerklich ist. Wo eine deutliche Elliptizität zu erkennen ist, wurde noch die ungefähre Lage der großen Achse eingezeichnet.

Der Fig. 4 (Messier 5) liegen nicht Zählungen SHAPLEYS zugrunde, sondern solche, die Frl. MAUDRY nach einer Aufnahme von BAADE mit dem Hamburger Spiegel vorgenommen hat.

Drei Erscheinungen treten in den Zeichnungen klar zutage:

1. Die Sterne der Haufen reichen durchwegs weiter, als den von SHAPLEY angenommenen Durchmessern entspricht.

2. Abnehmender scheinbarer Konzentration gegen die Mitte zu entspricht abnehmende Elliptizität.

3. Mit abnehmender Elliptizität und Konzentration machen sich gewisse Unregelmäßigkeiten in den Kurven immer deutlicher bemerkbar, bei deren Betrachtung man sich versucht fühlt, an Analogien mit den Spiralnebeln zu denken.

Es sollen nun keineswegs die Sternhaufen mit den Spiralnebeln auf eine Stufe gestellt werden; obwohl man daran denken könnte, in ihnen letzte Reste ehemals größerer Sternsysteme zu sehen. Für Spekulationen solchen Ausmaßes ist es noch zu früh. Aber das zunächst vorliegende Problem hat für beide Gruppen von Himmelsobjekten den gleichen Charakter: ein kugelförmiger Sternhaufen muß sich auflösen unter dem Einfluß eines äußeren Feldes; er wird „zerpflückt“. Welche Formen nimmt er im Laufe der Zeit an? Und welche Bahnen beschreiben die den Verband des Haufens verlassenden Sterne? Ist es Zufall, daß bei Messier 13, 15 und 5 die Ansätze der „Arme“, wenn man diesen Ausdruck erlauben will, in der Nähe der großen Achse liegen? Und daß der Auflösungsprozeß am deutlichsten zu erkennen ist bei M. 56 und M. 12, deren Äquatorebenen offenbar nahezu senkrecht auf der Gesichtslinie stehen?

Man wird nicht sehr weit fehlgehen, wenn man die Kugelhaufen in erster Näherung als Rotationsellipsoide ansieht, die sich in einem säkular instabilen Zustande befinden. Die Stellen, an welchen das Abwandern der Sterne in das umgebende Feld stattfindet, werden entweder durch Gezeitenwirkungen bestimmt und führen denn auf zweiseitige Asymmetrien; oder aber es sind andere „Zufälligkeiten“ wirksam, welche irgendwie geartete Asymmetrien der Auflösung hervorrufen. In jedem Fall wird man darauf geführt, die beobachteten Fortsätze als Anzeichen auswärtsgerichteter Strömungen aufzufassen. Bei der Größe der Entfernungen der Kugelhaufen ist leider nicht daran zu denken, daß wir in absehbarer Zeit solche Strömungen wirklich als Bewegungen feststellen können. Setzt man z. B. die Parallaxe zu 0″.0001 an, dann entspricht einer Geschwindigkeit von 100 km/sec senkrecht zur Gesichtslinie eine jährliche scheinbare Eigenbewegung von nur 0″.002. Bedenkt man, daß 100 km/sec sehr hoch gegriffen ist und daß zur sicheren Ableitung von relativen Bewegungen die scheinbare Ortsveränderung zum mindesten 0″.1 erreichen muß, dann sieht man ein, daß das wertvolle Material von Sternhaufenaufnahmen, das z. B. Herr KÜSTNER in Bonn angesammelt hat, frühestens in 100 Jahren, wahrscheinlich noch viel später, seine Früchte zeitigen wird.

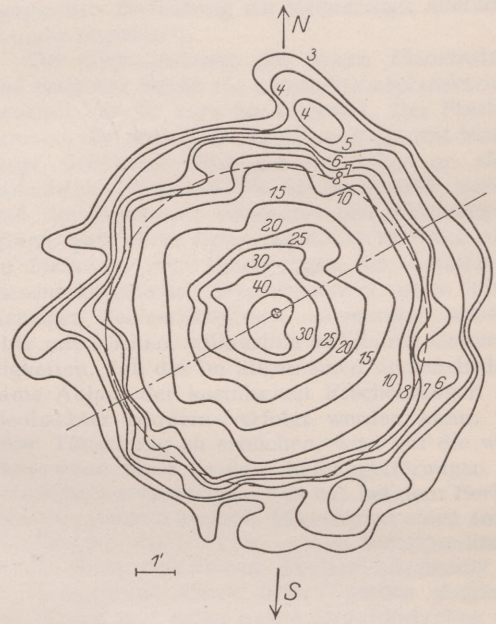

Fig. 7. Messier 12 (Mt. Wilson).

Bis dahin wird man versuchen müssen, auf dem hier angedeuteten Wege weiterzuschreiten. Es ist dazu noch die Herbeischaffung weiteren empirischen Materials nötig, um die hier beschriebenen Erscheinungen genauer zu studieren. Vor allem ist nötig, die Kurven aufzustellen für die Sterne verschiedener Spektralklassen und verschiedener Helligkeit. Und dann wird man in nicht allzu ferner Zeit auch daran denken können, einige der aufgelösteren Spiralnebel in ähnlicher Weise zu untersuchen, um zu prüfen, wo gemeinsame Züge sich nachweisen lassen und wo grundsätzliche Unterschiede bestehen.

Herausgeber und verantwortlicher Schriftleiter: Dr.-Ing. e. h. DR. ARNOLD BERLINER, Berlin W 9.
Verlag von Julius Springer in Berlin W 9. — Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig.

Hierzu eine Beilage von ***Carl Winters Universitätsbuchhandlung*** *in* ***Heidelberg*** *und je eine von den Verlagsbuchhandlungen* ***Julius Springer*** *in* ***Berlin*** *und* ***Wien.***